М.А.Мартыненко, А.Ф.Улитко
/Киев, Киевский технологический институт пищевой промышленности, Киевский государственный университет/

Задача о сферическом разрезе на поверхности раздела упругих свойств материалов

Пусть бесконечная упругая среда / ν_2 , G_2 / с частично отслоившимся сферическим включением / ν_1 , G_1 / находится в осесимметричном поле внешних сил, приложенных на бесконечности / ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; G_1 , G_2 – модули сдвига материалов включения и матрицы/. В сферической системе координат r , θ , φ включение занимает область V_1 / $r < r_0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ /, а матрица – область V_2 / $r > r_0$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ /. Предполагаем, что отслоение включения от матрицы наблюдается только на поверхности S / $r = r_0$, $0 \le \theta \le \theta_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ /. Решая задачу о напряженном состоянии упругого пространства с идеально соединенным сферическим включением, известными методами [I] находим поле напряжений на граничной поверхности S . Затем, согласно принципу Бюкнера [2] , переносим найденное поле усилий с противоположным знаком на поверхность трещины и в дальнейшем решаем задачу о напряженно-деформированном состоянии системы матрица-включение в предположении, что усилия приложены только на поверхности трещины S. В силу осесимметричности задачи граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}; \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)}; \\ &u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}; \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}; \end{aligned}\right\} \quad (r = r_0,\ \theta_0 \le \theta \le \pi) \qquad /I/$$

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} = f_1(\theta); \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)} = f_2(\theta); \quad (r = r_0,\ \theta < \theta_0)$$

где $\sigma_r, \tau_{r\theta}$, u_r, u_θ – компоненты тензора напряжений и вектора перемещений в сферической системе координат для матрицы /индекс 2/ и сферического включения /индекс I/; $f_i(\theta)$ – известные функции, соответствующие усилиям, приложенным на поверхности трещин.

За исходные соотношения возьмем общие решения упругих

задач для сферического включения и матрицы, представленные в виде рядов по функциям Лежандра. Согласно [3] , решение для сферического включения записывается в виде

$$2G_1 u_r^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n-2+4\nu_1) A_n r^{n+1} + B_n r^{n-1} \right] P_n(\cos\theta)$$

$$2G_1 u_\theta^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+5-4\nu_1) A_n r^{n+1} + B_n (n+1) r^{n-1} \right] \frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)} \qquad /2/$$

$$\sigma_r^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2-n-2-2\nu_1) A_n r^{n} + B_n (n-1) r^{n-2} \right] P_n(\cos\theta)$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n^2+2n-1+2\nu_1) A_n r^{n} + B_n (n^2-1) r^{n-2} \right] \frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}$$

Для области

$$2G_2 u_r^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3-4\nu_2) C_n r^{-n} - D_n r^{-n-2} \right] P_n(\cos\theta) \qquad /3/$$

$$2G_2 u_\theta^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n-4+4\nu_2) C_n r^{-n} - D_n n r^{-n-2} \right] \frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}$$

$$\sigma_r^{(2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2+3n-2\nu_2) C_n r^{-n-1} - D_n (n+2) r^{-n-3} \right] P_n(\cos\theta),$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n^2-2+2\nu_2) C_n r^{-n-1} - D_n n(n+2) r^{-n-3} \right] \frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}$$

Из граничных условий /I/ следует, что

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}; \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)}; \quad (r = r_0,\ 0 \le \theta \le \pi) \qquad /4/$$

Это равенство, а также свойство ортогональности функций Лежандра [4] на промежутке $[0,\pi]$ позволяет получить алгебраическую уравнений с неизвестными постоянными A_n , B_n C_n, D_n . Решая ее, находим

$$C_n r_0^{-n-1} = \frac{1}{\Delta} \left[n(n-1)(2n+3) A_n r_0^{n} + (n-1)(2n+1) B_n r_0^{n-2} \right];$$

$$\mathcal{D}_n r_0^{-n-3} = \frac{1}{\Delta}\Big\{\big[2n^5+5n^4-5n^2+4(n^2+n+1)(\nu_1-\nu_2)-4(2n+1)\times$$
$$\times\nu_1\nu_2+6n+4\big]A_n r_0^n+(n^2-1)(n+2)(2n-1)B_n r_0^{n-2}\Big\}; \qquad /5/$$

$$\Delta = 2\left[(2n+1)\nu_2-n^2-n-1\right].$$

Используя условие непрерывности полей перемещений на поверхности ($r=r_0, \theta_0\le\theta\le\pi$) и исключая C_n, $\mathcal{D}_n$ согласно равенств /5/, приходим к следующей взаимосвязанной системе парных рядов-уравнений по функциям Лежандра

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n^2-n-2-2\nu_1)A'_n+(n-1)B'_n\right]P_n(\cos\theta)=f_1(\theta)$$
$$(0\le\theta<\theta_0)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n^2+2n-1+2\nu_1)A'_n+(n^2-1)B'_n\right]\frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}=f_2(\theta)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^{-1}\Delta^{-1}(\alpha_{11}A'_n+\alpha_{12}B'_n)P_n(\cos\theta)=0 \qquad /6/$$
$$(\theta_0\le\theta\le\pi)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^{-1}\Delta^{-1}(\alpha_{21}A'_n+\alpha_{22}B'_n)\frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}=0$$

где

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2}C_2(n+2)(n-2+4\nu_1)\Delta-C_1\big[3n^4+7n^3-2n^2-12n-2+$$
$$+2(\nu_2-\nu_1)(n^2+n+1)+2\nu_1\nu_2(2n+1)-2\nu_2 n(2n^3+5n^2-n-6)\big];$$
$$\alpha_{12}=(n+2)\Big\{\frac{1}{2}C_2\Delta-C_1(n-1)\left[3n+2-2\nu_2(2n+1)\right]\Big\}; \qquad /7/$$
$$\alpha_{21}=n\Big\{\frac{1}{2}C_2(n+2)(n+5-4\nu_1)\Delta-C_1\big[3n^4+12n^3+9n^2-8n-$$
$$-10-2\nu_2(n^2-1)(n+2)(2n+3)-2(\nu_2-\nu_1)(n^2+n+1)-2\nu_1\nu_2(2n+1)\big]\Big\}$$
$$\alpha_{22}=(n+1)\alpha_{12};\quad A'_n=A_n r_0^n;\quad B'_n=B_n r_0^{n-2}$$

Решение системы /6/ ищем методом, предложенным в [5], [6] [7]. Положим

$$(n+2)^{-1}\Delta^{-1}(\alpha_{11}A'_n+\alpha_{12}B'_n)=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\varphi(t)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=I_n^{(1)};$$

$$\left[(n+2)(2n+1)\Delta\right]^{-1}(\alpha_{21}A'_n+\alpha_{22}B'_n)=\frac{1}{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\psi(t)\cos(n+\tfrac{1}{2})t\,dt=I_n^{(2)} \qquad /8/$$

где введенные вспомогательные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ предполагаются непрерывными внутри отрезка $(-\theta_0,\theta_0)$ и обладают следующими свойствами

$$\varphi(-t)=-\varphi(t);\quad \psi(-t)=\psi(t) \qquad /9/$$

Если воспользоваться известными [4] и полученными в [6,], [7] разрывными суммами

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\sin(n+\tfrac{1}{2})t=\frac{H(t-\theta)}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos t}};\quad H(t-\theta)=\begin{cases}1 & t>\theta\\ 0 & t<\theta\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1/2}{n(n+1)}P_n^1(\cos\theta)\cos(n+\tfrac{1}{2})t=-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}+\frac{\sin t\,H(t-\theta)}{\sin\theta\sqrt{2\cos\theta-2\cos t}}, \qquad (10)$$

то легко показать, что выбором решения в виде интегральных операторов /8/ последние два уравнения системы /6/ удовлетворяются тождественно при выполнении следующего интегрального условия

$$\int_0^{\theta_0}\psi(t)\cos\frac{t}{2}\,dt=0 \qquad /11/$$

Из системы /8/ алгебраическим путем находим выражения постоянных A'_n, B'_n через введенные интегральные операторы $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$. После решения системы получим

$$A'_n=\frac{1}{\Delta_1}\left[(n+1)I_n^{(1)}-(2n+1)I_n^{(2)}\right]; \qquad /12/$$

$$B'_n=\frac{1}{\alpha_{12}\Delta_1}\left[(2n+1)\alpha_{11}I_n^{(2)}-\alpha_{21}I_n^{(1)}\right];$$

где α_{ij} определяются равенствами /7/, а

$$\Delta_1=C_2\left[2\nu_1(2n+1)-3n-1\right]-\frac{C_1}{n+2}\left[n^2+n+1+(2n+1)\nu_1\right]; \qquad /13/$$

После подстановки выражений для A'_n, B'_n /12 в первые два уравнения системы /6/ приходим к следующим равенствам:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[L_{11}(n)I_n^{(1)}+L_{12}(n)I_n^{(2)}\right]P_n(\cos\theta)=f_1(\theta);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[L_{21}(n)I_n^{(1)}+L_{22}(n)I_n^{(2)}\right]\frac{P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}=f_2(\theta) \qquad |\theta|<\theta_0 \tag{I4}$$

где

$$L_{11}(n)=\frac{2}{\Delta_1 d_{12}}\Big\{C_1(n-1)\big[2n^4+7n^3+11n^2+9n+4+\nu_1(2n^2+5n+4)\times$$
$$\times(2n+1)-\nu_2(n^2+n+1)(2n^2+7n+4)-\nu_1\nu_2(2n+1)(2n^2+7n+4)\big]+$$
$$+C_2(n+2)\left[n^2+n+1-\nu_2(2n+1)\right]\left[2n^2-n+1-\nu_1(2n^2-3n-1)\right]\Big\};$$

$$L_{12}(n)=\frac{2(2n+1)}{\Delta_1 d_{12}}\Big\{C_1(n-1)\big[-n^3-4n^2-4n-3-\nu_1(2n^2+7n+3)+$$
$$+\nu_2(2n+3)(n^2+n+1)+\nu_1\nu_2(2n+1)(2n+3)\big]-\frac{1}{2}C_2(n+2)\Delta\left[n-2-(2n-1)\nu_1\right]\Big\} \tag{I5}$$

$$L_{22}(n)=\frac{2(2n+1)}{\Delta_1 d_{12}}\Big\{C_1(n-1)\big[2n^4+6n^3+7n^2+5n+1+\nu_1(4n^3+$$
$$+10n^2+6n+1)-\nu_2(n^2+n+1)(2n^2+5n+1)-\nu_1\nu_2(2n+1)\times$$
$$\times(2n^2+5n+1)\big]-\frac{1}{2}C_2(n+2)\Delta\left[2n^2-1-\nu_1(2n^2-n-2)\right]\Big\}$$

$$L_{21}=\frac{n(n+1)}{2n+1}L_{12}(n)$$

Структура L_{ij} такова, что если сразу воспользоваться интегральными представлениями для функций Лежандра [4] , [7]

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos(n+1/2)x}{\sqrt{2\cos x-2\cos\theta}}\,dx \tag{I6}$$

$$\frac{n+1/2}{n(n+1)}P_n^1(\cos\theta)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\sin x}{\sin\theta}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt{2\cos x-2\cos\theta}}\,dx$$

и поменять порядки суммирования и интегрирования, то придем к системе уравнений Абеля, после решения которой получим систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Чтобы получить систему интегральных уравнений, необходимо выполнить ряд дополнительных преобразований. Прежде всего умножим первое уравнение системы /I4/ на $\sin\theta$, а затем оба уравнения проинтегрируем от 0 до θ . После использования соотношений [4]

$$P_n^1(\cos\theta)\,d\theta=dP_n(\cos\theta);$$
$$(2n+1)\sin\theta P_n(\cos\theta)=P_{n-1}^1(\cos\theta)-P_{n+1}^1(\cos\theta); \tag{I7}$$
$$P_{n+1}(\cos\theta)-P_{n-1}(\cos\theta)=\frac{2n+1}{n(n+1)}\sin\theta P_n^1(\cos\theta).$$

получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[L_{11}(n)I_n^{(1)}+L_{12}(n)I_n^{(2)}\right]\frac{\sin\theta P_n^1(\cos\theta)}{n(n+1)}=F_1(\theta)+d_0 I_0^{(1)}(1-\cos\theta)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[L_{21}(n)I_n^{(1)}+L_{22}(n)I_n^{(2)}\right]\frac{P_n(\cos\theta)}{n(n+1)}=C+F_2(\theta) \tag{I8}$$

где

$$d_0=\frac{4(1+\nu_1)}{2C_2(2\nu_1-1)-C_1(1+\nu_1)}; \tag{I9}$$

$$F_1(\theta)=\int_0^{\theta}f_1(\theta)\sin\theta\,d\theta; \qquad F_2(\theta)=\int_0^{\theta}f_2(\theta)\,d\theta.$$

Подставляя в /I8/ вместо функций Лежандра их интегральные представления /I6/, а затем меняя порядки суммирования и интегровани, приходим к следующим уравнениям Абеля

$$\int_0^{\theta}\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x-2\cos\theta}}\left\{\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\left[\varphi(t)M_{11}(t,x)+\psi(t)M_{12}(t,x)\right]dt\right\}dx=$$
$$=F_1(\theta)+d_0 I_0^{(1)}(1-\cos\theta). \tag{20}$$
$$\int_0^{\theta}\frac{1}{\sqrt{2\cos x-2\cos\theta}}\left\{\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\left[\varphi(t)M_{21}(t,x)+\psi(t)M_{22}(t,x)\right]dt\right\}dx=$$
$$=C+F_2(\theta);$$

где

$$M_{11}(t,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{11}(n)}{n+1/2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,\sin(n+\tfrac{1}{2})x;$$

$$M_{12}(t,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{12}(n)}{n+1/2}\cos(n+\tfrac{1}{2})t\,\sin(n+\tfrac{1}{2})x;$$

$$M_{21}(t,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{21}(n)}{n(n+1)}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,; \qquad /21/$$

$$M_{22}(t,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{22}(n)}{n(n+1)}\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,.$$

Исследуем сходимость рядов /21/. Для этого коэффициенты при тригонометрических функциях представим в виде разложений по степеням $\left(n+\frac{1}{2}\right)$. После соответствующих преобразований указанные коэффициенты запишем в виде

$$\frac{L_{11}(n)}{n+1/2}=a_0+a_1\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}+\bar{L}_{11}(n) \qquad /22/$$

$$\frac{L_{12}(n)}{n+1/2}=b_0+b_1\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}+\bar{L}_{12}(n)$$

$$\frac{L_{21}(n)}{n(n+1)}=\frac{b_0}{2}+\frac{1}{2}b_1\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}+\bar{L}_{21}(n)$$

$$\frac{L_{22}(n)}{n(n+1)}=c_0+c_1\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}+\bar{L}_{22}(n)$$

где

$$a_0=\frac{a_2}{a_3}\,;\quad a_1=\frac{a_4a_3-a_2a_5}{a_3^2}\,;\quad b_0=b_2/b_3\,,$$

$$b_1=(b_3a_3-b_2a_5)a_3^{-2};\quad c_0=2a_0;\quad c_1=(c_2d_3-2a_2a_5)a_3^{-2};$$

$$a_2=4[G_1(1-\nu_2)+G_2(1-\nu_1)];\quad b_2=4[G_2(1-\nu_1)-G_1(1-\nu_2)];$$

$$a_3=[(4\nu_1-3)G_2-G_1][(4\nu_2-3)G_1-G_2];\quad a_4=4[G_1(2\nu_1-\nu_2-$$
$$-2\nu_1\nu_2)+G_2(\nu_1-2\nu_2-2\nu_1\nu_2)];\quad a_5=2\{[(3\nu_1-2)G_2-\nu_1G_1]\times$$
$$\times[(4\nu_2-3)G_1-G_2]-[(3\nu_2-2)G_1-\nu_2G_2][(4\nu_1-3)G_2-G_1]\};$$

$$b_3=4[G_1(4\nu_1\nu_2-2\nu_1-2\nu_2-1)+G_2(4\nu_1\nu_2-2\nu_2-\nu_1-1)];$$

$$c_2=4[G_1(1+4\nu_1-4\nu_1\nu_2)+G_2(1-4\nu_2+4\nu_1\nu_2)].$$

Выражения $\bar{L}_{ij}(n)$ определяются из равенств /22/, например,

$$\bar{L}_{11}(n)=L_{11}(n)\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1}-a_0-a_1\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^{-1} \qquad /23/$$

и первые члены их разложений по отрицательным степеням $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ начинаются с $\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}$. Опираясь на суммы вида [8, 9]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x=\frac{\pi}{2}\delta(t-x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t=\frac{1}{4}\left[\csc\frac{t-x}{2}+\csc\frac{t+x}{2}\right]; \qquad /24/$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1/2}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t-x}{4}\right|-\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t+x}{4}\right|\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+1/2}=\frac{\pi}{4}H(x-t)$$

запишем $M_{ij}(t,x)$ следующим образом

$$M_{11}(t,x)=\frac{2a_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\delta(t-x)-\sin\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}\right]+\frac{a_1}{\pi}\left[\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t-x}{4}\right|-\right.$$
$$\left.-\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t+x}{4}\right|-4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}\right]+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{11}(n)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,;$$

$$M_{12}(t,x)=\frac{b_0}{4\pi}\left[\csc\frac{x-t}{2}+\csc\frac{x+t}{2}-4\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}\right]+\frac{b_1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\times\right.$$
$$\left.\times H(x-t)-2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{12}(n)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,; \qquad (25)$$

$$M_{21}(t,x)=\frac{b_0}{4\pi}\left[\csc\frac{t-x}{2}+\csc\frac{t+x}{2}-4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}\right]+\frac{b_1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}H(t-x)-\right.$$
$$\left.-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}\right]+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{21}(n)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,;$$

$$M_{22}(t,x)=\frac{2a_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\delta(t-x)-\cos\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}\right]+\frac{c_1}{2\pi}\left[\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t+x}{4}\right|+\right.$$
$$\left.+\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{t-x}{4}\right|-4\cos\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{L}_{22}\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\,.$$

Решая систему интегральных уравнений Абеля /20/ по формулам обращения [5]

$$\int_0^{\theta}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{2\cos x-2\cos\theta}}=f(\theta);\quad \varphi(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{f(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos x}} \qquad /26/$$

а также используя ряд свойств обобщенных функций [8] и функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ /9/, приходим к следующей системе сингулярных уравнений

$$\varphi(x)-\frac{b_0}{2\pi a_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\psi(t)\csc\frac{t-x}{2}dt+\int_{-\theta_0}^{\theta_0}[K_{11}(t,x)\varphi(t)+K_{12}(t,x)\psi(t)]dt=\Phi_1(x) \qquad (27)$$

$$\psi(x)+\frac{b_0}{2\pi a_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\varphi(t)\csc\frac{t-x}{2}dt+\int_{-\theta_0}^{\theta_0}[K_{21}(t,x)\varphi(t)+K_{22}(t,x)\psi(t)]dt=\Phi_2(x)$$

где

$$K_{11}(t,x)=\frac{2a_1}{\pi a_0}\ln\left|ctg\frac{t-x}{4}\right|-\frac{2}{\pi a_0}(a_0+2a_1+2\alpha_0)\sin\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}+ + \frac{2}{\pi a_0}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{11}(n)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\sin(n+\tfrac{1}{2})x;$$

$$K_{12}(t,x)=\frac{b_1}{4a_0}H(x-t)+\frac{1}{\pi a_0}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{12}(n)\cos(n+\tfrac{1}{2})t\sin(n+\tfrac{1}{2})x;$$

$$K_{21}(t,x)=\frac{b_1}{4a_0}H(t-x)-\frac{b_0+2b_1}{\pi a_0}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}+ + \frac{2}{\pi a_0}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{21}(n)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\cos(n+\tfrac{1}{2})x; \qquad (28)$$

$$K_{22}(t,x)=\frac{c_1}{\pi a_0}\ln\left|ctg\frac{t-x}{4}\right|+\frac{1}{\pi a_0}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{L}_{22}(n)\cos(n+\tfrac{1}{2})t\cos(n+\tfrac{1}{2})x;$$

$$\Phi_2(x)=\frac{2c}{\pi a_0}\cos\frac{x}{2}+\frac{2}{\pi a_0}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{F_2(\theta)\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos x}};$$

$$\Phi_1(x)=\frac{2}{\pi a_0}\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{F_1(\theta)\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos x}}.$$

При выводе /27/ были учтены равенства такого типа

$$\frac{1}{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\psi(t)\left(\ln\left|ctg\frac{t+x}{4}\right|+\ln\left|ctg\frac{t-x}{4}\right|\right)dt=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\psi(t)\ln\left|ctg\frac{t-x}{4}\right|dt$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\varphi(t)\left(\csc\frac{t+x}{2}+\csc\frac{t-x}{2}\right)dt=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\varphi(t)\csc\frac{t-x}{2}dt \qquad /29/$$

Как видно из /28/, ядра $K_{12}(t,x)$, $K_{21}(t,x)$ – являются фредголмовыми, а $K_{11}(t,x)$, $K_{22}(t,x)$ имеют логарифмическую особенность. Для определения особенности решения системы /27/ регуляризуем ее по Векуа-Карлеману [IO]. Для этого вводим комплексную функцию

$$f(t)=\psi(t)+i\varphi(t);\quad \bar{f}(t)=\psi(t)-i\varphi(t); \qquad /30/$$

Умножая первое уравнение на i и складывая со вторым, получим следующее уравнение

$$K_0 f(x)+\kappa f(x)=\Phi(x); \qquad /31/$$

где

$$\Phi(x)=\Phi_2(x)+i\Phi_1(x);\quad K_0 f(x)=f(x)+\frac{\gamma}{\pi i}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{f(t)dt}{\sin\frac{t-x}{2}}; \qquad /32/$$

$$\kappa f(x)=\int_{-\theta_0}^{\theta_0}[K_1(t,x)f(t)+K_2(t,x)\bar{f}(t)]dt;\quad \gamma=b_0/\pi a_0;$$

$$K_1(t,x)=\frac{1}{2}[K_{22}(t,x)+K_{21}(t,x)+i(K_{11}(t,x)+K_{12}(t,x))];$$

$$K_2(t,x)=\frac{1}{2}[K_{22}(t,x)-K_{21}(t,x)+i(K_{12}(t,x)-K_{11}(t,x))].$$

Решение характеристического уравнения

$$K_0 f(x)=F(x) \qquad /33/$$

построим, используя идеи и результаты работ [II], [I2]. Введем в рассмотрение функцию комплексного переменного z в плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-\theta_0,\theta_0]$ следующим способом

$$\Psi(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{f(t)dt}{\sin\frac{t-z}{2}}; \qquad /34/$$

Определение этой функции сводится к решению краевой задачи Римана

$$\Psi^{+} = C(t)\Psi^{-} + g(t) \qquad /35/$$

где

$$\Psi^{+}(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4\pi i}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(t)\csc\frac{t-x}{2}\,dt\,; \qquad /36/$$

$$\Psi^{-}(x) = -\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{4\pi i}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(t)\csc\frac{t-x}{2}\,dt\,;$$

$$C(t) = \frac{1-2\gamma}{1+2\gamma}\,; \quad g(t) = F(t)(1+2\gamma)^{-1}$$

После решения задачи Римана решение характеристического уравнения запишется в виде

$$f(x) = \frac{Z(x)}{1-4\gamma^2}\left[F(x) - \frac{\gamma}{\pi i}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{F(t)-F(x)}{Z(t)\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\right]; \qquad /37/$$

где

$$Z(x) = \sqrt{1-4\gamma^2}\left(tg\frac{\theta_0-x}{4}\right)^{-i\lambda}\left(tg\frac{\theta_0+x}{4}\right)^{i\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{2\gamma}\ln\frac{1-2\gamma}{1+2\gamma} \qquad /38/$$

При получении решения /37/ было использовано значение интеграла

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{dt}{Z(t)\sin\frac{t-x}{2}} = \frac{\pi i}{\gamma}\left[\frac{1}{Z(x)} - 1\right] \qquad /39/$$

Как видно из /37/,/38/, решение сингулярного уравнения /33/ имеет осциллирующую особенность на концах интервала $(-\theta_0, \theta_0)$ Уравнение /3I/ регулязируется по Векуа-Карлеману на основании решения характеристического уравнения /37/ и эквивалентно следующему уравнению Фредгольма

$$f(x) + K^{*}Kf(x) = K^{*}\Phi(x) \qquad /40/$$

$$K^{*}\Phi(x) = \frac{Z(x)}{1-4\gamma^2}\left[\Phi(x) - \frac{\gamma}{\pi i}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{\Phi(t)-\Phi(x)}{Z(t)\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\right.$$

После решения уравнения /40/ исследование локального поля напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений проводится методом работы [6] .

Литература

I. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.-М.:Мир, I982.- 334 с.

2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.:Наука, I966-707 с.

3. Лурье А.К. Пространственные задачи теории упругости.М. Гостехиздат, I955, 49Iс.

4. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: I962.- 599с.

5. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики Л. Наука, I977 - 220 с.

6. Мартыненко М.А., Улитко А.Ф. Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде - Прикл.механика, I978, I4, № 9, с. I5-23

7. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка - Мат.физика, I979, № 26,с.I06-I09.

8. Гельфанд И.М.,Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, I958 - 439 с.

9. Прудников А.П.,Брычков Ю.А. Маричев О.И. Интегралы и ряды М.: Наука, I98I - 798 с.

I0.Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения М., I962 - 599 с.

II. Чибрикова Л.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений - Уч.зап. Казан. ун-та, I962, I22, № 3, с.95-I24.

I2. Вайншельбаум В.М., Гольдштейн Р.В. Осесимметричная задача о трещине на границе раздела слоев в многослойной среде.- МТТ, I976, 2 , с. I30-I42.