МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
до вивчення дисципліни,
виконання лабораторних та контрольних робіт
для студентів за напрямом підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»
всіх форм навчання

Всі цитати, цифровий та фактичний матеріал, бібліографічні відомості перевірені.
Написання одиниць відповідає стандартам.

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри менеджменту
Протокол № 7
від 23.11. 2010 року

Підписи авторів
23 листопада 2010 року

Л.В.Мазник

_____

Н.С.Скопенко

_____

Л.О.Коннова

_____

Л.В.Чорноус

_____

Київ НУХТ 2010

Економіко-математичне моделювання: Навчально-методичний посібник до вивчення дисципліни, виконання лабораторних та контрольних робіт для студентів за напрямом підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» всіх форм навчання/ Укл.: Л.В.Мазник, Н.С.Скопенко, Л.О.Коннова, Л.В.Чорноус. – К.: НУХТ, 2010. – 183 с.

Рецензент: **Т.А.Репіч,** канд. екон. наук

Укладачі: **Л.В.Мазник**, канд. екон. наук,

Н.С.Скопенко, канд. екон. наук,

Л.О.Коннова,

Л.В.Чорноус.

Відповідальний за випуск **Т.Л.Мостенська**, д-р екон. наук

Зміст

1. Загальні відомості 5
2. Зміст занять з дисципліни 6
2.1. Лекційні заняття 6
2.2. Лабораторні заняття 8
3. Питання для підготовки до заліку 10
4. Вказівки до виконання лабораторних робіт 10
5. Вказівки до виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання 11
Тема 1. ПОНЯТТЯ ПРО ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МОДЕЛЮВАННЯ 14
Лабораторна робота № 1. «Лінійна модель» 22
Лабораторна робота № 2. «Степенева функція» 25
Лабораторна робота № 3. «Параболічна функція» 29
Лабораторна робота № 4. «Гіперболічна функція» 31
Лабораторна робота № 5. «Експоненціальна модель» 33
Тема 2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ 34
Лабораторна робота № 6 «Задача оптимального використання ресурсів» 43
Тема 3. МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ НА РІВНІ ПІДПРИЄМСТВА 44
Лабораторна робота № 7 «Розрахунок оптимальної виробничої програми карамельного цеху» 46
Лабораторна робота № 8 «Оптимізація виробничої програми молочного заводу» 71
Лабораторна робота № 9 «Оптимізація виробничої програми ковбасного виробництва» 75
Лабораторна робота № 10 «Оптимізація виробничої програми хлібозаводу» 83
Лабораторна робота № 11 «Модель оптимального використання потужності» 102
Лабораторна робота № 12. «Транспортна задача» 107
Тема 4. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ 119
Тема 5. МЕТОДИ ТА СПОСОБИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ 121

Тема 6. КОРЕЛЯЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ 132
Лабораторна робота № 13 «Модель парної лінійної кореляційної залежності» 135
Тема 7. ОДНОВИМІРНІ ЧАСОВІ РЯДИ ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ 150
Лабораторна робота № 14 «Перевірка наявності тенденції середнього рівня. Згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої)» 158
Тема 8. МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ 160
Лабораторна робота № 15 «Множинна лінійна кореляційна модель» 161
Лабораторна робота № 16 «Виробнича функція Кобба-Дугласа» 179
ЛІТЕРАТУРА 193

1. Загальні відомості

В даній дисципліні розглядаються принципи побудови економіко-математичних моделей і методів їх вирішення, порядок побудови математичних моделей економічних процесів, різновид задач оптимального планування, методи рішення цих задач на ПК, прийоми економічного аналізу результатів рішення. Також розглядаються основні методи одномірного прогнозування.

Предмет дисципліни – вивчення основних економіко-математичних методів і моделей, які використовуються для вироблення планових і управлінських рішень на підприємствах.

Мета дисципліни – навчити майбутніх спеціалістів використовувати в економічній діяльності методи лінійного програмування, кореляційно-регресійного аналізу і основні методи одномірного прогнозування економічних показників.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен **знати**: наукові основи побудови, вирішення і аналізу результатів задач за допомогою методів лінійного програмування, кореляційно-регресійного аналізу і основних методів одномірного прогнозування; **уміти:** визначати цільову функцію, формулювати основні умови та закономірності та описувати їх у вигляді математичних співвідношень, будувати кореляційно-регресійні моделі, застосовувати методи прогнозування основних техніко-економічних показників, а також розв'язувати основні задачі математичного програмування за допомогою ПК.

Розподіл годин за формами навчання та видами занять

Форма навчання	Курс	Чверть (для денної форми навчання) або семестр	Кількість годин								Контроль навчальної роботи студентів	
			Всього	аудиторних занять			самостійної роботи				модульний (кількість модулів у кожній чверті)	підсумковий (чверть або форма контролю)
							Індивідуальні завдання (кількість завдань і загальна кількість годин)			Підготовка до аудиторних занять		
				Лекції	Практичні (семінарські)	Лабораторні	Реферати, розрахункові, графічні, розрахунково-графічні роботи	Курсові проекти (роботи)	Контрольні роботи			
Денна	2	1,2	144	40		32				72	2	ДЗ
Заочна	4	7	90	8		4			1/9	69		залік
Скорочена	4	8	108	6		4			1/9	89		залік

2. Зміст занять з дисципліни

2.1. Лекційні заняття

№	Тема та зміст лекції	Кількість годин за формою навчання			Література
		денною	заочною	заочною скороченою	
1	2	3	4	5	6
1	**Тема 1. Поняття про економіко-математичні моделі і моделювання** Поняття про економіко-математичні моделі і моделювання. Теоретичні основи математичного моделювання. Схема класифікації економіко-математичних методів і моделей. Етапи моделювання економічних процесів. Функції і графіки в економічному моделюванні.	4	0,5	0,5	[1, с. 169-193; 2, с.14-21; 5, с. 8-45; 8, с. 3-24; 9, с. 12-16; 10, с. 4-27, 138-154; 11, с. 9-12]
2	**Тема 2. Лінійне програмування** Формулювання задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування. Рішення задачі лінійного програмування. Аналіз чутливості. Двоїста задача лінійного програмування.	4	0,5	0,5	[2, с. 21-32; 3, с.101-107, 141-147; 5, с. 47-97; 6, с. 46-77]
3	**Тема 3. Моделі оптимального планування на рівні підприємства** Модель розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства. Побудова компромісних планів. Модель оптимального завантаження обладнання. Модель оптимального розподілу випуску продукції виробничого об'єднання. Транспортні задачі.	8	2	2	[1, с. 436-455; 2, с. 69-77, 93-143; 3, с.112-135; 5, с.242-277; 6, с.120-137; 7, с.15-54]
4	**Тема 4. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем** Основні види задач нелінійного програмування. Постановка задачі нелінійного програмування та її характерні особливості.	4			[1, с. 468-491; 5, с.186-211; 7, с. 139-149; 9, с. 69-70]

1	2	3	4	5	6
5	**Тема 5. Методи та способи прийняття управлінських рішень** Поняття управлінських рішень. Функції управлінських рішень. Класифікація управлінських рішень. Аналіз та управління ризиком. Прийняття управлінських рішень в умовах ризику. Прийняття рішень в умовах відсутності повторюваності подій	4			[5, с.346-372; 20, с. 5-10, 11-25, 46-61]
6	**Тема 6. Кореляція двох змінних** Основи теорії кореляції. Функціональний і кореляційний зв'язок. Етапи кореляційного аналізу. Лінійні і нелінійні кореляційні моделі. Метод найменших квадратів для побудови рівняння регресії. Показники тісноти зв'язку між змінними. Оцінка достовірності і точності побудованих моделей. Еластичність. Графічне відображення кореляційних моделей	6	2	2	[3, с.233-263; 5, 415-457; 8, с. 3-10, 25-38; 9, с. 12-16, 43-46, 96-106, 111-130; 10, с. 4-27, 44-60,63-65,102; 11, с. 9-12, 23-29, 113-120, 127-140;
7	**Тема 7. Одновимірні часові ряди та їх моделювання** Елементи часового ряду. Методи аналізу часових рядів. Перевірка гіпотези про існування тенденції. Види тенденцій. Способи згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої).	4	1		[1, с. 169-193; 5, с.538-598; 10, с. 138-154; 11, с. 399-440]
8	**Тема 8. Моделі множинної регресії** Поняття про множинну кореляцію. Сутність виробничих функцій. Етапи побудови множинних кореляційних моделей. Основні характеристики виробничих функцій і їх економічний зміст. Ізокванти.	6	2	1	[3 с.257-267; 5, с. 465-534; 8, с. 39-57, 89-100; 9, с. 96-99, 145-150; 10, с. 171-227, 249-272; 11, с. 46-68, 140-149, 46-68, 95-97, 245-265; 12, с. 93-105, 142-154]
	Всього	40	8	6	

2.2. Лабораторні заняття

№	Тема заняття	Кількість годин за формою навчання			Література
		денною	заочною	заочною скороче-ною	
1	2	3	4	5	6
1	**Поняття про економіко-математичні моделі і моделювання.** Функції і графіки в економічному моделюванні **Лабораторна робота № 1** «Лінійна модель» **Лабораторна робота № 2** «Степенева функція» **Лабораторна робота № 3** «Параболічна функція» **Лабораторна робота № 4** «Гіперболічна функція» **Лабораторна робота № 5** «Експоненціальна модель»	4			[1, с. 169-193; 5, с.449, 538-598; 8, с. 3-24; 9, с. 197-200; 10, с. 138-154; 12, с. 65-73]
2	**Лінійне програмування.** Побудова, вирішення і аналіз задач лінійного програмування **Лабораторна робота № 6** Задачі оптимального використання ресурсів	4			[1, с. 354-358, 400-430; 5, с. 242-251; 6, с. 66-79, ; 7, с. 15-23, 24, 45-54; 9, с. 45-47,51; 13, с.31-39]
3	**Моделі оптимального планування на рівні підприємства.** Модель оптимізації виробничої програми підприємства **Лабораторна робота № 7** Оптимізація виробничої програми карамельного цеху (асортиментна задача) **Лабораторна робота № 8** Оптимізація виробничої програми молочного заводу **Лабораторна робота № 9** Оптимізація виробничої програми ковбасного виробництва **Лабораторна робота № 10** Оптимізація виробничої програми хлібозаводу	10	1	1	[1, с. 354-377; 2, с. 117-190; 6, с. 120-137; 7, с. 24-44, 102-128, 251; 251; 9, с. 45-48, 59; 13, с. 31-39, 41-47]

1	2	3	4	5	6
4	**Модель оптимального завантаження обладнання** **Лабораторна робота № 11** Задачі оптимального використання потужностей	2	1	1	[1, с. 358-361; 2, с. 93-116; 5, с. 186-210; 6, с. 66; 7, с. 30-32, 45-54; 9, с.45-48, 51-52; 13, с.8, 31]
5	**Транспортні задачі** **Лабораторна робота № 12** Математична модель транспортної задачі	2			[1, с. 436-455, 385-392; 2, с. 69-72; 5, с. 133-160; 6, с. 120-137; 7, с. 102-128; 9, с. 50, 53-54, 63-65; 13, с.9-11, 60-63, 75-87]
6	**Кореляція двох змінних** **Лабораторна робота № 13** Модель парної лінійної кореляційної залежності	4	1	1	[3, с. 233-263; 5, с. 415-463; 8, с. 25-38; 9, с. 43-46,96-106, 111-130; 10, с. 44-60,63-65,102; 11, с. 23-29, 113-120, 127-140; 12, с. 41-58]
7	**Одновимірні часові ряди та їх моделювання** **Лабораторна робота № 14** Перевірка наявності тенденції середнього рівня. Згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої)	2			[1, с. 169-193; 5, с.538-598; 10, с. 138-154; 11, с. 399-440]
8	**Моделі множинної регресії** **Лабораторна робота № 15** Множинна лінійна кореляційна модель	2			[3, с. 257-267; 5, с.465-510; 8, с. 39-57; 9, с. 96-99; 10, с. 171-227; 11, с. 46-68, 140-149; 12, с. 93-105]
9	**Нелінійні кореляційні моделі** **Лабораторна робота № 16** Виробнича функція Кобба-Дугласа	2	1	1	[3, с. 257-267; 5, с. 525–534; 8, с. 39-57; 9, с. 96-99; 10, с. 171-227; 11, с. 46-68, 140-149; 12, с. 93-105, 143-154]
	Всього	32	4	4	

3. Питання для підготовки до заліку

1. Поняття про економіко-математичні моделі і моделювання.
2. Теоретичні основи математичного моделювання.
3. Схема класифікації економіко-математичних методів і моделей.
4. Етапи моделювання економічних процесів.
5. Формулювання задачі лінійного програмування.
6. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
7. Рішення задачі лінійного програмування.
8. Аналіз чутливості.
9. Двоїста задача лінійного програмування.
10. Модель розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства.
11. Модель оптимального завантаження обладнання.
12. Модель оптимального розподілу випуску продукції виробничого об'єднання.
13. Основи теорії кореляції. Функціональний і кореляційний зв'язок.
14. Етапи кореляційного аналізу.
15. Лінійні і нелінійні кореляційні моделі.
16. Метод найменших квадратів для побудови рівняння регресії.
17. Показники тісноти зв'язку між змінними.
18. Оцінка достовірності і точності побудованих моделей.
19. Еластичність.
20. Графічне відображення кореляційних моделей
21. Поняття про множинну кореляцію.
22. Сутність виробничих функцій.
23. Етапи побудови множинних кореляційних моделей.
24. Основні характеристики виробничих функцій і їх економічний зміст.
25. Ізокванта.

4. Вказівки до виконання лабораторних робіт

Лабораторні роботи з дисципліни «Економіко-математичне моделювання», що виконують студенти, спрямовані на практичне засвоєння матеріалу з тем дисципліни, передбачених навчальною програмою. Завдання до лабораторних робіт дають студентам можливість опанувати методи знаходження розв'язків задач лінійного програмування, розв'язування оптимізаційних задач за допомогою програм SIMPL.EXE та Microsoft Excel, засвоїти основи кореляційного аналізу, етапи побудови лінійних та нелінійних, парних та множинних кореляційних моделей, набути практичних аналітичних навичок математичного моделювання економічних процесів, які є основою економічних досліджень.

Лабораторні роботи студент виконує згідно з варіантом, який отримує у викладача. Роботу потрібно виконувати в зошитах для лабораторних робіт або на пронумерованих стандартних аркушах паперу (формат А4), які потім зшити.

5. Вказівки до виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання

Для виконання контрольної роботи потрібно ознайомитись з літературою з дисципліни (список додається). Моделювання здійснюють на основі вибірки статистичних даних, яку студент отримує з відповідних таблиць.

Робота повинна бути акуратно оформлена, мати титульну сторінку, на якій зазначаються: назви університету й дисципліни, прізвище та ініціали студента, факультет, курс, група, номери залікової книжки та варіанта контрольної роботи.

Контрольну роботу потрібно виконувати на пронумерованих стандартних аркушах паперу (формат А4), які потім зшити. В кінці роботи навести список використаної літератури згідно з правилами бібліографічного опису. На останній сторінці роботи проставити дату її виконання та свій власний підпис.

У контрольній роботі на основі виконаних лабораторних робіт необхідно побудувати моделі за темами: «Побудова, вирішення і аналіз задач лінійного програмування», «Модель оптимального завантаження обладнання», «Модель оптимізації виробничої програми підприємства», «Кореляція двох змінних», «Одновимірні часові ряди та їх моделювання», «Моделі множинної регресії», «Нелінійні кореляційні моделі».

Варіант лабораторних робіт № 3, № 4, № 5, № 7, № 8, № 9, № 10, № 14 студент обирає за останньою цифрою номера залікової книжки (табл. 1).

Таблиця 1

Варіанти лабораторних робіт

Цифра залікової книжки	Номер варіанта
01	**1**
02	**2**
03	**3**
04	**4**
05	**5**
06	**6**
07	**7**
08	**8**
09	**9**

00	**10**

Для лабораторних робіт № 1, № 2, № 6, № 11, № 12, № 13, № 15, № 16 студент обирає за двома останніми цифрами номера залікової книжки (табл. 2).

Таблиця 2

Варіанти лабораторних робіт

Цифри залікової книжки	Номер варіанта	Цифри залікової книжки	Номер варіанта	Цифри залікової книжки	Номер варіанта	Цифри залікової книжки	Номер варіанта
1	2	3	4	5	6	7	8
01	**1**	26	**26**	51	**21**	76	**16**
02	**2**	27	**27**	52	**22**	77	**17**
03	**3**	28	**28**	53	**23**	78	**18**
04	**4**	29	**29**	54	**24**	79	**19**
05	**5**	30	**30**	55	**25**	80	**20**
06	**6**	31	**1**	56	**26**	81	**21**
07	**7**	32	**2**	57	**27**	82	**22**
08	**8**	33	**3**	58	**28**	83	**23**
09	**9**	34	**4**	59	**29**	84	**24**
10	**10**	35	**5**	60	**30**	85	**25**
11	**11**	36	**6**	61	**1**	86	**26**
12	**12**	37	**7**	62	**2**	87	**27**
13	**13**	38	**8**	63	**3**	88	**28**
14	**14**	39	**9**	64	**4**	89	**29**
15	**15**	40	**10**	65	**5**	90	**30**
16	**16**	41	**11**	66	**6**	91	**1**
17	**17**	42	**12**	67	**7**	92	**2**
18	**18**	43	**13**	68	**8**	93	**3**
19	**19**	44	**14**	69	**9**	94	**4**
20	**20**	45	**15**	70	**10**	95	**5**
21	**21**	46	**16**	71	**11**	96	**6**
22	**22**	47	**17**	72	**12**	97	**7**
23	**23**	48	**18**	73	**13**	98	**8**
24	**24**	49	**19**	74	**14**	99	**9**
25	**25**	50	**20**	75	**15**	00	**10**

Тема 1. ПОНЯТТЯ ПРО ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МОДЕЛЮВАННЯ

Економіко-математичні моделі дають змогу співставити характеристики реального економічного об'єкта чи системи. Тип математичної моделі залежить як від природи системи, так і від задач дослідження. У загальному випадку математична модель системи містить опис множини можливих станів останньої та закон переходу з одного стану до іншого (закон функціонування).

Розглянемо основні типи економіко-математичних моделей, які класифікують за різними критеріями.

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяються на теоретико-аналітичні, застосовувані для дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів (наприклад, модель Кейнса), та прикладні, призначені для розв'язування конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління тощо).

Економіко-математичні моделі можуть бути призначені для дослідження як різних функціональних складових економіки (виробничо-технологічної, соціальної, територіальної структури), так і його окремих частин. Розглядають моделі всієї економіки в цілому та її підсистем — секторів, галузей, регіонів, комплексів моделей виробництва, споживання, формування та розподілу прибутків, трудових ресурсів, ціноутворення, фінансових зв'язків тощо.

Згідно із загальною класифікацією математичних моделей вони поділяються на функціональні та структурні, охоплюючи проміжні форми (структурно-функціональні). У дослідженнях на макрорівні найчастіше використовуються структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають взаємозв'язки підсистем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв'язків. Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поводження об'єкта («вихід») впливають, змінюючи «вхід». Прикладом може бути модель поведінки споживачів за умов товарно-грошових відносин. Один і той самий об'єкт може описуватися водночас як структурною, так і функціональною моделлю.

За характером відображення причинно-наслідкових зв'язків розрізняють детерміновані моделі та моделі, що враховують випадковість і невизначеність - стохастичні.

Залежно від урахування часового чинника економіко-математичні моделі поділяються на статичні та динамічні. У статичних моделях усі залежності стосуються одного моменту або періоду часу. Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів у часі.

За тривалістю періоду часу, що розглядається, розрізняють моделі короткострокового (до року), середньострокового (до 5 років), довгострокового (10—15 і більше років) прогнозування та планування. Час в економіко-

математичних моделях може змінюватися неперервно або дискретно. Тому розрізняють неперервні та дискретні моделі.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. У загальному випадку виокремлюють лінійні та нелінійні моделі. Особливо важливим є клас лінійних моделей, найзручніших для аналізу й розрахунків, завдяки чому вони набули великого поширення.

Відмінності між лінійними та нелінійними моделями істотні не лише з математичного, а й з теоретико-економічного погляду. Адже численні залежності в економіці як на макро-, так і на мікрорівні мають принципово нелінійний характер: ефективність використання ресурсів з розширенням виробництва, зміна обладнання, моделі управління запасами тощо. Теорія «лінійної економіки» істотно відрізняється від теорії «нелінійної економіки». Від того, якими — опуклими чи не опуклими — вважаються множини виробничих можливостей підсистем (галузей, підприємств), істотно залежать висновки про можливості поєднання централізованого планування та господарської самостійності економічних підсистем.

За співвідношенням екзогенних і ендогенних змінних, які включаються до моделей, останні поділяють на відкриті і замкнені. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна мати хоча б одну ендогенну змінну. Повністю замкненими (такими, що не містять жодної екзогенної змінної) економіко-математичні моделі бувають надзвичайно рідко. Загалом економіко-математичні моделі різняться за ступенем відкритості.

Макроекономічні моделі поділяють на агреговані та деталізовані. Залежно від того, чи містять ці моделі просторові чинники та умови, чи ні, розрізняють моделі просторові та точкові.

Отже, загальна класифікація моделей охоплює понад десять основних ознак. З розвитком економіко-математичних досліджень проблема класифікації застосовуваних моделей дедалі ускладнюється. Поряд з появою нових типів моделей (особливо мішаних типів) і нових ознак їх класифікації відбувається інтеграція моделей різних типів у складніші модельні конструкції.

Розглянемо основні етапи економіко-математичного моделювання.

Процес моделювання передбачає наявність трьох структурних елементів:

– об’єкта дослідження;

– суб’єкта (дослідник);

– моделі, яка опосередковує відносини між суб’єктом і об’єктом.

Побудова економіко-математичних моделей у загальному випадку складається з розглянутих далі етапів.

1. Постановка економічної проблеми та її якісний аналіз. На цьому етапі потрібно сформулювати сутність проблеми, визначити передумови й висловити припущення. Необхідно виокремити найважливіші властивості об’єкта моделювання, вивчити його структуру, дослідити взаємозв’язки між його елементами, а також хоча б попередньо сформулювати гіпотези, що пояснюють поводження й розвиток об’єкта (динаміку руху), дослідити його зв’язки із зовнішнім середовищем тощо. При цьому складні об’єкти розбиваються на частини (елементи) окремого дослідження: визначаються зв’язки та логічні

співвідношення між ними, їхні кількісні та якісні властивості. Зазначені дії становлять етап системного аналізу задачі, у результаті якого об'єкт подається у вигляді системи.

2. Побудова математичної моделі. Цей етап полягає у формалізації економічної моделі, тобто вираженні її у вигляді конкретних математичних залежностей (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). Процес побудови моделі складається з кількох стадій. Спочатку визначають тип економіко-математичної моделі, вивчають можливості її застосування в розглядуваному конкретному випадку, уточнюють перелік змінних та параметрів, форми зв'язку між ними. Для складних об'єктів доцільно будувати кілька різноаспектних моделей.

3. Математичний аналіз моделі. На цьому етапі суто математичними прийомами досліджують загальні властивості моделей та розв'язків. Важливим моментом є доведення існування розв'язків сформульованої задачі. У процесі аналітичного аналізу з'ясовують кількість розв'язків (єдиний чи неєдиний), визначають змінні та параметри, які можуть входити до розв'язку, а також межі та тенденції їх зміни.

4. Підготовка вихідної інформації. У процесі підготовки інформації використовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики, а також економічної статистики для агрегування, групування даних, оцінювання вірогідності даних тощо.

5. Чисельне моделювання. Цей етап передбачає розробку алгоритмів чисельного розв'язання задачі, підготовку комп'ютерних програм та безпосереднє виконання розрахунків.

6. Аналіз чисельних результатів та їх застосування. На цьому етапі передусім з'ясовується найважливіше питання щодо правильності й повноти результатів моделювання та можливості їх практичного використання, а також досліджуються можливі напрямки подальшого вдосконалення моделі. Тому спершу перевіряють адекватність моделі за тими властивостями, що було взято за найістотніші. Тобто потрібно виконати верифікацію і валідацію моделі, оскільки головна мета моделювання полягає в розв'язуванні практичних задач.

Верифікація моделі – перевірка правильності структури (логіки) моделі.

Валідація моделі – перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному процесу в економіці.

Перелічені етапи економіко-математичного моделювання перебувають у тісному взаємозв'язку, зокрема можуть існувати зворотні зв'язки між етапами. Так, на етапі побудови моделі може з'ясуватися, що постановка задачі суперечлива чи призводить до занадто складної математичної моделі. Тоді вихідну постановку доводиться коригувати.

Найчастіше потреба повернутися до попереднього етапу постає на етапі підготовки вихідної інформації.

Отже, моделювання являє собою циклічний процес. За останнім етапом необхідно переходити до першого й уточнювати постановку задачі згідно зі здобутими результатами, потім – до другого й уточнювати (коригувати) математичний модуль, далі – до третього і т. д.

Для кращого розуміння термінології слід вказати різницю понять моделі

та методу прийняття рішень.

Модель – це все те, що образно представляє якийсь об'єкт чи процес і використовується для аналізу або вивчення цього об'єкту чи процесу. Наприклад: цільова функція – модель якогось економічного процесу.

Метод – це всі ті дії, які при вивченні моделі застосовує людина для досягнення якогось результату.

Методи прийняття рішень різноманітні за своїм змістом, сферами застосування, за рівнем теоретичної розробки, ступеню практичної придатності і ефективності використання в реальних умовах.

Із різноманітних методів прийняття економічних рішень можна виділити найбільш поширені: математичне програмування; теорія ігор; теорія статистичних рішень; теорія масового обслуговування; метод причинно-наслідкового аналізу; використання моделі «дерево рішень».

Припустимо, що нам треба дослідити залежність одного економічного показника (Y) від іншого (X).

Алгоритми побудови моделей

Модель лінійної регресії (лінійне рівняння) є найпоширенішим видом залежності між економічними змінними.

Скористаймося методом найменших квадратів, суть якого полягає у наступному: сума квадратів відхилень ординат точки, що спостерігається (X_i, Y_i) від відповідної ординати точки, що лежить на регресійній прямій, повинна бути найменшою

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2 = \min .$$

Використання 1МНК для оцінки теоретичних параметрів моделі парної регресії приводить до таких систем нормальних рівнянь:

а) **лінійна залежність** $Y = a_0 + a_1 X$.

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} X = \sum_{i=1}^{n} Y \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} X + a_1 \sum_{i=1}^{n} X^2 = \sum_{i=1}^{n} YX \end{cases}$$

Побудоване лінійне рівняння може слугувати початковою точкою в разі складних (суттєво нелінійних) залежностей.

Нелінійні зв'язки, як правило, певними перетвореннями (заміною змінних чи логарифмуванням) зводять до лінійного вигляду або апроксимують (наближують) лінійними функціями.

б) **гіперболічна залежність** $Y = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$. Замінюємо $\frac{1}{x} = x'$ і отримаємо лінійну модель $Y = a_0 + a_1 x'$.

Для оцінки теоретичних параметрів моделі складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x' = \sum_{i=1}^{n} Y \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x' + a_1 \sum_{i=1}^{n} (x')^2 = \sum_{i=1}^{n} Yx' \end{cases}$$

в) **параболічна залежність** $Y = a_0 + a_1 x^2$. Замінюємо $x^2 = x'$ і отримаємо лінійну модель $Y = a_0 + a_1 x'$.

Для оцінки теоретичних параметрів моделі складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x' = \sum_{i=1}^{n} Y \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x' + a_1 \sum_{i=1}^{n} (x')^2 = \sum_{i=1}^{n} Yx' \end{cases}$$

г) **степенева залежність** $Y = a_0 x^{a_1}$.

Логарифмуємо функцію $\ln Y = \ln a_0 + a_1 \cdot \ln X$.

Замінюємо логарифми $\ln Y = Y'$, $\ln X = X'$, $\ln a_0 = a'$.

Одержуємо лінійну модель $\mathbf{Y' = a' + a_1 \cdot X'}$.

Складаємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na' + a_1 \sum_{i=1}^{n} x' = \sum_{i=1}^{n} Y' \\ a' \sum_{i=1}^{n} x' + a_1 \sum_{i=1}^{n} (x')^2 = \sum_{i=1}^{n} Y'x' \end{cases}$$

д) **експоненціальна** $Y = e^{ax+b}$.

Для оцінки теоретичних параметрів зводимо модель до лінійного вигляду:

Логарифмуємо функцію $\ln Y = ax + b$

Замінюємо логарифм $\ln Y = Y'$

Одержуємо лінійну модель $Y' = ax + b$

е) **проста модифікована експоненціальна** $Y = a \cdot e^x + b$

Методом заміни зводимо модель до лінійного вигляду:

$$Y = ae^x + b$$

$$e^x = x'$$

$$Y = ax' + b$$

Моделювання здійснюється на основі вибірки статистичних даних, яку студент отримує з відповідних таблиць.

Лабораторні роботи № 1, 2, 3, 4, 5 студент виконує згідно з завданням та варіантом вихідних даних, який отримує у викладача.

ДОДАТКОВО

Для спрощення проміжних розрахунків використаємо вбудовану в електронні таблиці Microsoft Excel статистичну функцію ЛИНЕЙН. Ця функція застосовує метод найменших квадратів, щоб визначити оцінки параметрів лінійної регресії.

ЛИНЕЙН (відомі_значення_Y; відомі_значення_X; конст; статистика).

Результат – це оцінка параметрів лінійної регресії та регресійна статистика.

Для цього треба:

1) відмітити поле, де буде знаходитись результат розміром (k+1) × 5, або $m_1 \times 5$; $m_1 = k+1$

2) ввійти у "майстер функцій *f* ". У категоріях вибираємо "статистична", а в функціях – ЛИНЕЙН. Вводимо адреси значень Y, X та значення константи і статистики;

3) для того, щоб отримати на екрані результат, натискаємо спершу клавішу **F2**, а потім **Ctrl+Shift+Enter**.

Функція може додатково обчислювати регресійну статистику (рис.1.1).

«Відомі значення Y» — множина значень Y. Якщо масив Y має один стовпець, то кожний стовпець масиву «відомі_значення_X» інтерпретуються як окрема змінна. Якщо масив «відомі_значення_Y» має один рядок, то кожний рядок «відомих значень X» інтерпретується як окрема змінна.

«Відомі_значення_X» — множина значень *X*, що враховує або одну (парна регресія), або кілька змінних (множинна регресія). Якщо «відомі_значення_X» пропустили, то вважається, що це масив {1; 2; 3;...} такого самого розміру, як *n* «відомих_значень Y».

«**Конст**» — логічне значення.

Якщо «конст» має значення «ЛОЖЬ», то α_0 беруть таким, що дорівнює нулю: значення α добирають так, щоб виконувалася рівність *Y=XA* (модель без вільного члена).

Якщо «конст» має значення «ИСТИНА», то α_0 обчислюється традиційно (модель з вільним членом).

«**Статистика**» — логічне значення, яке вказує, чи потрібно обчислювати додаткову статистику за регресією.

Якщо «статистика» має значення «ИСТИНА», то функція ЛИНЕЙН обчислює додаткову регресійну статистику у вигляді масиву (див. рис. 1.1).

a_k	a_{k-1}	…	a_1	a_0
S_{a_k}	$S_{a_{k-1}}$	…	S_{a_1}	S_{a_0}
R^2	σ_u			
F	Ступінь свободи n–m			
$\sum(Y_{розр}-\overline{Y})^2$	$\sum(Y_{факт}-Y_{розр})^2$			

Рис. 1.1. Статистика функції ЛИНЕЙН

де a_j – оцінка параметра a_j, j=1..k ;

a_0 – оцінка вільного члена регресії;

S_{a_i} – стандартна похибка оцінки параметра α_i;

R^2 – коефіцієнт детермінації;

σ_u – стандартна похибка залишків;

F – F-критерій.

$\overline{Y}$ – середнє значення $Y_{факт}$.

Ступінь свободи дорівнює (n – m), де n – кількість спостережень, m – кількість змінних у моделі; це значення необхідне для визначення табличного значення F-критерію.

$\sum(Y_{розр}-\overline{Y})^2$ – сума квадратів відхилення, що пояснюється регресією;

$\sum(Y_{факт}-Y_{розр})^2$ – сума квадратів відхилення, що пояснюється похибкою u.

Якщо статистика має значення «ложь» чи її пропустили, то функція ЛИНЕЙН обчислює лише коефіцієнти α_j та константу α_0.

Лабораторна робота № 1. «Лінійна модель»

Згідно з вибіркою статистичних даних побудувати лінійну модель залежності Y від X виду: $Y = a_0 + a_1 \cdot X$.

Мета роботи:

визначити аналітичну залежність між дослідними даними із застосуванням методу найменших квадратів (знайти параметри моделі);

представити модель на графіку (графічне відображення моделі засновується на побудові лінії тренду в прямокутних координатах Y-X).

Похідні дані для розрахунку моделей лабораторної роботи № 1

Варіант 1

Y	X
12,3	9,6
14,7	8,1
15,8	6,3
16,3	5,5
17,1	4,1
20,9	2,8
21,4	1,6
22,8	0,9
23,9	0,8
24,1	0,4

Варіант 2

Y	X
16,1	12,2
16,3	10
17,8	8,1
17,6	8
18,5	7,6
18,9	7,4
20,1	6,1
24,3	5,3
25,8	2,7
26,7	2,6

Варіант 3

Y	X
12,7	12,4
12,9	10,3
13,3	10,1
14,7	8,4
16,9	6,3
20,1	6,2
23,4	5,4
24,5	5,3
28,4	5
30,7	4,8

Варіант 4

Y	X
15,8	12,3
19,4	12
20,3	6,1
27,8	6,2
29,3	5,1
24,4	4,3
31,3	3,8
32,8	3
32,9	2,7
34,7	2,5

Варіант 5

Y	X
16,9	19,3
17,7	18,7
18,3	8,9
18,4	6,3
19,7	6
20,8	5,5
21,3	4
22,9	2,9
25,4	1,3
26,9	0,7

Варіант 6

Y	X
10,9	12,4
11,3	10,1
12,8	8,4
13,8	6
14,9	7,9
15,6	5,4
18,1	6,1
19,4	3,1
19	3
21,3	2,1

Варіант 7

Y	X
16,3	10,3
16,7	8,1
18,1	6,4
18,9	5
19,3	4,1
20,4	3,3
21,5	3,3
24,6	2,7
27,8	2,1
27,9	0,9

Варіант 8

Y	X
16,7	15,1
17,3	14
18,4	12,4
19,5	9,3
20,3	8,6
21,4	5,1
25,5	3,3
26,9	3,2
27,8	4
30,1	2,1

Варіант 9

Y	X
15,9	6,3
16,1	6
17,4	6,1
18,3	5,5
18,9	5
20,4	4,3
21,3	4
22,8	4
23,4	3,5
25,7	3,1

Варіант 10

Y	X
12,8	6,3
12,9	5,1
13,1	5
14,4	4,2
15,8	3,3
16,3	2,1
17,9	2
18,1	1,9
19,3	1,7
20,4	1,1

Варіант 11

Y	X
10,4	12,7
11,5	11,8
12,7	10,3
13,8	9,1
14,3	9
14,9	8,5
15,1	7,4
16,3	7
17,9	6,3
18,4	5,1

Варіант 12

Y	X
10,7	9,1
11,8	8,6
13,8	8,6
14,9	8
15,1	7,4
16,3	7,1
17,1	6,9
18,7	6,2
18,9	5,3
19,3	4,2

Варіант 13

Y	X
15,6	12,3
15,8	10,1
16,3	8,7
16,9	6,5
20,1	3,1
21,3	2
24,9	2,1
25,8	1,5
26,9	1,4
27,3	0,9

Варіант 14

Y	X
12,3	12,3
12,5	10,1
13,7	8,8
13,9	7,3
14,7	6,9
15,1	5,1
16,3	4
17,4	4,1
18,1	3,2
18,9	3,1

Варіант 15

Y	X
12,3	6,3
12,9	6
13,4	6
14,7	5,8
15,1	5,3
16,9	5,1
17,3	5
18,7	4,1
19,8	3,2
20,1	2,7

Варіант 16

Y	X
10,3	6,7
10,9	6,5
11,7	6
12,8	5,9
13,9	4,1
14,7	4
15,1	3,8
16,9	2,7
21,9	1,9
18,7	0,8

Варіант 17

Y	X
15,1	10,7
15	8,1
15,6	8
15,9	6,7
16,1	6,6
16,3	7
17,8	6,5
17	6
9	5,1
18,4	4,3

Варіант 18

Y	X
12,7	10
12,8	9,1
12	8,7
13,9	8,8
14,1	8,6
15,8	7,1
16,1	6,3
17,3	5,1
18,9	4,2
18,9	2,8

Варіант 19

Y	X
20,8	5,1
21,9	5
21,9	4,9
23,4	4,9
25,7	3,1
26,8	3
27,1	2,8
28,1	2,1
30,3	1,8
31,4	0,9

Варіант 20

Y	X
6,9	10,1
10,3	9,4
12,5	6,5
12,4	5,1
13,7	4
16,8	4,2
19,3	3,1
20,1	2,8
21,7	2
25,8	1,9

Варіант 21

Y	X
19,8	10,5
20,3	9,4
21,4	8,3
22,9	6,1
24,6	5,4
27,8	2,2
29,3	2
30,1	1,9
33,4	0,7
35,8	0,6

Варіант 22

Y	X
5,6	7,9
5,6	7,8
5,8	7,6
5,9	6,1
6,7	6
7,9	5,8
8,3	5,5
8,7	5,4
10,1	4,1
15,4	4

Варіант 23

Y	X
15,6	9,1
15,8	9
16,1	7,1
18,4	7
18	6,8
19,1	6,3
20,3	6,3
21,7	6
29,8	6,1
30,3	5,8

Варіант 24

Y	X
10,7	6,1
10	6
10,9	7
11,5	6,3
11,9	5,8
11	5,7
13	6
13,7	5,4
14,1	5,1
14,8	5

Варіант 25

Y	X
10,1	6,7
10	5,1
10,7	6,9
11,3	6,9
11,8	5,4
12,4	7,1
15,7	6,3
15,8	6,5
16,1	6,1
16	5,8

Варіант 26

Y	X
12,9	3,3
12	3
12,7	3,1
13,4	3,1
14,7	2,8
15,1	2,5
15,8	2,3
16,3	2,1
17,4	2
18,1	1,5

Варіант 27

Y	X
15,4	7,7
15,6	7
16,1	7,9
17,3	7,1
17,5	6,8
18,1	5,3
18,6	5,1
18,9	4,2
20,3	2
21,4	1,9

Варіант 28

Y	X
19,1	7,3
19,3	7
19	7,1
19,4	6,9
20,5	6,5
21,6	5,5
22,8	5,7
23,7	5
24,1	4,1
25,6	3,1

Варіант 29

Y	X
18,1	4,5
18	4
17,6	4,1
18,4	4,6
19,1	3,7
19,9	3,1
20,1	3
20,3	2,8
21,4	2,5
22,5	2

Варіант 30

Y	X
13,1	8,3
13,4	8
13	8,7
12,8	8,1
14,5	7,5
14,8	6,5
15,1	6
15,4	5,9
15,9	5,4
16,3	5,1

Лабораторна робота № 2. «Степенева функція»

Згідно з вибіркою статистичних даних побудувати степеневу модель залежності Y від X виду: $Y = a_1 \cdot X^{a_2}$.

Мета роботи:

визначити аналітичну залежність між дослідними даними із застосуванням методу найменших квадратів (знайти параметри моделі);

представити модель на графіку (графічне відображення моделі засновується на побудові лінії тренду в прямокутних координатах Y-X).

Похідні дані для розрахунку моделей лабораторної роботи № 2

Варіант 1

Y	X
30,4	50,5
31,5	50,7
31,6	50,8
39,7	59,3
38,8	60,1
40,5	70,3
42,7	74
49,9	75,5
50,1	76,6
50,2	77,8
53,3	79,8
55,7	79,9
60,1	81
75,5	90
81,3	93,3

Варіант 2

Y	X
19,3	20,5
19,5	20,7
19,8	21,3
19,9	22,4
21	22,7
22	28
23,1	29,1
24,7	30,3
28,4	31,4
29,3	32
29,5	33
29,9	34,1
30,1	35,6
31,3	37,8
32,4	39,5

Варіант 3

Y	X
68	80,5
68	80,4
68	80,3
68,1	80,1
68,2	78,9
68,3	78,5
68,4	78,2
68,5	78,1
68,6	78
68,7	76,7
68,8	75,6
68,8	74,4
68,9	73,1
69,9	72,8
70,1	70,7

Варіант 4

Y	X
30,5	20,1
28	20,4
27,7	21,9
27,6	28,8
27,6	29,5
27	29,6
25,5	29,8
21,6	30,4
21,3	30,7
21,3	30,9
21,1	35,4
20,9	37,1
20,2	39,5
20,1	40,2
19,9	46,8

Варіант 5

Y	X
30,1	50,3
30,3	49,8
30,4	48,7
30,5	45,5
30,7	44
31,8	42,1
32,1	40,3
33,4	38,4
35,5	35,3
36,6	30,3
30	30,1
28,8	28,3
29,9	27,6
20,1	25,5
20,2	25

Варіант 6

Y	X
60,1	80,3
60,2	80,4
60	81,7
60,1	82,8
60,3	82,9
60,4	85,1
60,5	87,1
61,6	88,3
62,7	89,4
63,8	90,5
64,7	91,6
65,5	92
66,7	92,3
68,1	93,7
69,7	94,5

Варіант 7

Y	X
82,3	99,9
82,5	98,7
88,6	97,6
89	96,6
89	95,5
89	94
89,4	94
89,5	93,5
89,7	93,1
90,1	92
90,2	91
90,3	91
92,1	90,3
92,3	90,1
93,3	90

Варіант 8

Y	X
19,1	20,5
19,2	20,7
19,3	21,3
20	22,7
20,1	22,4
21	22,5
21,1	23
22	25,1
23	24,1
23	25,6
24	27,1
24,4	27,9
25,5	28,1
26,1	29,3
27,3	29,5

Варіант 9

Y	X
44,1	50,5
44	50,6
43,9	50,7
43,8	50,8
43,7	51,1
43,6	52,2
42	53,4
41,1	55,5
40	56
40	57
40	60,1
39,8	62
39,7	64
39,6	65,5
39,6	66,6

Варіант 10

Y	X
30,5	46,6
28	40,5
27,7	39,1
27,6	37,1
27	35,5
26,6	30,9
25,5	30,7
22,4	30,1
21,6	29,7
21,5	29,4
21,3	29,3
20,1	28,8
20,1	21,7
20	20,5
19,7	20,3

Варіант 11

Y	X
65,5	70,6
60	70,7
61	70,8
61,8	70,9
62,1	72,3
57,8	72,4
55,2	72,5
43,9	72,9
42,5	80,1
40	85,5
38,8	87
35,9	88,1
32,4	89,3
31,2	90,1
30,7	90,2

Варіант 12

Y	X
49	59,1
48,8	58
47,7	55,7
44,3	54
42,7	50,2
41,7	50,1
39,3	49,3
38,8	48,1
30,7	47,7
29,3	46,7
29,1	44,5
28,3	41,3
27,4	30,9
26,5	30,8
25,5	30,7

Варіант 13

Y	X
44	50,3
45	50,7
45,1	51,3
45,2	54
45,4	55,1
45,5	56,3
45,5	57,1
46	58,3
46,1	59
46,7	59,1
47,1	59,3
47,8	60,3
47,9	61,7
48,1	62
49	63

Варіант 14

Y	X
61,7	88
60,3	81,7
61	89,1
61,8	89,4
60,1	80,5
59,8	80,3
62,3	90,1
63,4	90,3
63,9	91,7
64,5	91,9
65,6	95
66,7	96,1
67,8	97,1
68,8	97,8
69,9	99,1

Варіант 15

Y	X
23	55
24,1	50,1
24,1	48,9
24,3	47
24,5	45,5
24,7	40,5
24,8	39,9
24,9	39,1
25,1	37
25,3	36
25,6	34
25,7	33,1
25,8	31,3
26	30
27	30,9

Варіант 16

Y	X
30,1	40,1
29,4	42,3
31,3	44,1
30	45,8
28,3	49,7
27,8	50,3
32,7	55,8
33,8	56,9
34,7	60,3
35,9	61,9
38,1	68,8
44,1	70,4
45,3	71,7
48,8	78,8
49,1	79,3

Варіант 17

Y	X
31	39,7
28,8	41,6
31,3	42,4
32,4	43,5
27,9	46,6
26,3	47,7
33,7	48,9
35,8	50,1
39,6	52,3
41	55
41,2	57,9
42,3	60,1
43,3	64,3
45,6	65,9
47,8	66,7

Варіант 18

Y	X
30,4	64,3
35,5	68,7
37,8	70,1
38,9	75,5
40,1	79
47,7	80,3
48,9	81,8
49,9	82,9
50,1	84
52,3	85,1
54	86,9
55,6	90,3
57,8	91,4
59,3	92,2
60,1	93,3

Варіант 19

Y	X
40,3	67,1
45,7	70,4
46,8	80,1
47,9	85,5
48,8	86,6
49,4	86,7
50,1	88
50,9	89,1
60,3	90,3
65,3	91,4
66,4	92,5
69,5	93,6
70,5	94,7
70,9	98,1
72	98,2

Варіант 20

Y	X
26,3	59,6
27,8	60,3
29	65,6
30,1	66,8
31,2	70,1
33,4	75
35	76,3
36	77,9
37,1	78,4
38,4	79,3
39,1	80,1
40,5	81,5
46,6	86,6
47,8	90,4
50,1	95,6

Варіант 21

Y	X
30,1	50,5
31,2	50,7
31,3	50,8
39,1	59,2
38,5	60,1
40,1	70,5
42,8	74
49,9	75,5
50,1	76,5
50,2	77,7
53,3	79,8
55,1	79,9
60,1	81
75,3	90
81,3	93,5

Варіант 22

Y	X
19,1	20,2
19,4	20,7
19,8	21,5
19,9	22,4
21,9	22,7
22,7	28
23,1	29,1
24,6	30,3
27,4	31,4
28,3	32,4
29,5	33,5
29,9	34,2
30,1	35,6
31,3	37,8
32,4	39

Варіант 23

Y	X
35,1	22,6
34,5	22,9
34,9	23,1
34,9	26,5
36,8	27,7
37,7	29,4
38,2	29,5
44,3	30,8
48,1	31,1
51,5	31,2
52,5	31,6
52,3	31,8
52,5	32
53,6	34,4
55,8	35,4

Варіант 24

Y	X
25,1	25,2
25,2	25,5
28,8	27,6
29,9	28,9
30	30,1
30,4	30,8
30,5	35,3
30,6	38,4
30,7	40,3
30,9	42,7
31,8	44
32,1	45,5
33,4	48,7
35,5	49,8
36,6	50

Варіант 25

Y	X
81,3	93,3
75,5	90
60,1	81
55,7	79,9
53,3	79,8
50,2	77,8
50,1	76,6
49,9	75,5
42,7	74
40,5	70,3
39,7	59,3
38,8	60,1
31,6	50,8
31,5	50,7
30,4	50,5

Варіант 26

Y	X
32,4	39,5
31,3	37,8
30,1	35,6
29,9	34,1
29,5	33
29,3	32
28,4	31,4
24,7	30,3
23,1	29,1
22	28
19,9	22,4
21	22,7
19,8	21,3
19,5	20,7
19,3	20,5

Варіант 27

Y	X
68	80,5
68	80,4
68	80,3
68,1	80,1
68,2	78,9
68,3	78,5
68,4	78,2
68,5	78,1
68,6	78
68,7	76,7
68,8	74,4
68,8	75,6
68,9	73,1
69,9	72,8
70,1	70,7

Варіант 28

Y	X
30,5	46,8
27,6	40,2
25,5	39,5
27,6	37,1
27,7	35,4
28	30,9
27	30,7
21,6	30,4
21,3	29,8
21,3	29,6
20,9	28,8
21,1	29,5
20,2	21,9
20,1	20,4
19,9	20,1

Варіант 29

Y	X
20,1	25
20,2	25,5
28,8	27,6
29,9	28,3
30	30,1
30,1	30,3
30,3	35,3
30,4	38,4
30,5	40,3
30,7	42,1
31,8	44
32,1	45,5
33,4	48,7
35,5	49,8
36,6	50,3

Варіант 30

Y	X
69,7	94,5
68,1	93,7
66,7	92,3
65,5	92
64,7	91,6
63,8	90,5
62,7	89,4
61,6	88,3
60,5	87,1
60,4	85,1
60,1	82,8
60,3	82,9
60	81,7
60,2	80,4
60,1	80,3

Лабораторна робота № 3. «Параболічна функція»

Згідно з вибіркою статистичних даних побудувати параболічну модель залежності Y від X виду: $Y = a_0 + a_1 \cdot X^2$.

Мета роботи:

визначити аналітичну залежність між дослідними даними із застосуванням методу найменших квадратів (знайти параметри моделі);

представити модель на графіку (графічне відображення моделі засновується на побудові лінії тренду в прямокутних координатах Y-X).

Похідні дані для розрахунку моделей лабораторної роботи № 3

Варіант 1

Y	X
27,75	1
28,37	2
34,45	3
41,32	4
48,50	5
52,45	6
55,55	7
62,25	8
73,01	9
76,42	10
86,32	11
88,45	12
95,50	13
104,00	14
113,42	15

Варіант 2

Y	X
25	1
25	2
30	3
32	4
33,4	5
35	6
42,80	7
46,45	8
58,32	9
71,32	10
85,31	11
94,25	12
97,85	13
101,85	14
110,00	15

Варіант 3

Y	X
86,82	1
85,42	2
81,45	3
77	4
71	5
64	6
60	7
51	8
46,32	9
38,25	10
36,3	11
32,55	12
26,65	13
19,87	14
15,22	15

Варіант 4

Y	X
14,30	1
15,15	2
16,63	3
18,87	4
21,42	5
23,82	6
27,67	7
29,45	8
32,27	9
36,07	10
44,20	11
47,57	12
50,58	13
57,30	14
67,37	15

Варіант 5

Y	X
28,77	1
28,60	2
34,50	3
41,57	4
49,10	5
52,87	6
56,20	7
62,35	8
73,76	9
76,60	10
87,64	11
88,45	12
96,43	13
104,07	14
113,43	15

Варіант 6

Y	X
15,23	1
15,22	2
16,64	3
19,59	4
21,59	5
24,82	6
27,77	7
31,00	8
32,37	9
36,17	10
44,38	11
47,64	12
52,11	13
57,57	14
68,10	15

Варіант 7

Y	X
7,78	1
7,17	2
17,30	3
19,70	4
20,90	5
24,42	6
24,67	7
26,35	8
26,60	9
27,07	10
27,90	11
28,39	12
30,28	13
30,8	14
34,8	15

Варіант 8

Y	X
26,54	1
27,05	2
33,08	3
39,10	4
46,10	5
49,10	6
52,10	7
58,10	8
68,12	9
71,12	10
80,12	11
82,13	12
89,13	13
97,15	14
106,19	15

Варіант 9

Y	X
19,15	1
19,88	2
20,88	3
22,82	4
25,57	5
28	6
31,9	7
33,77	8
35,8	9
39,87	10
47,17	11
50,57	12
54,22	13
60,22	14
70,4	15

Варіант 10

Y	X
15	1
16	2
18	3
20	4
20	5
30	6
35	7
40	8
46	9
48	10
50	11
66	12
70	13
90	14
103	15

Лабораторна робота № 4. «Гіперболічна функція»

Згідно з вибіркою статистичних даних побудувати гіперболічну модель залежності Y від X виду: $Y = a_0 + a_1 \frac{1}{x}$

Мета роботи:

визначити аналітичну залежність між дослідними даними із застосуванням методу найменших квадратів (знайти параметри моделі);

представити модель на графіку (графічне відображення моделі засновується на побудові лінії тренду в прямокутних координатах Y-X).

Похідні дані для розрахунку моделей лабораторної роботи № 4

Варіант 1

Y	X
20,60	1
19,55	2
16,35	3
14,03	4
12,65	5
12,38	6
11,46	7
11,58	8
11,43	9
12,19	10
11,19	11
10,90	12
10,79	13
11,27	14
10,45	15

Варіант 2

Y	X
25,85	1
22,28	2
19,96	3
17,78	4
15,33	5
14,39	6
12,89	7
12,70	8
12,49	9
12,37	10
12,25	11
11,95	12
11,69	13
13,00	14
13,87	15

Варіант 3

Y	X
26,79	1
24,59	2
22,20	3
19,89	4
18,83	5
18,07	6
17,79	7
16,37	8
16,25	9
15,75	10
15,37	11
15,15	12
14,90	13
14,67	14
13,79	15

Варіант 4

Y	X
134,47	1
119,25	2
112,17	3
104,09	4
90,03	5
68,75	6
56,18	7
47,40	8
45,52	9
38,47	10
33,90	11
33,30	12
29,57	13
30,10	14
29,37	15

Варіант 5

Y	X
22,11	1
20,12	2
17,25	3
14,81	4
13,57	5
14,30	6
12,40	7
11,70	8
11,56	9
12,31	10
11,31	11
11,75	12
10,92	13
12,07	14
10,72	15

Варіант 6

Y	X
33,12	1
29,63	2
29,39	3
28,40	4
27,41	5
27,28	6
27,10	7
26,97	8
26,46	9
25,27	10
24,66	11
24,33	12
23,96	13
23,95	14
23,36	15

Варіант 7

Y	X
135,00	1
119,52	2
112,27	3
104,19	4
90,68	5
68,75	6
56,46	7
47,90	8
45,92	9
39,07	10
34,25	11
33,53	12
30,41	13
30,83	14
29,52	15

Варіант 8

Y	X
103	1
90	2
70	3
66	4
50	5
48	6
46	7
40	8
30	9
35	10
20	11
18	12
16	13
20	14
15	15

Варіант 9

Y	X
20,88	1
19,53	2
15,60	3
12,32	4
10,52	5
9,51	6
7,70	7
7,47	8
7,17	9
6,95	10
5,83	11
4,69	12
4,38	13
4,18	14
3,28	15

Варіант 10

Y	X
120	1
101	2
76	3
72	4
68	5
60	6
48	7
45	8
42	9
40	10
37	11
37	12
32	13
30	14
31	15

Лабораторна робота № 5. «Експоненціальна модель»

Згідно з вибіркою статистичних даних побудувати експоненціальну модель залежності Y від X виду: $Y = e^{ax+b}$

Мета роботи:

визначити аналітичну залежність між дослідними даними із застосуванням методу найменших квадратів (знайти параметри моделі);

представити модель на графіку (графічне відображення моделі засновується на побудові лінії тренду в прямокутних координатах Y-X).

Похідні дані для розрахунку моделей лабораторної роботи № 5

Варіант 1

Y	X
1,40	120,58
1,54	109,00
3,11	101,02
2,37	90,23
3,00	83,05
3,28	40,25
3,52	32,60
4,62	32,42
4,04	30,65
4,32	28,10
4,83	26,75
5,32	22,18
5,72	13,32
6,75	12,00
6,53	11,93

Варіант 2

Y	X
14,30	134,47
15,15	119,25
16,63	112,17
18,87	104,09
21,42	90,03
23,82	68,75
27,67	56,18
29,45	47,40
32,27	45,52
36,07	38,47
44,20	33,90
47,57	33,30
50,58	29,57
57,30	30,10
67,37	29,37

Варіант 3

Y	X
120,00	1,40
100,00	2,51
79,42	2,29
75,60	2,98
72,25	3,78
69,05	4,60
67,23	4,84
44,02	6,41
38,00	6,27
27,58	7,40
24,42	7,68
21,50	8,52
14,05	10,12
8,13	9,74
2,40	9,42

Варіант 4

Y	X
17,78	1,60
17,70	1,84
17,12	2,77
14,93	3,41
14,55	3,58
14,15	3,60
14,10	4,12
9,02	6,24
7,85	6,33
6,15	6,52
4,90	6,72
4,28	6,82
4,02	7,92
1,40	8,43
1,03	8,95

Варіант 5

Y	X
120,58	1,40
109,00	1,54
101,02	3,11
90,23	3,37
83,05	3,00
40,25	3,28
32,60	3,52
32,42	4,62
30,65	4,04
28,10	4,32
26,75	4,83
22,18	5,32
13,32	5,72
12,00	6,75
11,93	6,53

Варіант 6

Y	X
2,10	7,23
2,50	6,87
3,10	6,91
3,50	8,12
3,80	7,87
4,60	8,90
8,40	8,30
10,90	9,85
13,00	9,30
15,50	9,50
18,00	9,80
22,00	10,00
25,00	11,80
28,00	12,20
30,00	12,80

Варіант 7

Y	X
28,77	22,11
28,60	20,12
34,50	17,25
41,57	14,81
49,10	13,57
52,87	14,30
56,20	12,40
62,35	11,70
73,76	11,56
76,60	12,31
87,64	11,31
88,45	11,75
96,43	10,92
104,07	12,07
113,43	10,72

Варіант 8

Y	X
103,35	23,36
103,22	23,95
99,30	23,96
96,57	24,33
87,81	24,66
74,77	25,27
61,87	26,46
50,70	26,97
47,81	27,10
40,42	27,28
39,74	27,41
36,45	28,40
26,10	29,39
22,72	29,63
19,42	33,12

Варіант 9

Y	X
0,65	10,47
1,07	11,25
1,45	12,17
2,32	14,09
2,86	15,03
3,45	15,15
3,55	15,28
4,25	15,40
5,01	15,52
5,42	16,37
6,32	16,50
6,45	17,30
6,50	17,57
7,00	18,10
7,42	18,37

Варіант 10

Y	X
18,20	1,68
18,28	1,94
18,12	3,45
15,95	4,28
14,78	4,17
14,20	4,48
14,35	4,90
9,62	7,64
8,27	8,16
6,34	7,46
6,25	6,98
5,03	6,95
4,20	8,04
2,72	9,07
1,03	9,28

Контрольні запитання

1. Дати поняття функції в економічних дослідженнях.
2. Способи завдання функцій.
3. Типи функцій та їх характері точки.
4. Які види рівнянь регресії описують економічні процеси?
5. Функції однієї змінної в задачах з економіки.
6. Основні етапи побудови лінійних моделей.
7. Класифікація економіко-математичних методів і моделей.
8. Етапи моделювання економічних процесів.
9. Записати рівняння парної лінійної регресі.
10. Записати рівняння парної регресії при параболічній залежності.
11. Записати рівняння парної регресії при гіперболічній залежності.
12. Показати на графіку залежності, які використовують в економіці.

Література: [1, с. 169-193; 5, с. 538-598; 9, с. 179-200; 10, с. 138-150; 12, с. 66-73].

Тема 2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна модель задачі лінійного програмування повинна відповідати наступним вимогам:

1) Модель повинна мати лінійну цільову функцію, екстремальне значення якої знаходиться у процесі рішення задачі.

2) Математичні рівняння та тотожності, які входять до складу моделі повинні теж бути лінійними (тобто невідомі змінні, які входять в модель можуть мати тільки першу ступінь).

3) Змінні, які входять в модель не можуть бути від'ємними.

Модель записується у такому виді:

I. Цільова функція (критерій оптимальності)

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_j x_j \rightarrow \max(\min) \qquad (2.1)$$

або: $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad j = 1, ..., n$

c_j – коефіцієнти при невідомих шуканих змінних x_j в цільовій функції (оптові ціни за одиницю продукції; собівартість одиниці продукції; питомий прибуток окремих видів продукції; питома рентабельність окремих видів продукції).

x_j – шукані змінні більшою частиною означають обсяги випуску j виду продукції;

j – види продукції.

II. Система обмежень.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3j}x_j + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2.2.)$$

$$i = 1,\ldots, m$$

$$j = 1,\ldots, n$$

$$m \succ n$$

або: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \begin{Bmatrix} \ge \\ \le \\ = \end{Bmatrix} b_i$

a_{ij} – коефіцієнти при невідомих змінних x_j в рівняннях та тотожностях (можуть бути: норми витрат сировини, матеріалів на одиницю продукції; оптові ціни за одиницю продукції та ін.);

x_j – невідомі змінні;

b_j – рівень обмежень у рівняннях та тотожностях (рівень ресурсів: матеріальних, сировинних, трудових і т.д.).

III. Умови невід'ємності змінних

$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

На базі наведеного математичного опису можна проілюструвати суть цієї моделі так: необхідно визначити значення n невід'ємних змінних x_j, які задовольняють обмеженням 2.2 та забезпечують екстремальне значення (максимальне або мінімальне) цільової функції, яка виражена рівнянням 2.1.

До методів вирішення задач ЛП відносяться **симплекс-метод, графічний метод.**

Симплекс-метод є аналітичним методом знаходження рішення задач ЛП.

Як правило, задачу зводять до канонічної форми. Вважають, що задача лінійного програмування записана в канонічній формі, якщо вона має вигляд

$$
\begin{aligned}
&z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0 \to \max(\min)\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\\
&x_1 \ge 0, \ \ldots, \ x_n \ge 0.
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Щоб перевести задачу лінійного програмування з загальної форми (2.1–2.2) до канонічної форми (2.3) необхідно зробити такі кроки.

1-й крок. До кожної лівої частини нерівностей (2.2) додаємо нову невід'ємну невідому змінну x_{n+i} ($i = 1,2,\ldots,l-k$), яка дорівнює:

$$x_{n+i} = b_{k+i} - (a_{k+i,1}x_1 + a_{k+i,2}x_2 + \ldots + a_{k+i,n}x_n)$$

або:

$$x_{n+i} = (a_{k+i,1}x_1 + a_{k+i,2}x_2 + \ldots + a_{k+i,n}x_n) - b_{k+i}$$

Тоді група нерівностей (2.2) перетвориться на рівняння.

Введені нові змінні, $x_{n+i}, \ldots, x_{m-k}$ будемо вважати базовими, а змінні $x_1, \ldots, x_n$ – вільними.

Дістаємо однорідну систему основних обмежень задачі:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k,\\
&a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n + x_{n+1} = b_{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n + x_{n+l-k} = b_l,\\
&a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \ldots + a_{l+1,n}x_n - x_{n+l-k+1} = b_{l+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m-k} = b_m.
\end{aligned}
$$

2-й крок полягає у зведенні до однорідної системи обмежень на знак. Умови недодатності легко перетворюються в умови невід'ємності за допомогою заміни змінних

$$x'_j = -x_j \ge 0 \qquad (j = r+1, \ldots, s)$$

Змінну, на знак якої не накладено обмежень, подають у вигляді різниці двох невід'ємних змінних:

$$x_j = x''_j - x'_j, \quad \text{де} \quad x''_j \ge 0; \ \ x'_j \ge 0 \ \ (j = s+1, t)$$

Ранг сумісної системи обмежень (1.3) r можна вважати таким, що дорівнює

m, оскільки в іншому разі частину, а саме $m - r = k$ рівнянь треба було б відкинути, бо вони були б лінійними комбінаціями r базових рівнянь. Однак на практиці інколи такі зайві рівняння можуть включати в систему обмежень на стадії формування реальної задачі. Такі обмеження називають *неістотними* і їх відкидають, що звичайно відбувається при побудові довільного базового розв'язку системи рівнянь. Отже, знайти множину планів задачі – означає знайти множину невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь.

Означення. Задачу лінійного програмування вважають записаною у *канонічній формі,* якщо вона задовольняє такі умови:

1. Система обмежень зведена до системи рівнянь виду (2.3).

2. Система рівнянь зображена в такому вигляді, де кожна базова невідома входить тільки в одне рівняння системи з коефіцієнтом рівним одиниці, при чому немає рівнянь, в які не входила хоча б одна базова невідома. Якщо деякі рівняння системи поміняти місцями так, щоб нумерація базових невідомих була строго зростаючою, то базовий мінор в цьому випадку складає одиничну матрицю.

3. Вільні члени системи обмежень невід'ємні;

4. Оптимізуюча форма залежить тільки від вільних невідомих.

Отже, для того, щоб задачу лінійного програмування можна було розв'язувати симплексним методом потрібно **загальну форму** (2.1–2.2) **звести до канонічної форми**. Іншими словами її потрібно певним способом записати в такій формі, щоб система рівнянь була з базисом.

$$z = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k \to \max(\min) \tag{2.4}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + x_{k+1} = \beta_1,$$

.....

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sk}x_k + x_{k+s} = \beta_s, \tag{2.5}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ \ldots, x_n \geq 0.$$

Для того, щоби базовий план системи обмежень (2.4) був *опорним,* необхідно і достатньо, щоб всі вільні члени (2.5) були невід'ємні. Отже, для зведення задачі до канонічної форми потрібно так підібрати базові невідомі, щоб у загальному розв'язку системи обмежень не було від'ємних вільних членів.

Приклад.

Для виготовлення двох видів продукції **А і В** використовують три види сировини: **I, II та III.**

На виробництво одинці продукції **А** знадобиться витратити:

сировини I виду – 15 кг,

сировини II виду – 12 кг,

сировини III виду – 3 кг.

На виробництво одинці продукції **В** знадобиться витратити:

сировини I виду – 2 кг,

сировини II виду – 6 кг,

сировини III виду – 12 кг.

Запаси сировини:

I виду – 300 кг,

II виду – 306 кг,

III виду – 360 кг

Прибуток від реалізації одиниці продукції виду **A** становить **9** грн., виду **B** – **6** грн.

Скласти план виробництва продукції, який забезпечить максимальний прибуток від реалізації при наявності даних запасів сировини.

Розв'язування

Позначимо кількість виготовленої продукції першого виду **A** через x_1, другого – x_2. Враховуючи витрати сировини **I, II та III** виду на виготовлення одиниці продукції видів **A** та **B,** а також обмежені запаси сировини, запишемо систему обмежень (6.1). Прибуток, одержаний з виготовлення продукції у вигляді функції мети (6.2).

$$\begin{aligned} &15x_1 + 2x_2 \le 300 \\ &12x_1 + 6x_2 \le 306 \\ &3x_1 + 12x_2 \le 360 \\ &x_1 \ge 0 \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (2.6)$$

$$f = 9x_1 + 6x_2 \to \max \qquad (2.7)$$

Зведемо задачу лінійного програмування (2.6, 2.7) до канонічної форми додавши невідомі x_3, x_4 та x_5 до лівої сторони двох нерівностей відповідно:

$$\begin{aligned} &15x_1 + 2x_2 + x_3 = 300 \\ &12x_1 + 6x_2 + x_4 = 306 \\ &3x_1 + 12x_2 + x_5 = 360 \\ &x_1 \ge 0 \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (2.8)$$

$$\max f = -\min F = 9x_1 + 6x_2;$$

$$\min F = -9x_1 - 6x_2.$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса-Джордана, тому запишемо систему обмежень (2.8) у вигляді початкової розрахункової таблиці, яку назвемо **ітерацією 1**.

Для знаходження початкового базового плану розділимо змінні на дві групи – базові і вільні. Для вибору базових змінних доцільно скористатися таким правилом: в якості *базових змінних* ітерації симплекс-таблиці необхідно вибрати такі змінні (їх кількість визначається числом основних обмежень), кожна з яких тільки раз входить у рівняння основних обмежень. Решту змінних будемо вважати вільними.

Запишемо цільову форму f у вигляді рівняння

$$f - 9x_1 - 6x_2 = 0$$

Таблиця заповнюється формально за вибраною канонічною формою.

1. Заповнюємо базові стовпчики: на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставимо 1, а в усіх інших клітинках будуть нулі.

2. В інших рядках виписуємо коефіцієнти, що стоять біля відповідних невідомих. Нульовий рядок відповідає оптимізуючій формі і служить для визначення ступеня оптимальності опорного плану.

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ітерація 1

f	0	0	–9	–6	0	0	0
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	1	300	15	2	1	0	0
x_4	2	306	12	6	0	1	0
x_5	3	360	3	12	0	0	1

Критерій оптимальності. Якщо задача максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком хіба що стовпчика "опорний розв'язок (план)"), то опорний план є оптимальним (при мінімізації задачі для оптимальності плану достатньо відсутності додатних чисел у нульовому рядку, за винятком, можливо, опорного розв'язку).

Коефіцієнт рядка "0" можна інтерпретувати як приріст функції f при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним – якщо коефіцієнт додатний.

В нашому випадку є два від'ємні числа (–9), (–6), беремо найбільше за модулем від'ємне число (–9) (при мінімізації задачі – найбільше додатне), тоді стовпчик "x_1" будемо називати ключовим стовпчиком.

Для вибору *ключового елемента* складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика "опорний розв'язок") до відповідних додатних чисел ключового стовпчика (усі інші відношення будемо вважати рівними нескінченності):

$$\min\left\{\frac{300}{15};\frac{306}{12};\frac{360}{3}\right\} = \{20;25.5;120\} = 20\,.$$

Перше відношення менше, тому число (15) першого рядка буде ключовим елементом. Ключовий елемент в таблиці позначаємо рамкою і переходимо до другої ітерації.

Ітерація 2

f	0	180	0	$-\frac{24}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	20	1	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0
x_4	2	66	0	$\frac{22}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0
x_5	3	300	0	$\frac{58}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1

Послідовність заповнення другої та наступних ітерацій така (використовуємо метод Гаусса-Жордана):

1. Замість базової невідомої x_3 (ключовий рядок), вводимо нову базову невідому x_1 (невідому ключового стовпчика),
2. Формально заповнюємо базові стовпчики (пункт 1 ітерації 1).
3. Ключовий рядок одержуємо від ділення його елементів попередньої ітерації на ключовий елемент.
4. Усі інші комірки ітерації заповнюємо за правилом прямокутника:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{qs} - a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}, \qquad b'_{ij} = \frac{b_j a_{qs} - a_{is}b_q}{a_{qs}}, \tag{2.9}$$

де a_{ij}', b_i' відповідно шукані елементи нової ітерації, а a_{ij}, b_i – попередньої, a_{qs} – ключовий елемент.

Рядок 0: $\frac{0\cdot(15)-300\cdot(-9)}{15}=180$; $\frac{-6\cdot15-(-9)\cdot2}{15}=-\frac{24}{5}$; $\frac{0\cdot15-(-9)\cdot1}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

Рядок 2: $\frac{306\cdot15-12\cdot300}{15}=66$; $\frac{6\cdot15-12\cdot2}{15}=\frac{22}{5}$; $\frac{0\cdot15-12\cdot1}{15}=-\frac{4}{5}$; $\frac{1\cdot15-12\cdot0}{15}=1$.

Рядок 3: $\frac{360\cdot15-3\cdot300}{15}=300$; $\frac{12\cdot15-3\cdot2}{15}=\frac{58}{5}$; $\frac{0\cdot15-3\cdot1}{15}=\frac{-3}{15}=-\frac{1}{5}$;

$\frac{1\cdot15-3\cdot0}{15}=1$.

Після заповнення таблиці 2-ої ітерації перевіряємо її опорний план на оптимальність. Бачимо, що потрібно перейти до наступного опорного плану, оскільки в нульовому рядку стовпчика "x_2" знаходиться від'ємне число ($-\frac{24}{5}$).

$$\min\left\{\frac{20}{\frac{2}{15}};\frac{66}{\frac{22}{5}};\frac{300}{\frac{58}{5}}\right\}=\{150;15;25,8\}=15.$$

За ключовий елемент слід взяти число "$\frac{22}{5}$".

Ітерація 3

f	0	252	0	0	$-\frac{3}{11}$	$\frac{12}{11}$	0
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	18	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{33}$	0
x_2	2	15	0	1	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{22}$	0
x_5	3	126	0	0	$\frac{21}{11}$	$-\frac{29}{11}$	1

В **ітерації 3** замість базової змінної x_4 тепер буде нова базова x_2, ключовим буде рядок 2. Над таблицею виконуємо ті ж операції, що й під час другої ітерації.

Після III-ої ітерації перевіряємо опорний план на оптимальність. Бачимо, що потрібно перейти до наступного опорного плану, оскільки в нульовому рядку стовпчика "x_3" знаходиться від'ємне число $(-\frac{3}{11})$.

$$\min\left\{\frac{18}{\frac{1}{11}};\frac{15}{-\frac{2}{11}};\frac{126}{\frac{21}{11}}\right\}=\{198;82{,}5;66\}=66\,.$$

За ключовий елемент слід взяти число "$\frac{21}{11}$".

Ітерація 4

f	0	270	0	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	12	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{21}$
x_2	2	27	0	1	0	$-\frac{1}{42}$	$\frac{2}{21}$
x_3	3	66	0	0	1	$-\frac{29}{21}$	$\frac{11}{21}$

В рядку 0 вже немає від'ємних чисел, тому опорний план останньої таблиці оптимальний і виписуємо його із стовпчика "опорний розв'язок"

$$x_1=12,\quad x_2=27,\quad x_3=66,\quad x_4=0,\quad x_5=0,\quad f_{\max}=270.$$

*__Зауваження 1.__ Кожній таблиці відповідає своя канонічна форма стандартного запису. Так, наприклад, за останньою таблицею можна записати таку канонічну форму:

$$z = 270 - \frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{21}x_5 = 12 \\ x_2 - \frac{1}{42}x_4 + \frac{2}{21}x_5 = 27 \\ x_3 - \frac{29}{11}x_4 + \frac{11}{21}x_5 = 66 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

*__Зауваження 2.__ Контролювати правильність обчислення опорних планів і оптимального значення можна за значенням функції мети:

$$f = 9 \cdot 12 + 6 \cdot 27 = 270$$

*__Зауваження 3.__ При розв'язуванні задачі для зручності ітерації послідовно записують одну під одною.

Економічна інтерпретація математичного розв'язку.

Аналіз системи обмежень і цільової функції показує , що подальше збільшення прибутку неможливе, розв'язок $\vec{x}^{(4)} = (270\ ;12\ ;27\ ;66\ ;0)$ є оптимальний, найбільший прибуток при даних запасах сировини становить $f_{\max}$ =270 одиниць, а об'єми виготовленої продукції видів **A_1 і A_2** дорівнюють відповідно 12 та 27 одиниць.

Лабораторна робота № 6
«Задача оптимального використання ресурсів»

Задача. Для виготовлення двох видів продукції A_1 і A_2 використовують три види сировини **I, II і III**. Запаси сировини, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції задано у таблиці.

Знайти розмір максимального прибутку, який можна одержати за наявності даних запасів сировини.

Варіанти асортименту обрати з таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

N°	Затрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	I		II		III						
	A_1	A_2	A_1	A_2	A_1	A_2	I	II	III	$П_1$	$П_2$
1.	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2.	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3.	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4.	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5.	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6.	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18
7.	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7
8.	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
9.	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6
10.	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15
11.	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10
12.	2	3	2	2	3	2	. 80	58	75	10	12
13.	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	30
14.	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20
15.	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21
16.	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9
17.	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7
18.	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
19.	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10
20.	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18
21.	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18
22.	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10
23.	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
24.	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12
25.	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22
26.	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
27.	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	30
28.	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
29.	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
30.	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8

Контрольні запитання

1. Поняття про математичне програмування та лінійне програмування.
2. Загальна модель задачі лінійного програмування.
3. Принципи побудови оптимізаційних моделей.

4. Задачі оптимізації виробничої програми. Цільова функція, обмеження на зміні, умови невід'ємності змінних.

5. Який склад математичної моделі задачі лінійного програмування?

6. Методи знаходження розв'язків задач лінійного програмування.

7. Поясніть принципову суть симплекс-методу.

8. Записати математичну модель загальної задачі лінійного програмування.

9. Сформулювати задачу оптимального використання ресурсів.

10. Що визначає цільова функція в задачах оптимального використання ресурсів?

11. Обмеження на зміни в задачах оптимального використання ресурсів?

12. Умови невід'ємності змінних в задачах оптимального використання ресурсів?

13. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального використання ресурсів.

14. Які критерії оптимальності використовуються в економічних моделях?

15. Навести приклад економічної інтерпретації двійчастої задачі.

Література [1, с. 354-358, 400-430; 2, с. 21-32; 3, с.101-107, 141-147; 5, с. 47-97; 6, с. 47-45, 66-79; 7, с. 15-23, 24, 45-54; 9, с. 45-48,59; 13, с. 31-39, 41-47].

Тема 3. МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ НА РІВНІ ПІДПРИЄМСТВА

Однією з основних задач планування виробництва є розрахунок оптимального плану випуску продукції з урахуванням основних факторів, які впливають на його обсяг.

Вирішення оптимізаційної задачі розподіляється на три етапи: побудування економіко-математичної моделі; находження оптимального рішення задачі; аналіз результатів рішення.

Асортиментні задачі на кондитерських фабриках являють собою групу задач, в яких визначають виробничу програму фабрики з урахуванням впливу на підприємства внутрішніх факторів (можливостей обладнання, лімітів сировини, трудових чинників) та деяких зовнішніх вимог (по товарній продукції в цілому чи окремих її асортиментних груп та видів, середньої ціни асортименту, який випускається).

В задачі оптимізуємо виробничу програму підприємства по критерію максимального прибутку від реалізації продукції; відповідно мова піде про підвищення рентабельності виробництва та зниження собівартості.

Для побудування абстрактної економіко-математичної моделі асортиментної задачі введемо наступні умовні позначення:

j – індекс виду випускаємої продукції;

j = 1, 2, ... , n – кількість видів випускаємої продукції;

x_j – шукаємий випуск продукції j-того виду;

i – індекс виду ведучого обладнання;

$i = 1, 2, \ldots, m$ – кількість одиниць ведучого обладнання;

a_{ij} – зв'язуючий коефіцієнт обмеження по обладнанню, визначаючий норму витрат часу роботи обладнання i-го виду на випуск одиниці продукції j-го виду;

A_i – потужність обладнання i -го виду за плановий період (рік);

B – собівартість продукції звітного чи планового року;

B_j – питома собівартість j-го виду продукції;

D_j' , D_j – границя попиту на продукцію j-го виду, відповідно верхній і нижній;

P_j – питомий прибуток від реалізації одиниці продукції j-го виду;

S_j – оптово-відпускна ціна одиниці продукції j-го виду (діюча);

S – вартість порівняльної товарної продукції звітного чи планового року.

Цільова функція має наступний вигляд:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \rightarrow \max.$$

При обмеженнях:

1. По ведучому обладнанню:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

2. По випуску товарної продукції:

$$\sum_{j=1}^{n} S_j x_j \ge S; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. По попиту на окремі види продукції:

$$x_j \le D_j', \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_j \le D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

4. По собівартості продукції:

$$\sum_{j=1}^{n} B_j x_j \le B_j; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

5. Умова невід'ємності змінних:

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Лабораторна робота № 7
«Розрахунок оптимальної виробничої програми карамельного цеху»

Задача. У карамельному цеху випускають декілька видів продукції (табл.7.2). Продуктивність ліній визначається по варочному апарату. Кількість варильних апаратів – 1.

Задано: оптова ціна, собівартість продукції і попит, річна продуктивність апаратів по карамелі.

Потрібно:

1. Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент (табл. 7.3).
2. Побудувати модель оптимального річного плану підприємства у загальному вигляді по критерію оптимізації – **максимальний прибуток**.
3. За допомогою отриманих нерівностей чи рівнянь побудувати та записати матрицю коефіцієнтів і функцію цілі.
4. Вирішити задачу за допомогою програми SIMPL.EXE або функції "Поиск решения" табличного процесора Micrisoft Excel.
5. Заповнити вихідну таблицю та дати економічний аналіз.

Варіанти асортименту обрати з таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Варіант 1	1	2	3	4	5
Варіант 2	6	7	8	9	1
Варіант 3	2	3	4	5	6
Варіант 4	7	8	9	1	2
Варіант 5	3	4	5	6	7
Варіант 6	8	9	1	2	3
Варіант 7	4	5	6	7	8
Варіант 8	9	1	2	3	4
Варіант 9	5	6	7	8	9
Варіант 10	1	3	5	7	9

Згідно варіанту завдання обрати продуктивність ліній з таблиці 7.4. Обрати обмеження по попиту з таблиці 7.5.

Таблиця 7.4

	Продуктивність ліній (т/рік)	
	Непарні варіанти	Парні варіанти:
Варіант 1	1075	1075
Варіант 2	1075	1000
Варіант 3	1000	800
Варіант 4	800	2150
Варіант 5	1075	800
Варіант 6	1075	2150
Варіант 7	1000	2150
Варіант 8	800	1075
Варіант 9	800	1075
Варіант 10	2150	1000

Таблиця 7.5

Обмеження по попиту (т/рік)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
max	89	110	80	99	102	99	104	105	114
min	59	71	51	80	67	74	66	67	72

Таблиця 7.2

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	***Вид карамелі***								
		Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина
1.Шукаємий випуск продукції	т	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3
3.Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63

Таблиця 7.3.

Потреба у сировині, кг/т карамелі

Показники	***Вид карамелі***									Ціна 1 т сировини, грн.
	Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
Патока в/г	317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
Есенція	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
Кислота молочна 40% кр.	6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
Кислота лимонна	3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
Вартість сировини на 1 т *(тис.грн/т)*										–

Приклад виконання лабораторної роботи.

У карамельному цеху випускають декілька видів продукції. Продуктивність ліній визначається по варочному апарату. Кількість варильних апаратів – 1.

Вихідні дані для побудування робочої моделі маємо в таблиці 7.6. Грошові витрати на сировину для виробництва асортименту карамелі – в таблиці 3.7. Річна продуктивність лінії – в таблиці 7.8.

Розв'язування

Робоча модель задачі

1. Цільова функція – отримати максимальний прибуток від випуску карамелі при визначених обмеженнях по продуктивності обладнання, собівартості, попиту, загальному випуску.

$$F(x) = 278{,}33x_1 + 424{,}37x_2 + 583{,}21x_3 + 346{,}7x_4 + 400x_5 + 566{,}67x_6 + 245x_7 + 341{,}4x_8 + 190{,}37x_9 \rightarrow \max$$

2. Обмеження:

1) По ведучому обладнанню:

$$A_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 4230$$

2) По випуску товарної продукції:

$$A_2 = 1958{,}33x_1 + 2546{,}26x_2 + 2175x_3 + 2175x_4 + 2100x_5 + 2166{,}7x_6 + 1815x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \geq 1603605{,}25$$

3) По собівартості продукції:

$$A_3 = 1680x_1 + 2121{,}89x_2 + 1591{,}79x_3 + 1828{,}3x_4 + 1700x_5 + 1600x_6 + 1570x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \leq 1323928{,}07$$

4) По максимальному та мінімальному попиту:

$A_4 =$	x_1	≤ 89	$A_5 =$	x_1	≥ 59
$A_6 =$	x_2	≤ 110	$A_7 =$	x_2	≥ 71
$A_8 =$	x_3	≤ 80	$A_9 =$	x_3	≥ 51
$A_{10} =$	x_4	≤ 99	$A_{11} =$	x_4	≥ 80
$A_{12} =$	x_5	≤ 102	$A_{13} =$	x_5	≥ 67
$A_{14} =$	x_6	≤ 67	$A_{15} =$	x_6	≥ 74
$A_{16} =$	x_7	≤ 104	$A_{17} =$	x_7	≥ 66
$A_{18} =$	x_8	≤ 105	$A_{19} =$	x_8	≥ 67
$A_{20} =$	x_9	≤ 114	$A_{21} =$	x_9	≥ 72

5) По випуску продукції

$$A_{22} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 748{,}5$$

6) По фінансовим можливостям

$$A_{23} = 831{,}63x_1 + 851{,}75x_2 + 860{,}27x_3 + 868{,}17x_4 + 890{,}02x_5 + 847{,}93x_6 + 890{,}05x_7 + 836{,}76x_8 + 830{,}88x_9 \leq 641314{,}28$$

Для реалізації задачі на ПК будуємо робочу матрицю (табл. 7.9), використовуючи вище наведену робочу модель.

Таблиця 7.6

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	**Вид карамелі**									Напрямок	Всього
		Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина		
1. Шуканий випуск продукції	т	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
2. Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	$\geq$	748,5
3. Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	$\geq$	1603605,25
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	$\leq$	1323928,07
5. Питомий прибуток 1т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	$\rightarrow$	290005,44
6. Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	$\leq$	641314,28
7. Попит max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114		
min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72		
8. Товарна продукція	тис.грн.	143,15	229,60	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	$\geq$	1603,605

Таблиця 7.7

Потреба у сировині, кг/т карамелі

Показники	*Вид карамелі*									Ціна 1 т сировини, грн.
	Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
Патока в/г	317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
Есенція	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
Кислота молочна 40% кр.	6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
Кислота лимонна	3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
Вартість сировини на 1 т (тис.грн/т)	**831,63**	**851,75**	**860,27**	**868,17**	**890,02**	**847,93**	**890,05**	**836,76**	**830,88**	–

Таблиця 7.8

Річна продуктивність ліній

	Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т
Лінія 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4230

Таблиця 7.9

Робоча матриця

Показники		Вид карамелі									Обмеження	
		Апельсин	Фрукт. - ягідн. десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	знак	величина
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
Функція цілі		278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	→	max
Обмеження:												
1	По обладнанню	1	1	1	1	1	1	1	1	1	≤	4230
2	Товарна продукція	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,7	1815	2178	2136	≥	1603605,25
3	Собівартість	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,6	≤	1323928,07
4	По попиту	1									≤	89
5		1									≥	59
6			1								≤	110
7			1								≥	71
8				1							≤	80
9				1							≥	51

Продовження табл. 7.9

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	знак	величина
10					1						≤	99
11					1						≥	80
12						1					≤	102
13						1					≥	67
14							1				≤	99
15							1				≥	74
16								1			≤	104
17								1			≥	66
18									1		≤	105
19									1		≥	67
20										1	≤	114
21										1	≥	72
22	Випуск продукції	1	1	1	1	1	1	1	1	1	≥	748,5
23	По фінансовим можливостям	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	≤	641314,28

За допомогою програми SIMPL.EXE знаходимо рішення оптимізаційної задачі. Активізуємо програму – натискаємо кнопку F7. У першому рядку записуємо функцію цілі. Далі вносимо ліву частину матриці, натискаємо кнопку F8, заповнюємо таблицю обмежень (рис. 7.1).

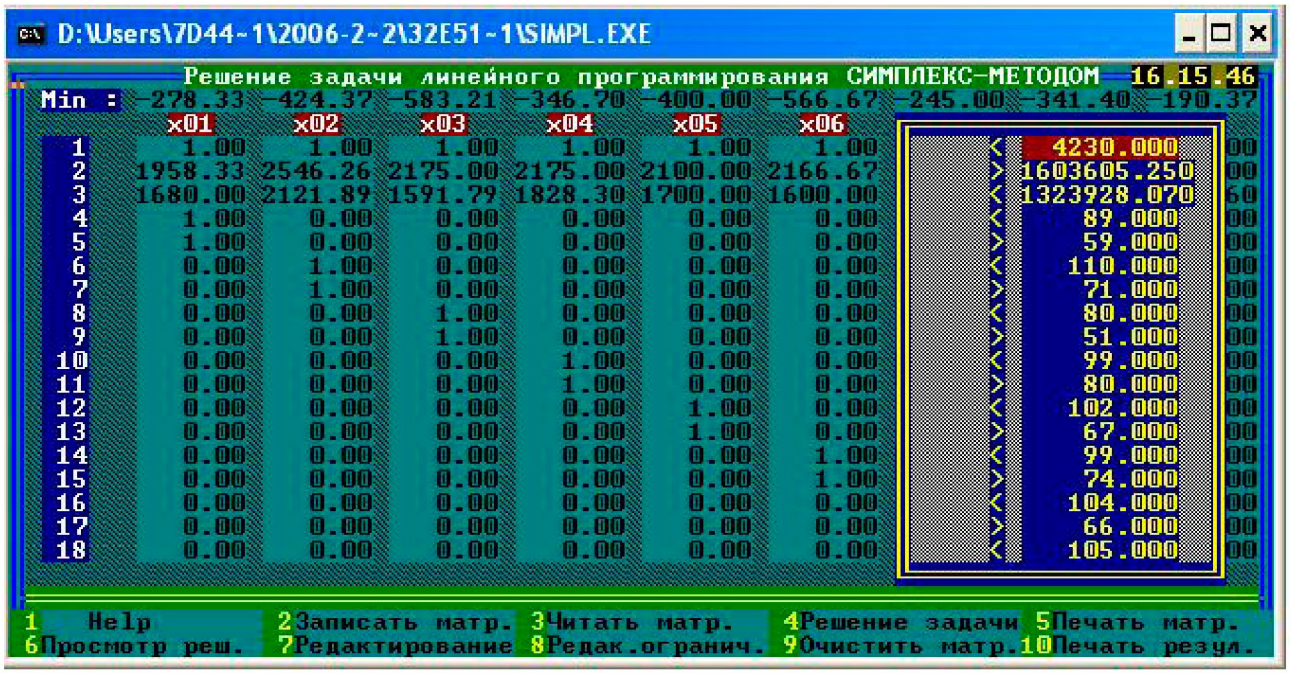


Рис. 7.1

Вирішуємо задачу – натискаємо кнопку F4. На питання: «Вирішувати з висновком проміжних результатів?» відповідаємо “Y”. В результаті отримаємо таблиці: «Оптимальне рішення» та «Вивід відхилень по рядках» (рис. 7.2 та рис. 7.3).



Рис. 7.2

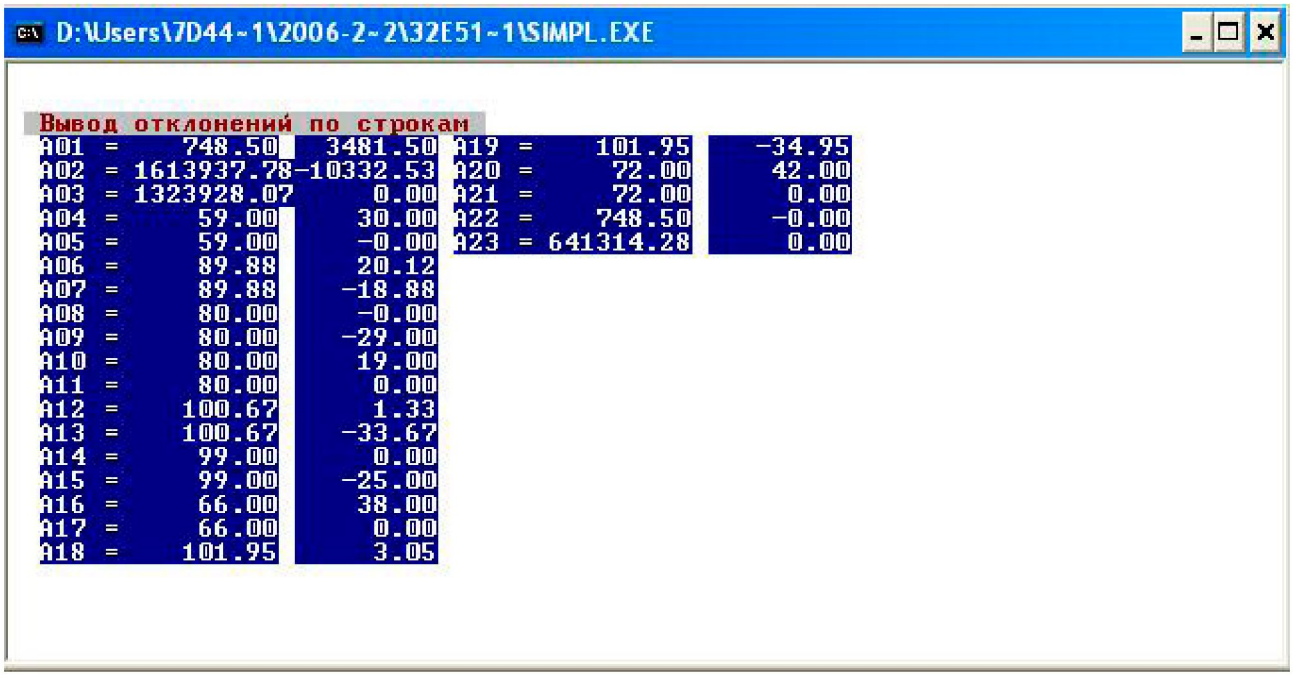


Рис. 7.3

Отримані результати оптимізації виробничої програми лінії виробництва карамелі з фруктово-ягідними наповнювачами зводимо в таблицю 7.10.

Таблиця 7.10

Результати оптимізації

Показники	Од . виміру	Величина		Відхилення	
		до оптимізації	після оптимізації	абсолютне +, –	відносне %
1	2	3	4	5	6
1. Обсяг випуску карамелі, всього	т	748,5	748,5	0	0
в т.ч. "Апельсин"	т	73,1	59	–14,1	–19,29
"Фруктово-ягідний букет"	т	90,17	89,88	–0,29	–0,32
"Десертна"	т	70,4	80	9,6	13,64
"Яблуко"	т	87,2	80	–7,2	–8,26
"Абрикос"	т	82,03	100,67	18,64	22,72
"Вікторія"	т	90,1	99	8,9	9,88
"Слива"	т	89,1	66	–23,1	–25,93
"Лимон"	т	82,1	101,95	19,85	24,18
"Малина"	т	84,3	72	–12,3	–14,59

Продовження таблиці 7.10

2. Використання потужності	%	17,7	17,7	0	0
3. Собівартість товарної продукції	тис. грн.	1323,9	1323,9	0	0
4. Товарна продукція	тис. грн.	1603,6	1613,9	10,3	0,64
5. Прибуток від реалізації	тис. грн.	279,67	290,00	10,33	3,69
6. Витрати на 1 грн. товарної продукції	коп.	82,56	82,03	–0,53	–0,64
5. Рентабельність	%	21,1	21,9	0,78	–

Аналіз результатів

Аналіз попиту на продукцію в асортименті дозволив оптимізувати обсяги виробництва з метою збільшення прибутку від реалізації.

В результаті оптимізації прибуток від реалізації карамелі збільшився на 10332,53 грн. без зміни обсягу виробництва.

В межах попиту збільшився випуск карамелі: "Абрикос" – на 18,64 тонни, або на 22,72 %; "Десертна" – 6,9 тонн, або на 13,64 %; "Вікторія" – на 8,9 тонн, або на 9,88 %; "Лимон" – на 19,85 тони, або на 24,18 %.

Знизився випуск карамелей: "Апельсин" – на 14,1 тонн, або на 19,29 %; " Фруктово-ягідний букет " – на 0,29 тонни, або на 0,32 %; "Яблуко" – на 7,2 тонн, або на 8,26 %; "Слива" – на 23,1 тонн, або на 25,93 %; "Малина" – на 12,3 тонни, або на 14,59 %.

Витрати на 1 грн. товарної продукції зменшились на 0,53 коп. (0,63 %). Рентабельність випуску карамелі збільшилась на 0,78 %.

Послідовність розв'язування задачі «Оптимізація виробничої програми карамельного цеху» за допомогою табличного процесора Microsoft Excel.

I.

1. Створюємо таблиці похідних даних (рис. 7.4) де розраховуємо питомий прибуток, товарну продукцію, потребу і вартість сировини.

M9 fx =СУММПРОИЗВ(D$6:L$6;D9:L9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		Таблиця 1 *Вихідні дані для побудови робочої моделі*											
3		Показники	Один.вим.	Вид карамелі									Всього
4				Апельсин	Фрукт.-ягідний дисерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
5		1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	
6		2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5
7		3.Оптова ціна	грн.	1958,3	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25
8		4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07
9		5.Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677
10		6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28
11		7.Попит											
12		max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114	
13		min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72	
14		Товарна продукція	тис.грн.	143,15	229,60	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	1603,61
15													
16		Таблиця 2. *Потреба у сировині, кг/т карамелі*											
17		Показники		Вид карамелі									Ціна 1 т сировини, грн.
18				Апельсин	Фрукт.-ягідний дисерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
19		Цукор-пісок		633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
20		Патока в/г		317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
21		Пюре фруктове		153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
22		Есенція		0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
23		Кислота молочна 40% кр.		6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
24		Кислота лимонна		3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
25		**Вартість сировини** *(на 1 т)*	**тис.грн/т**	**831,63**	**851,75**	**860,27**	**868,17**	**890,02**	**847,93**	**890,05**	**836,76**	**830,88**	-
26													
27		Таблиця 3. *Річна продуктивність ліній*											
28				Апельсин	Фрукт.-ягідний дисерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т
29		Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	4230

Вихідні дані | Базовий вариант | Оптимізація

Рис. 7.4

Розраховуємо по формулах питомий прибуток 1 т продукції, товарну продукцію.

Грошові витрати на сировину розраховуємо в таблиці 2 і робимо посилку з **таблиці 1** на підсумковий рядок **таблиці 2**.

2. Запишемо задачу лінійного програмування в аналітичному вигляді:

$$F(x) = 278{,}33x_1 + 424{,}37x_2 + 583{,}21x_3 + 346{,}7x_4 + 400x_5 + 566{,}67x_6 + 245x_7 + 341{,}4x_8 + 190{,}37x_9 \rightarrow \max \quad (7.1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \le 4230, \quad (7.2)$$

$$143{,}15x_1 + 229{,}60 + 153{,}12x_3 + 189{,}66x_4 + 172{,}26x_5 + 195{,}22x_6 + 161{,}72x_7 + 178{,}81x_8 + 180{,}06x_9 \ge 1603{,}605, \quad (7.3)$$

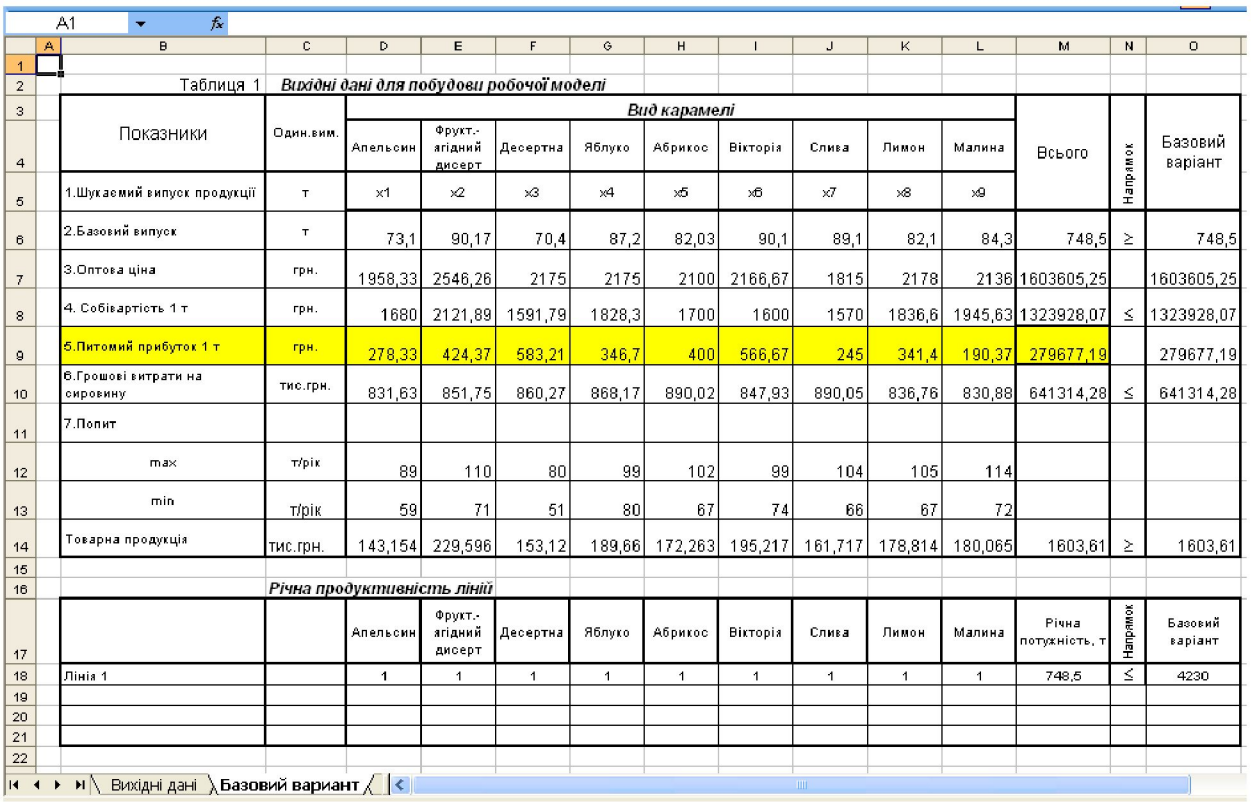
$$1680x_1 + 2121{,}89x_2 + 1591{,}79x_3 + 1828{,}3x_4 + 1700x_5 + 1600x_6 + 1570x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \le 1323928{,}07, \quad (7.4)$$

$$x_1 \le 89; \quad x_1 \ge 59;$$
$$x_2 \le 110; \quad x_2 \ge 71;$$
$$x_3 \le 80; \quad x_3 \ge 51;$$
$$x_4 \le 99; \quad x_4 \ge 80;$$
$$x_5 \le 102; \quad x_5 \ge 67;$$
$$x_6 \le 67; \quad x_6 \ge 74;$$
$$x_7 \le 104; \quad x_7 \ge 66;$$
$$x_8 \le 105; \quad x_8 \ge 67;$$
$$x_9 \le 114; \quad x_9 \ge 72. \qquad (7.5)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \ge 748{,}5, \qquad (7.6)$$

$$831{,}63x_1 + 851{,}75x_2 + 860{,}27x_3 + 868{,}17x_4 + 890{,}02x_5 + 847{,}93x_6 + 890{,}05x_7 + 836{,}76x_8 + 830{,}88x_9 \le 641314{,}28 \qquad (7.7)$$

3. Для рішення задачі на аркуші **Microsoft Excel** створюємо «Базовий варіант» (рис. 7.5).



Таблиця 1 *Вихідні дані для побудови робочої моделі*

Показники	Один.вим.	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант
		Апельсин	Фрукт.-ягідний дисерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина			
1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9			
2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5	≥	748,5
3.Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25		1603605,25
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07	≤	1323928,07
5.Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677,19		279677,19
6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28	≤	641314,28
7.Попит													
max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114			
min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72			
Товарна продукція	тис.грн.	143,154	229,596	153,12	189,66	172,263	195,217	161,717	178,814	180,065	1603,61	≥	1603,61

Річна продуктивність лінії

		Апельсин	Фрукт.-ягідний дисерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т	Напрямок	Базовий варіант
Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	748,5	≤	4230

Вихідні дані | Базовий вариант

Рис. 7.5

В комірки електронних таблиць заносимо вихідні дані: базовий випуск, оптову ціну, максимальний та мінімальний попит.

Цільова функція (7.1) і обмеження (7.2 – 7.7) у вигляді формул заносяться у комірки колонки «**Всього**» (рис. 7.6, 7.7 та 7.8).

В останню колонку за допомогою «Спеціальної вставки» вставляємо копію колонки «Всього» для аналізу результатів розрахунку.

Вихідні дані для побудови робочої моделі (формули розрахунку)

M13 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		Таблиця 1													
2				Вихідні дан											
3															
4		Показники	Одн. вим.	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант
5				Апельсин	фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина			
6		1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9			
7		2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	=СУММ(D7:L7)	>=	748,5
8		3.Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	=СУММПРОИЗВ(D$7:L$7;D8:L8)		1603605,25
9		4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	=СУММПРОИЗВ(D$7:L$7;D9:L9)	<=	1323928,06
10		5.Питомий прибуток 1 т	грн.	=D8-D9	=E8-E9	=F8-F9	=G8-G9	=H8-H9	=I8-I9	=J8-J9	=K8-K9	=L8-L9	=СУММПРОИЗВ(D$7:L$7;D10:L10)		279677,187
11		6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	=D25	=E25	=F25	=G25	=H25	=I25	=J25	=K25	=L25	=СУММПРОИЗВ(D$7:L$7;D11:L11)	<=	641314,278
12		7.Попит													
13		max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114			
14		min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72			
15		Товарна продукція	тис. грн.	=D8*D7/1000	=E8*E7/1000	=F8*F7/1000	=G8*G7/1000	=H8*H7/1000	=I8*I7/1000	=J8*J7/1000	=K8*K7/1000	=L8*L7/1000	=СУММ($D$15:$L$15)	>=	1603,60525

Рис. 7.6

Потреба у сировині, кг/т карамелі (формули розрахунку)

D16 fx Потреба у сировині, кг/т карамелі

	A	B	C	D	E	F
16		Таблиця 2		*Потреба у сировині, кг/т карамелі*		
17				*Вид карамелі*		
18		Показники		Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна
19		Цукор-пісок		633,72	637,79	640,37
20		Патока в/г		317,82	320,75	322,17
21		Пюре фруктове		153,07	163,65	164,72
22		Есенція		0,96	0,95	0,96
23		Кислота молочна 40% кр.		6,03	6	6,03
24		Кислота лимонна		3,06	2	4,02
25		Вартість сировини *(на 1 т)*	тис.грн/т	=СУММПРОИЗВ(D19:D24;$M$21:$M$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(E19:E24;$M$21:$M$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(F19:F24;$M$21:$M$26)/1000

D16 fx Потреба у сировині, кг/т карамелі

	G	H	I	J
16				
17				
18	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива
19	643,31	643,18	645,3	643,18
20	321,66	323,95	324,53	324,14
21	165	180,98	165,58	180,98
22	0,96	0,96	0	0,96
23	6,04	6,07	6,07	6,07
24	6,52	3,08	2,02	3,08
25	=СУММПРОИЗВ(G19:G24;$M$21:$M$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(H19:H24;$M$21:$M$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(I19:I24;$M$21:$M$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(J19:J24;$M$21:$M$26)/1000

D16 fx Потреба у сировині, кг/т карамелі

	K	L	M	N
16				
17				
18	Лимон	Малина	Ціна 1 т сировини, грн.	
19	637,69	615,67	750	
20	319,81	309,99	153	
21	154,03	161,46	1800	
22	0,96	0,92	14400	
23	6,07	5,5	1980	
24	3,08	3,3	2100	
25	=СУММПРОИЗВ(K19:K24;$M$21:$M$26)/1000	=СУММПРОИЗВ(L19:L24;$M$21:$M$26)/1000	-	

Рис. 7.7

Річна продуктивність ліній (формули розрахунку)

C28 fx Річна продуктивність ліній

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
28		Таблиця 3	Річна пот												
29				Апельсин	Фрукт.-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т	Напрямок	Базовий варіант
30		Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ(D30:L30;D7:L7)	< =	4230
31															
32															
33															

Рис. 7.8

II.

Після введення формул всіх обмежень і цільової функції для розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою табличного процесора Micrisoft Excel потрібно виконати такі дії:

1. Створити новий лист – «Оптимізація» і скопіювати в нього лист «Базовий варіант».

Можна створити лист «Оптимізація» за допомогою наступної операції: відкрити лист «Базовий варіант», нажати кнопку **Ctrl** і мишкою потягнути за лист вправо й відпустити спочатку клавішу мишки, а потім кнопку **Ctrl.** Одержимо новий лист із назвою **«Базовий варіант (2)»,** змінимо назву на «**Оптимізація**».

На листі «Оптимізація» проведемо обчислення для завдання.

2. В **головному меню** виберіть пункт «**Сервис»,** далі – «**Поиск решения»** (рис.7.9)**.**

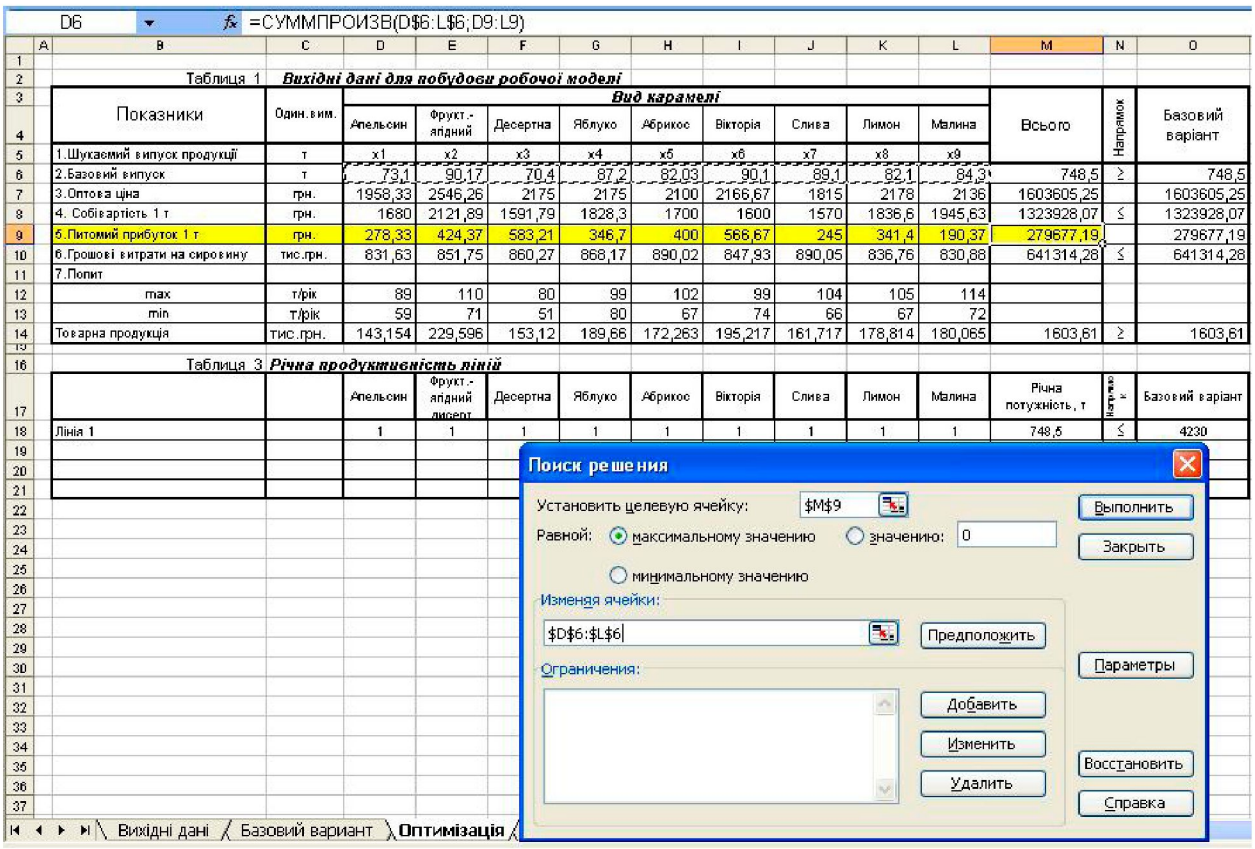


Рис. 7.9

3. У поле «**Установить целевую ячейку»** введіть адресу або ім'я комірки, в якій знаходиться формула функції, що досліджується на екстремум. В нашому випадку ввести **$M$9.**

Щоб максимізувати значення цільової комірки шляхом зміни

значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач **«Равной»** у положення **максимальному значенню (Max).**

Щоб мінімізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення **мінімальному значенню (Min).**

Щоб знайти значення в цільовій комірці, яке дорівнює деякому числу шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення «**значенню**» і введіть у відповідне поле необхідне число.

В нашому випадку встановлюємо перемикач у положення **максимальному значенню (Max).**

4. У поле «**Изменяя ячейки**» введіть імена чи адреси комірок шуканих невідомих змінних, розділяючи їх комами або за допомогою мишки вказати необхідні комірки. Допускається встановлення до 200 змінюваних комірок. В нашому випадку введемо **$D$6:$L$6.** Щоб автоматично знайти всі комірки, що впливають на цільову функцію, натисніть кнопку «**Предположить».**

5. У поле «**Ограничения**» введіть всі обмеження, що накладаються на пошук розв'язку. Для цього натисніть кнопку «**Добавить».** Відкриється вікно «**Добавление ограничения**» (рис. 7.10)**.**

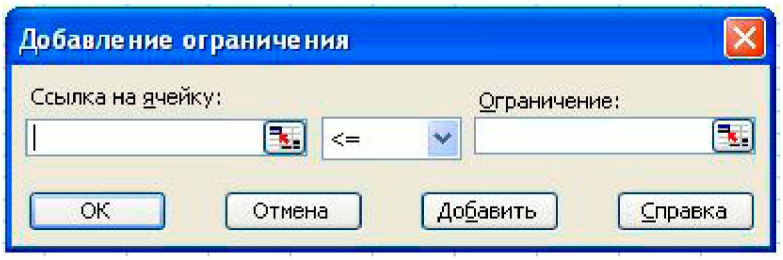


Рис. 7.10

У поле «**Ссылка на ячейку**» ввести комірку чи діапазон, на значення яких необхідно накласти обмеження. Поле «**Ограничение**» служить для завдання умови, що накладається на значення комірки чи діапазону, зазначеного в полі «**Ссылка на ячейку».** Виберіть необхідний умовний оператор (<=, =, >=, цел або двоич) (рис. 7.11).

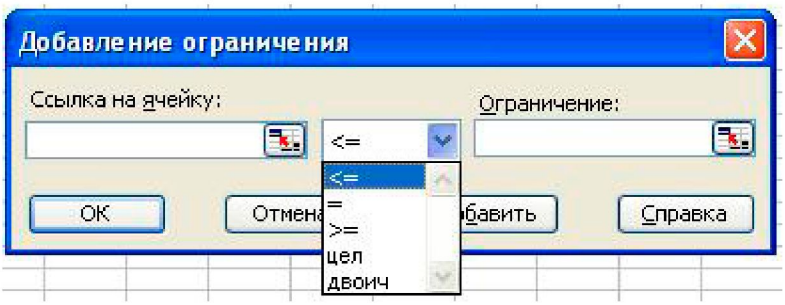


Рис. 7.11

Введіть обмеження – число, формулу, посилання на діапазон – у поле праворуч від списку, що розкривається. Натисніть на кнопку «**Добавить»,** щоб, не повертаючись у вікно діалогу «**Параметры поиска решения»,** накласти нову умову на пошук розв'язку задачі. В нашому випадку потрібно ввести (рис. 7.12):

$D$13<=$D$6,
$D$6 <=$D$12,
$E$13<=$E$6,
$E$6<=$E$12,
$F$13<=$F$6,
$F$6<=$F$12,
$G$13<=$G$6,
$G$6<=$G$12,
$H$13<=$H$6,
$H$6<=$H$12,
$I$13<=$I$6,
$I$6<=$I$12,
$J$13<=$J$6,
$J$6<=$J$12,
$K$13<=$K$6,
$K$6<=$K$12,
$L$13<=$L$6,
$L$6 <=$L$12,
$M$10<=$O$10,
$M$14<=$O$14,
$M$18<=$O$18,
$M$6<=$O$6,
$M$8<=$O$8.

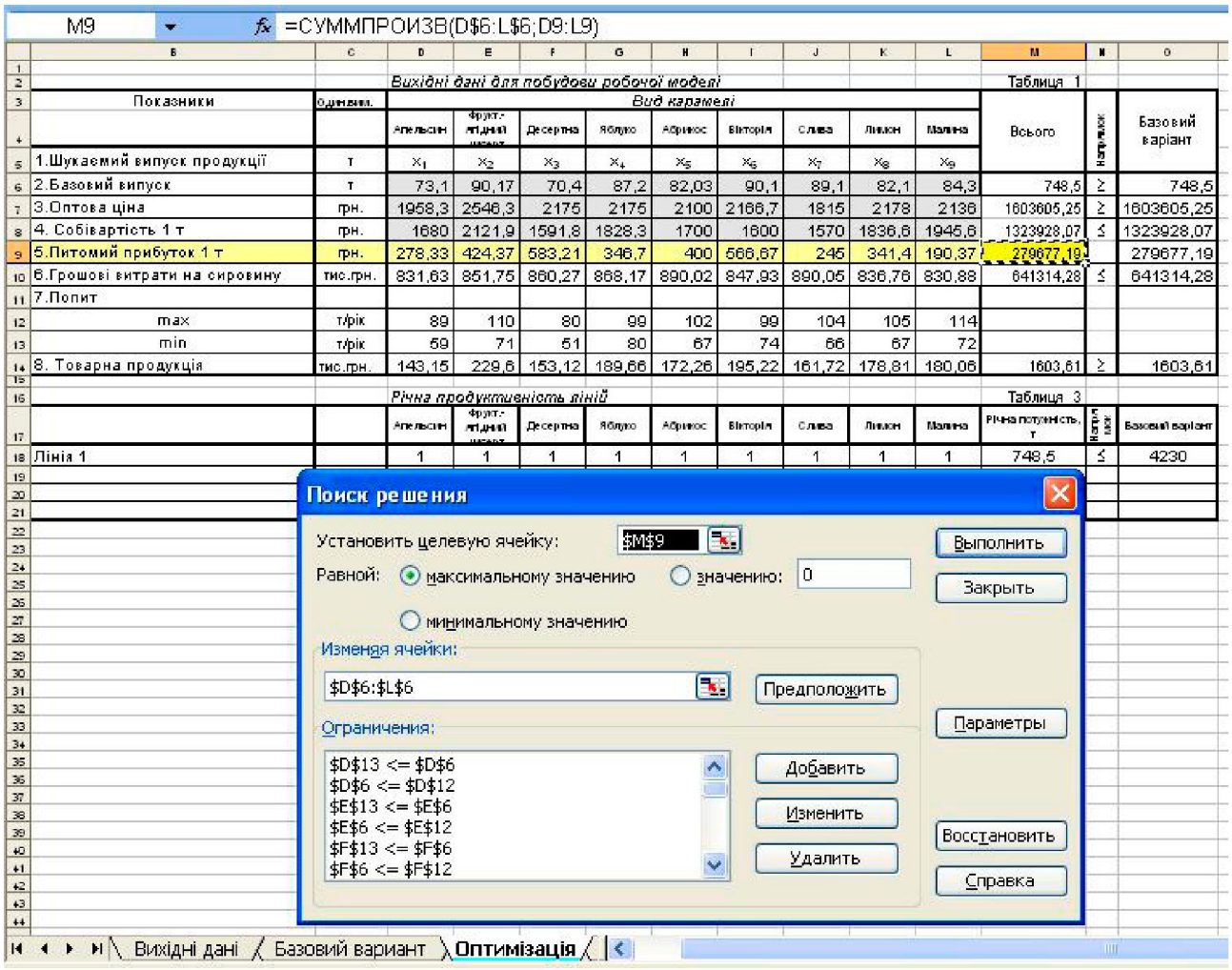


Рис. 7.12

6.Натисніть кнопку «**Выполнить».**

7. В результаті виконання програми повинно з’явитися повідомлення про коректність моделі і правильності розрахунків.

За допомогою цього діалогового вікна можна викликати звіти трьох типів: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**» (рис. 7.13).

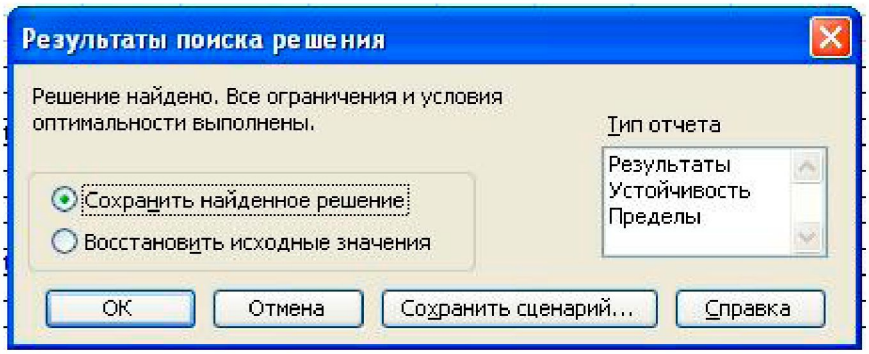


Рис. 7.13

8. Щоб зберегти знайдений розв'язок, встановіть перемикачу діалоговому вікні «**Результаты поиска решения**» в положення «**Сохранить найденное решение».**

9.Отже, оптимальний розв'язок лінійної задачі програмування має вигляд:

$$x_1=59;\ x_2=89{,}87;\ x_3=80;\ x_4=80;\ x_5=100{,}65;\ x_6=99;$$
$$x_7=66;\ x_8=101{,}98;\ x_9=72;\quad F(x)_{max}=290005{,}44.$$

10.Більш детальну інформацію по результатам оптимізації дозволяють отримати звіт по результатам, звіт по стійкості, звіт по границям.

Звіт за результатами

Звіт складається із трьох таблиць (рис. 7.14):

Таблиця 1 наводить відомості про цільову функцію.

У колонці «**Исходно**» наведені значення цільової функції до початку обчислень.

Таблиця 2 наводить значення шуканих змінних, отриманих в результаті рішення задачі.

Таблиця 3 показує результати оптимального рішення для обмежень і для граничних умов.

A1 — Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам							
2	Рабочий лист: [Оптимізація карамель.XLS]Оптимізація							
3	Отчет создан: 17.05.2007 19:07:35							
4								
5								
6	Целевая ячейка (Максимум)							
7		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
8		$M$9	грн. Всього	279677,19	290005,44			
9								
10								
11	Изменяемые ячейки							
12		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
13		$D$6	т x1	73,1	59			
14		$E$6	т x2	90,17	89,87000085			
15		$F$6	т x3	70,4	80			
16		$G$6	т x4	87,2	80			
17		$H$6	т x5	82,03	100,651583			
18		$I$6	т x6	90,1	99			
19		$J$6	т x7	89,1	66			
20		$K$6	т x8	82,1	101,9784161			
21		$L$6	т x9	84,3	72			
22								
23								
24	Ограничения							
25		Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
26		$M$8	т Всього	748,5	$M$8>=$O$6	связанное	0	
27		$M$8	грн. Всього	1323928,07	$M$8<=$O$8	связанное	0	
28		$M$10	тис.грн. Всього	641314,28	$M$10<=$O$10	связанное	0	
29		$M$14	тис.грн. Всього	1613,93	$M$14>=$O$14	не связан	10,33	
30		$M$18	Лінія 1 Річна потужність,	748,5	$M$18<=$O$18	не связан	3481,5	
31		$D$13	т/рік x1	59	$D$13<=$D$6	связанное	0	
32		$E$13	т/рік x2	71	$E$13<=$E$6	не связан	18,8700009	
33		$F$13	т/рік x3	51	$F$13<=$F$6	не связан	29	
34		$G$13	т/рік x4	80	$G$13<=$G$6	связанное	0	
35		$H$13	т/рік x5	67	$H$13<=$H$6	не связан	33,651583	
36		$I$13	т/рік x6	74	$I$13<=$I$6	не связан	25	
37		$J$13	т/рік x7	66	$J$13<=$J$6	связанное	0	
38		$K$13	т/рік x8	67	$K$13<=$K$6	не связан	34,9784161	
39		$L$13	т/рік x9	72	$L$13<=$L$6	связанное	0	
40		$D$6	т x1	59	$D$6<=$D$12	не связан	30	
41		$E$6	т x2	89,87000085	$E$6<=$E$12	не связан	20,1299991	
42		$F$6	т x3	80	$F$6<=$F$12	связанное	0	
43		$G$6	т x4	80	$G$6<=$G$12	не связан	19	
44		$H$6	т x5	100,651583	$H$6<=$H$12	не связан	1,34841695	
45		$I$6	т x6	99	$I$6<=$I$12	связанное	0	
46		$J$6	т x7	66	$J$6<=$J$12	не связан	38	
47		$K$6	т x8	101,9784161	$K$6<=$K$12	не связан	3,0215839	
48		$L$6	т x9	72	$L$6<=$L$12	не связан	42	

Базовий вариант | **Отчет по результатам** | Отчет по устойчи

Рис. 7.14

Для **Обмежень** у графі «**Формула»** наведені залежності, які були введені в діалогове вікно «**Поиск решения»**; у графі «**Значение»** наведені величини використаного ресурсу; у графі «**Разница»** показана кількість невикористаного ресурсу. Якщо ресурс використовується повністю, то в графі «**Сатус»** вказується «зв'язане»; при неповному використанні ресурсу в цій графі вказується «не зв'язаний».

Для ***Граничних умов*** приводяться аналогічні величини з тією лише різницею, що замість величини невикористаного ресурсу показана різниця між значенням змінної в знайденому оптимальному рішенні й заданим для неї граничною умовою.

Отже, у звіті по результатам порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана.

Звіт по стійкості

Звіт по стійкості (рис.7.15) складається із двох таблиць.

A1 — Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Оптимізація карамель.XLS]Оптимізація
Отчет создан: 17.05.2007 19:07:35

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$6	т x1	59	0	278,33	22,5601936	1E+30
$E$6	т x2	89,8700009	0	424,37	43,0207005	66,48370401
$F$6	т x3	80	253,840877	583,21	1E+30	253,8408773
$G$6	т x4	80	0	346,7	44,0964108	1E+30
$H$6	т x5	100,651583	0	400	236,314152	83,68737167
$I$6	т x6	99	255,688705	566,67	1E+30	255,6887046
$J$6	т x7	66	0	245	128,348705	5,83915E+17
$K$6	т x8	101,978416	0	341,4	54,6793853	15,31363159
$L$6	т x9	72	0	190,37	163,845444	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$M$6	т Всього	748,5	-1397,18	748,5	0,1182513	0,110080135
$M$8	грн. Всього	1323928,07	0,21	1323928,066	6516,49364	1361,065582
$M$10	тис.грн. Всього	641314,28	1,63	641314,2785	81,4922932	123,4850292
$M$14	тис.грн. Всього	1613,93	0,00	1603,605254	10,3282488	1E+30
$M$18	Лінія 1 Річна потужність, т	748,5	0	4230	1E+30	3481,5
$D$13	т/рік x1	59	22,5601936	0	2,05102063	23,74299558
$E$13	т/рік x2	71	0	0	1E+30	18,87000085
$F$13	т/рік x3	51	0	0	1E+30	29
$G$13	т/рік x4	80	44,0964108	0	2,55906249	19
$H$13	т/рік x5	67	0	0	1E+30	33,65158305
$I$13	т/рік x6	74	0	0	1E+30	25
$J$13	т/рік x7	66	128,348705	0	1,21101491	30,22252784
$K$13	т/рік x8	67	0	0	1E+30	34,9784161
$L$13	т/рік x9	72	163,845444	0	3,34994814	7,017564743

Базовий вариант | Отчет по результатам | **Отчет по устойчивости** | Отчет по пределам

Рис. 7.15

У **таблиці 1** приводяться наступні значення для змінних:

результат рішення задачі;

нормована вартість, тобто додаткові двоїсті змінні v_j, які, показують, наскільки змінюється цільова функція при примусовому включенні одиниці цієї продукції в оптимальне рішення;

коефіцієнти цільової функції;

граничні значення приросту коефіцієнтів Δc_j цільової функції, при яких зберігається набір змінних, які входять в оптимальне рішення.

У **таблиці 2** приводяться аналогічні значення для обмежень:

величина використаних ресурсів;

тіньова ціна, тобто двоїсті оцінки z_i, які показують, як зміниться цільова функція при зміні ресурсів на одиницю;

значення приросту ресурсів Δb_j, при яких зберігається оптимальний набір змінних, які входять в оптимальне рішення.

Задачі аналізу, які можна вирішувати за допомогою приведених величин Δc_j й Δb_j.

Коротко за звітом по стійкості:

показник «Нормована вартість», показує як зміниться цільова функція при примусовому випуску одиниці j-го виду продукції. Цей звіт показує, яка продукція є вигідною.

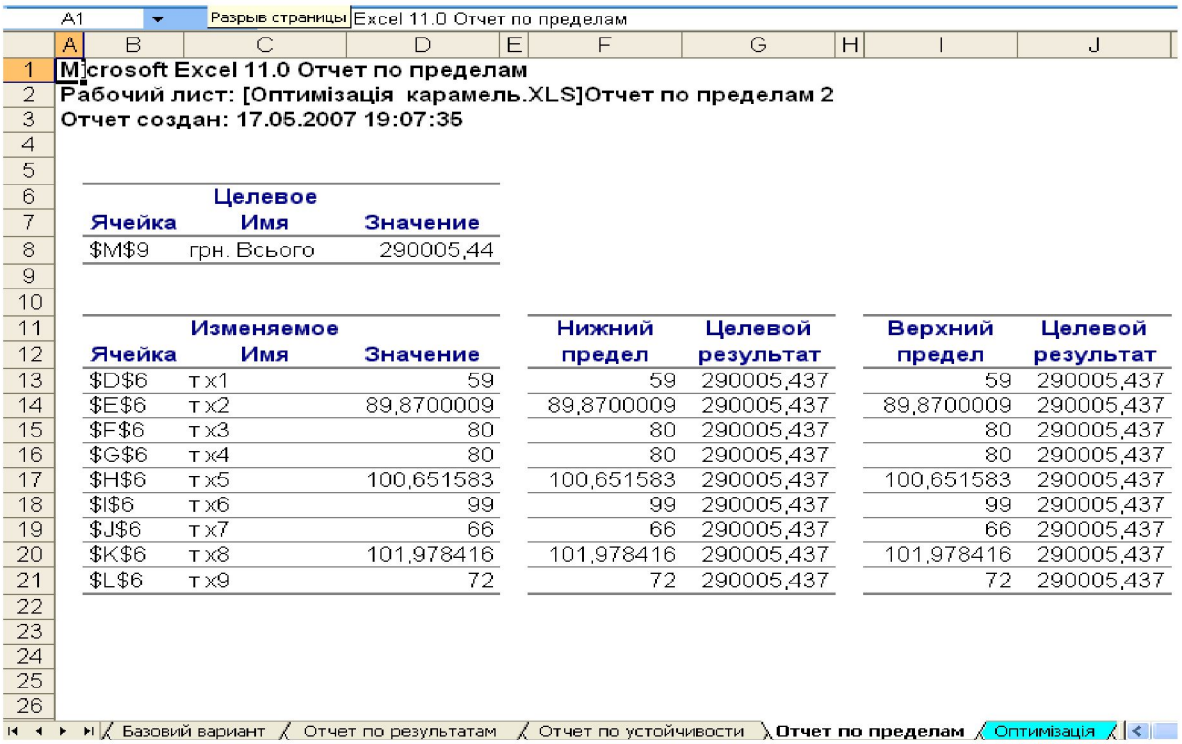
В нашому випадку є вигідним збільшення обсягів виробництва карамелі «Десертна» і «Вікторія».

Звіт по границям

Цей звіт наведений на рис. 7.16. У ньому показано, у яких межах може змінюватися випуск продукції, що ввійшла в оптимальне рішення, при збереженні структури оптимального рішення:

приводяться значення x_j в оптимальному рішенні;

приводяться нижні межі зміни значень x_j.



Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Оптимізація карамель.XLS]Отчет по пределам 2
Отчет создан: 17.05.2007 19:07:35

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$M$9	грн. Всього	290005,44

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$D$6	т х1	59	59	290005,437	59	290005,437
$E$6	т х2	89,8700009	89,8700009	290005,437	89,8700009	290005,437
$F$6	т х3	80	80	290005,437	80	290005,437
$G$6	т х4	80	80	290005,437	80	290005,437
$H$6	т х5	100,651583	100,651583	290005,437	100,651583	290005,437
$I$6	т х6	99	99	290005,437	99	290005,437
$J$6	т х7	66	66	290005,437	66	290005,437
$K$6	т х8	101,978416	101,978416	290005,437	101,978416	290005,437
$L$6	т х9	72	72	290005,437	72	290005,437

Рис. 7.16

Крім цього, у звіті зазначені значення цільової функції при випуску даного типу продукції на нижній межі. Так, що

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 + c_6 x_6 + c_7 x_7 + c_8 x_8 + c_9 x_9 = 290005{,}437$$

Далі приводяться верхні межі зміни x_j і значення цільової функції при випуску продукції, що ввійшла в оптимальне рішення на верхніх межах.

На цьому ми закінчуємо опис звітів аналізу оптимального рішення.

Лабораторна робота № 8
«Оптимізація виробничої програми молочного заводу»

Задача. У табл. 8.1 дані асортимент виробів, що випускаються в розрізі основних показників роботи підприємства. Побудувати модель оптимальної річної програми підприємства в загальному, табличному та аналітичному вигляді за критерієм оптимізації – максимум прибутку.

Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент, який задається варіантом. Побудувати матрицю коефіцієнтів. Виконати розв'язання задачі на ПК. Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Таблиця 8.1

Вихідні дані для оптимізації молочного виробництва

Асортимент продукції	Річна потужність обладнання, т за рік		Розцінка виробітку 1т, грн.	Оптова ціна 1 тони, грн.	Собівартість 1 тони, грн.	Норми витрат моло-ка, т/т	Попит, т	
	тетра-пак	пляшки					мінімальний	максимальний
1.Молоко тетра-пак, з м.д.ж.3,2%	50000		3,5	3500	2700	0,975	1000	2000
2.Молоко тетра-пак, з м.д.ж.2,5%	50000		3,5	2800	2400	0,922	2000	4000
3.Молоко 1л, з м.д.ж.2,5%		30000	15,4	3600	3000	0,922	1000	2000
4.Молоко 1л., з м.д.ж.3,2%		30000	15,4	2600	2500	0,975	1200	1500
5.Молоко 0,5л, з м.д.ж.2,5%		30000	15,4	2500	2100	0,922	600	800
6.Молоко 0,5л, з м.д.ж.3,2%		30000	15,4	2700	2200	0,975	850	1000
7.Молоко топлене 0,5л		30000	15,4	2900	2700	1,052	5000	6000
8.Кефір1л, з м.д.ж.2,5%		30000	15,4	2700	2500	0,981	600	700
9.Кефір 1л, з м.д.ж.3,2%		30000	15,4	2800	2600	0,985	100	120
10.Ряжанка 1л		25000	15,4	2900	2500	1,044	150	200
11.Простокваша 1л		25000	15,4	3000	2800	1,038	800	900
12.Вершки 1л		25000	15,4	3900	3100	2,310	280	320

Товарна продукція (план) – 50000 тис грн.

Варіант визначається за допомогою табл. 8.2. Вибір варіанту визначається за завданням викладача. Варіант задається чотирма цифрами, якими позначено номери асортименту виробів, на основі яких студент буде будувати свою модель.

Таблиця 8.2

	X_1	X_2	X_3	X_4
Варіант 1	1	2	3	4
Варіант 2	5	6	7	8
Варіант 3	9	10	11	12
Варіант 4	2	3	4	5
Варіант 5	6	7	8	9
Варіант 6	10	11	12	1
Варіант 7	3	4	5	6
Варіант 8	7	8	9	10
Варіант 9	1	3	5	7
Варіант 10	2	4	6	8

Врахувати обсяг ресурсів на свій асортимент (табл. 8.3).

Таблиця 8..

	Можливі сировинні ресурси по закріпленій зоні заводу, т	Річний фонд оплати праці, тис. грн. на рік.
Варіант 1	7100	250
Варіант 2	6080	200
Варіант 3	7085	210
Варіант 4	6065	280
Варіант 5	7115	300
Варіант 6	6095	250
Варіант 7	7095	200
Варіант 8	6085	210
Варіант 9	7118	180
Варіант 10	6070	300

Для виконання роботи потрібно обрати асортимент продукції для оптимізації. Після цього потрібно обрати мету рішення задачі на основі якої буде будуватись функція цілі. Функцією цілі може бути максимізація вартості або кількості виробленої продукції або загального прибутку від виробництва або мінімізація витрат на виробництво продукції. Для побудови задачі також

потрібно обрати ресурси за якими будуть будуватись обмеження і визначити максимальний можливий річний запас цього ресурсу на підприємстві. У вигляді ресурсів можна розглядати потужність, сировину, основні види матеріалів, фонд зарплати, фонд часу роботи обладнання або робочих, трудомісткість виконаних робіт тощо. В моделі потрібно враховувати також обмеження за попитом.

Для побудування моделі асортиментної задачі введемо наступні умовні позначення:

i – індекс виду продукції;

i = 1, 2, ... , n – кількість видів продукції;

X_i – оптимальний випуск продукції i-того виду;

a_{ij} – норма витрат i-того виду ресурсу на одиницю j-того виду продукції;

A_i – обсяг запасів ресурсу (молока);

j – індекс виду провідного обладнання;

j = 1, 2, ... , m – кількість одиниць провідного обладнання;

b_{ij} – потужність обладнання j-го виду для i-го виду продукції;

B_j – потужність обладнання j-го виду за плановий період (рік);

D_i^{min}, D_i^{max} – відповідно верхня і нижня межа попиту на продукцію i-го виду;

P_j – питомий прибуток від реалізації одиниці продукції i-го виду;

C_i – питома собівартість i-го виду продукції;

C – собівартість продукції звітного чи планового року;

S_i – оптово-відпускна ціна одиниці продукції i-го виду (діюча);

S – вартість порівняльної товарної продукції звітного чи планового року.

R_i – розцінка виробітку 1т, i-го виду продукції, грн.;

R – фонд оплати праці робочих-відрядників.

Робоча модель

1. **Функція цілі** – максимуми прибутку:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \rightarrow \max.$$

Обмеження:

1. По провідному обладнанню:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j \le B_j; \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

2. По випуску товарної продукції:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i x_i \ge S; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. По попиту на окремі види продукції

$$x_j \le D'_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_j \le D_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

4. По фонду оплати праці робочих:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i x_i \ge R; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

5. По собівартості продукції:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \le C_j; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

6. Умови невід'ємності змінних:

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отримані результати від оптимізації виробничої програми записуємо в таблицю 8.4.

Таблиця 8.4

Найменування показника	Значення показника		Відхилення	
	До оптимізації	Після оптимізації	Абсолютне	Відносне
1. Випуск продукції, т				
X_1				
X_2				
X_3				
X_4				
2. Товарна продукція, тис. грн.				
3. Собівартість випуску продукції, тис. грн.				
4. Прибуток, тис. грн.				
5. Рентабельність продукції, %				
6. Витрати на 1 грн. ТП, грн.				
7. Потреби в сировині (молоко), т				
8. Використання фонду оплати праці, тис. грн.				

Розрахунок моделі виконують за порядком, наведеним у лабораторній роботі № 7. У висновку треба описати як оптимізація дозволила поліпшити основні економічні показники, наведені в таблиці 8.4.

Лабораторна робота № 9
«Оптимізація виробничої програми ковбасного виробництва»

Задача

У табл. 9.1 дані асортимент виробів, що випускаються в розрізі основних показників роботи підприємства.

Побудувати модель оптимальної річної програми підприємства в загальному, табличному та аналітичному вигляді за критерієм оптимізації – максимум прибутку.

Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент, який задається варіантом.

Побудувати матрицю коефіцієнтів.

Виконати розв'язання задачі на ПК.

Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Таблиця 9.1

Вихідні дані для оптимізації ковбасного виробництва

Асортимент продукції, найменування ковбаси	Норми витрат сировини, т/т		Оптова ціна 1 тонни, грн	Собівар-тість 1 тонни, грн	Трудо-міскість 1 тонни люд./год.	Норми часу роботи облад-нання, год./т	Попит	
	ялови-чина	свини-на					міні-маль-ний	мак-си-маль-ний
1.Останкінська	0,7	0,25	5170	4500	57,5	3,8	500	700
2.Лікарська	0,7	0,25	4870	4320	57,5	3,8	600	900
3.Шахтарська	0,7	0,25	3850	3360	57,5	3,8	1000	1200
4.Чайна	0,7	0,25	3320	3010	57,5	3,8	300	500
5.Сосиски молочні	0,5	0,5	4160	3865	55,5	5,2	100	200
6.Сосиски яловичі	0,7	0,25	4050	3800	55,5	5,2	400	500
7.Сосиски шкільні	0,5	0,5	3980	3750	55,5	5,2	300	400
8.Сардельки яловичі	0,7	0,25	4240	3970	55,7	5,2	120	160
9.Одеська п/к	0,3	0,3	6600	5400	74,2	42,4	500	700
10.Московська в/к	0,3	0,3	10270	8500	74,2	42,4	700	800
11.Сервелат в/к	0,3	0,3	10500	8950	74,2	42,4	450	550
12.Московська с/к	0,2	0,5	21000	15600	81,0	158,3	50	70

Варіант визначається за допомогою табл. 9.2. Варіант задається чотирма цифрами, якими позначено номери асортименту виробів, на основі яких студент буде будувати свою модель.

Врахувати обсяг ресурсів на свій асортимент. Наявність на підприємстві ресурсів така: яловичини – 2000 т; свинини – 750 т; загальна трудомісткість – 190000 люд-год.; час роботи обладнання – 20000 год. на рік.

Таблиця 9.2

	X_1	X_2	X_3	X_4
Варіант 1	1	2	3	4
Варіант 2	5	6	7	8
Варіант 3	9	10	11	12
Варіант 4	2	3	4	5
Варіант 5	6	7	8	9
Варіант 6	10	11	12	1
Варіант 7	3	4	5	6
Варіант 8	7	8	9	10
Варіант 9	1	3	5	7
Варіант 10	2	4	6	8

Приклад виконання задачі оптимізації виробничої програми підприємства (цеху, дільниці)

Для побудови плану виробництва різних видів продукції на підприємстві потрібно керуватись наявністю, обсягами і нормами використання різних видів ресурсів на одиницю продукції. Також потрібно враховувати розмір попиту на окремі види продукції і ефективність їх виробництва (ціна, прибуток, рентабельність або собівартість одиниці продукції).

Формулювання моделі задачі розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства: потрібно визначити оптимальну виробничу програму підприємства по випуску різних видів продукції на основі наявних ресурсів з метою досягнення максимального ефекту від випуску продукції.

Для побудови економіко-математичної моделі задачі введемо такі позначення:

x_j – обсяг виробництва j-того виду продукції.

i – індекс виду ресурсу, i=1,2,...,n;

j – індекс виду продукції, j=1,2,...,m;

a_{ij} – норма використання і-того виду ресурсу на одиницю j-того виду продукції;

A_i – обсяг запасів і-того виду ресурсу;

B_j – величина договірних поставок j-того виду продукції;

C_j – ефективність (ціна або прибуток, тоді функція цілі максимізується , або собівартість – тоді мінімізується) виробництва одиниці продукції j-того виду;

Враховуючи введені позначення, математична модель набуде вигляду:

$F(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \rightarrow \max(\min)$ в залежності від вибору c_j .

Обмеження:

1) по використанню наявних ресурсів

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le A_i ;$$

2) по випуску деяких видів продукції

$x_j <$ або $\ge B_j$, $j = 1,2,...,n;$

3) умова невід'ємності даних

$x_j >= 0$, $j = 1,2,...,n.$

Приклад № 1 виконання лабораторної роботи

Визначити оптимальний асортимент продукції ковбасного цеху з метою максимізації прибутку. Дані для розрахунку в табл. 9.3

Таблиця 9.3

Вихідні дані для оптимізації ковбасного виробництва

Асортимент продукції, найменування ковбаси	Норми витрат сировини,т/т		Оптова ціна 1 тонни, грн	Собівартість 1 тонни грн	Трудомісткість 1 тонни люд./год.	Норми часу роботи обладнання год./т	Попит	
	яловичина	свинина					мінімальний	максимальний
1.Останкінська	0,7	0,25	5170	4500	57,5	3,8	500	700
2. Лікарська	0,7	0,25	4870	4320	57,5	3,8	600	900
3, Сосиски молочні	0,5	0,5	4160	3865	55,5	5,2	100	200
4.Московська с/к	0,2	0,5	21000,	15600	81,0	158,3	50	70

Розв'язок

Спочатку побудуємо функцію цілі, для цього розрахуємо прибуток однієї тони кожного виду продукції.

Функція цілі – максимум прибутку – запишеться так:

$P(x) = (5170 - 4500)X_1 + (4870 - 4320)X_2 + (4160 - 3865)X_3 + (21000 - 15600)X_4 =$

$= 670X_1 + 550X_2 + 295X_3 + 5400X_4 \rightarrow \max.$

Запишемо всі можливі за таблицею обмеження. Для цього потрібно розрахувати обсяги ресурсів всіх видів на свій асортимент продукції.

Кількість яловичини на весь випуск продукції розраховується як сума добутків норми витрат яловичини на 1 т і максимальний попит на відповідну продукцію:

$$0,7 \cdot 700 + 0,7 \cdot 900 + 0,5 \cdot 200 + 0,2 \cdot 70 = 490+630+100+14 = 1234 \text{ т.}$$

Аналогічно розрахуємо кількість свинини на весь випуск:

$0,25 \cdot 700 + 0,25 \cdot 900 + 0,5 \cdot 200 + 0,5 \cdot 70 = 535$ т.

Аналогічно розрахуємо загальну трудомісткість продукції на весь випуск продукції:

$57,5 \cdot 700 + 57,5 \cdot 900 + 55,5 \cdot 200 + 81,0 \cdot 70 = 108770$ люд./год.

Аналогічно розрахуємо загальний час роботи обладнання:

$3,8 \cdot 700 + 3,8 \cdot 900 + 5,2 \cdot 200 + 158,3 \cdot 70 = 18201$ год.

Тепер запишемо систему обмежень задачі:

1)За яловичиною:

$0,7X_1+0,7X_2+0,5X_3+0_12X_4 \leq 1234;$

2)За свининою:

$0,25X_1 +0,25X_2+0,5X_3+0,5X_4 \leq 535;$

3)За трудовими ресурсами (трудомісткість):

$57,5X_1 +57,5X_2+55,5X_3+81,0X_4 \leq 108770;$

4)За часом роботи обладнання:

$3,8*X_1 +3,8X_2+5,2X_3+158,3X_4 \leq 8201.$

5)За попитом:

$X_1 \leq 700; \quad X_1 \geq 500;$
$X_2 \leq 900; \quad X_2 \geq 600;$
$X_3 \leq 200; \quad X_3 \geq 100;$
$X_4 \leq 70; \quad X_4 \geq 50.$

Розв'язавши задачу за допомогою симплекс-метода на ПК дістанемо таке рішення:

$X_1 = 700$т;
$X_2 = 900$т;
$X_3 = 200$т;
$X_4 = 70$т.

Проведемо аналіз отриманих результатів за табл. 9.4

Таблиця 9.4

Вплив оптимізації асортиментної програми на основні техніко-економічні показники роботи підприємства

№ п/п	Назва показника	До оптимізації	Після оптимізації	Відхилення
1.	Випуск продукції, т:			
	Останкінська	500	700	+200
	Лікарська	600	900	+300
	Сосиски молочні	100	200	+100
	Московська с/к	50	70	+20
2.	Вартість продукції, тис. грн.	6973	10304	+3331
3.	Собівартість, тис. грн..	6008,5	8903	+2894,5
4.	Прибуток, тис. грн.	964,5	1401	+436,5
5.	Рентабельність продукції, %	16,05	15,73	–0,32
6.	Витрати на 1 грн. продукції,коп./грн.	86,17	86,40	+0,23

Кількість продукції до оптимізації записуємо за мінімальним попитом, а після – той що отримали внаслідок рішення задачі.

Вартість продукції до і після оптимізації розраховуємо, як суму добутків оптової ціни 1 т і відповідної кількості продукції до і після оптимізації.

До оптимізації :

$5170 \cdot 500 + 4870 \cdot 600 + 4160 \cdot 100 + 21000 \cdot 50 = 6973$ тис. грн.

Після оптимізації:

$5170 \cdot 700 + 4870 \cdot 900 + 4160 \cdot 200 + 21000 \cdot 70 = 10304$ тис. грн.

Аналогічно розраховуємо собівартість випуску продукції до і після оптимізації як суму добутків собівартості 1 т продукції і відповідної кількості продукції до і після оптимізації.

До оптимізації:

$4500 \cdot 500 + 4320 \cdot 600 + 3865 \cdot 100 + 15600 \cdot 50 = 6008{,}5$ тис. грн.

Після оптимізації:

$1500 \cdot 700 + 4320 \cdot 900 + 3865 \cdot 200 + 15600 \cdot 70 = 8903$ тис. грн.

Прибуток розраховуємо як різницю між вартістю і собівартістю продукції. Рентабельність продукції розраховується як відношення прибутку до собівартості продукції помножене на 100%. Витрати на 1 грн. продукції розраховуються як відношення собівартості до вартості продукції.

Висновок: проведену оптимізацію виробничої програми підприємства не можна вважати доцільною через те, що рентабельність продукції падає, а витрати на одну гривню зростають.

Приклад № 2 виконання лабораторної роботи

В табл. 9.5 подано дані щодо асортименту виробів, який випускається, в розрізі основних показників роботи підприємства.

Потрібно: побудувати модель оптимальної виробничої річної програми підприємства за критерієм – максимум прибутку; врахувати обсяг ресурсів на свій асортимент. Наявність ресурсів така: яловичини – 2000 т; свинини – 750 т; загальна трудомісткість – 190000 люд-год.; час роботи обладнання – 20000 год. на рік.

Таблиця 9.5

Вихідні дані для оптимізації ковбасного виробництва

Найменування ковбаси	Норми витрат сировини, т/т		Ціна 1 тонни грн.	Витрати на 1 т, грн.	Трудомісткість 1 т, люд./год.	Норми часу роб. облад., год./т	Випуск продукції до оптиці-зації, т	Максимальний попит
	Яловичина	Свинина						
1.Останкінська	0,6	0,35	5170	4500	58,4	4,0	500	700
2.Лікарська	0,5	0,45	4870	4320	54,6	4,0	600	900
3.Шахтарська	0,7	0,25	3850	3360	55,2	3,8	1000	1200
4.Чайна	0,8	0,15	3320	3010	57,5	3,8	300	500

Розв'язок

Спочатку побудуємо математичну модель задачі, для цього визначимо спочатку змінні: X_j – випуск продукції j-того виду. В даній моделі чотири змінні X_1, X_2, X_3 і X_4 – це відповідно випуск ковбас "Останкінська", "Лікарська", "Шахтарська" і "Чайна".

Для того, щоб побудувати функцію цілі – максимум річного прибутку – потрібно визначити прибуток з виробітку 1 т всіх видів продукції:

"Останкінська": 5170 – 4500 = 670 грн.;

"Лікарська": 4870 – 4320 = 550 грн.;

"Шахтарська": 3850 – 3360 = 490 грн.;

"Чайна": 3320 – 3010 = 310 грн.

Функція цілі максимум прибутку запишеться так:

$$F(x) = 670X_1 + 550X_2 + 490X_3 + 310X_4 \rightarrow \max$$

Обмеження задачі:

– за яловичиною:

$$0,6X_1 + 0,5X_2 + 0,7X_3 + 0,8X_4 \leq 2000;$$

– за свининою:

$$0,35X_1 + 0,45X_2 + 0,25X_3 + 0,15X_4 \leq 750;$$

– за трудомісткістю:

$$58,4X_1 + 54,6X_2 + 55,2X_3 + 57,2X_4 \leq 190000;$$

– за часом роботи обладнання:

$4X_1 + 4X_2 + 3{,}8X_3 + 3{,}8X_4 \le 20000$;

– за попитом:

$X_1 \le 700$; $X_2 \le 900$; $X_3 \le 1200$; $X_4 \le 500$;

– умова невід'ємності даних:

$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$.

Вирішуємо задачу за допомогою симплекс-методу в Excel з використанням інструменту "Пошук рішення" в меню "Сервіс". Для цього побудуємо на листі Excel табл. 9.6.

Таблиця 9.6

Матриця коефіцієнтів для рішення задачі оптимізації виробничої програми підприємства

Найменування змінних	Значення змінних	Функція цілі	Обмеження							
			За яловичиною	За свининою	За трудомісткістю	За часом роботи обладнання	За попитом на			
							X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	500	670	0,6	0,35	58,4	4,0	1			
X_2	600	550	0,5	0,45	54,6	4,0		1		
X_3	1000	490	0,7	0,25	55,2	3,8			1	
X_4	300	310	0,8	0,15	57,5	3,8				1
Формули обмежень і функції цілі										
Знак обмеження		max	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤
Запас ресурсу			**2000**	**750**	**190000**	**20000**	**700**	**900**	**1200**	**500**

Отримали таке рішення задачі: X_1=700 т; X_2=280 т; X_3=1200 т; X_4=500 т.

Після того як рішення отримано, потрібно надрукувати звіт про результати. Звіт про результати – це один із варіантів подання рішення задачі за допомогою інструменту "Пошук рішення" в меню "Сервіс".

Проведемо аналіз результатів за допомогою табл. 9.7.

Таблиця 9.7

Економічна ефективність оптимального рішення

Найменування показника	Значення показника		Відхилення	
	До оптимізації	Після оптимізації	Абсолютне	Відносне
1. Випуск продукції, т				
“Останкінська”	500	700	200	40
“Лікарська”	600	280	–320	–53,33
“Шахтарська”	1000	1200	200	20
“Чайна”	300	500	200	66,67
2. Вартість випущеної продукції, грн.	10353000	11262600	909600	8,79
3. Вартість витрат на випущену продукцію, грн.	9105000	9896600	791600	8,69
4. Прибуток, грн.	1248000	1366000	118000	9,46
5. Рентабельність продукції, %	13,7	13,8	0,10	–
6. Витрати на одиницю продукції, грн.	0,8795	0,8787	–0,0008	–0,09
7. Використання ресурсів:				
– яловичина, т	2000	1800	–200	–10,00
– свинина, т	750	750	0	0,00
– трудомісткість, люд-год.	190000	151158	–38842	–20,44
– час роботи обладнання, год.	20000	10380	–9620	–48,10

Вартість продукції до і після оптимізації розраховуємо, як суму добутків ціни 1 т і відповідної кількості продукції до і після оптимізації. Аналогічно розраховуємо собівартість випуску продукції до і після оптимізації як суму добутків собівартості 1 т продукції і відповідної кількості продукції до і після оптимізації.

Економічний аналіз отриманих результатів

Дану оптимізацію виробничої програми можна вважати доцільною, так як прибуток зростає на 9,6% і складе 1366 тис. грн., також рентабельність продукції зросте на 0,1 %, а витрати на одиницю продукції знизяться на 0,008 коп., що говорить про підвищення ефективності виробництва.

Серед ресурсів повністю використовується лише свинина, тобто цей ресурс є лімітним на підприємстві. Якщо збільшити запас свинини, то можливо збільшити випуск продукції на підприємстві.

Лабораторна робота № 10
«Оптимізація виробничої програми хлібозаводу»

Задача. На хлібозаводі випускається 10 сортів хлібобулочних виробів.
Види продукції визначаються за допомогою табл. 10.1 та 10.2.
Кількість печей – за варіантом (табл.10.2).
Річна продуктивність печі – за варіантом (табл.10.3).
Ціна на сировину – в таблиці 10.4.
Рецептура за асортиментом – в таблиці 10.5.

Згідно варіанту потрібно:

1. Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент
2. Побудувати модель оптимального річного плану підприємства у загальному вигляді по критерію оптимізації – **максимальний прибуток.**
3. За допомогою отриманих нерівностей чи рівнянь побудувати та записати матрицю коефіцієнтів і функцію цілі.
4. Вирішити задачу за допомогою програми SIMPL.EXE або функції "Поиск решения".
5. Заповнити вихідну таблицю та дати економічний аналіз.

Таблиця 10.1

№ варіанту	Номери видів продукції									
1	1	5	7	11	12	32	33	42	43	44
2	1	6	8	11	13	32	34	42	45	47
3	1	4	9	11	14	32	35	42	48	49
4	2	5	10	11	15	32	36	42	50	51
5	2	6	11	16	17	32	37	43	45	48
6	2	4	12	13	18	32	38	43	46	49
7	3	5	12	14	19	32	39	43	47	50
8	3	6	12	15	20	32	40	44	45	49
9	3	4	12	16	21	32	41	44	47	51
10	1	5	13	14	22	33	36	45	50	52

Таблиця 10.2

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Макс.	Серед.	План	
1	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
2	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
3	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
4	Батон дорожній в уп.	950	783,75	50	500	275	400	1,3
5	Батон святковий в уп.	1300	957,5	50	500	275	400	1,3
6	Батон святковий	1100	907,5	50	500	275	400	1,3
7	Булка дніпропетровська	15000	1267,5	0	50	25	10	2
8	Булка дніпропетровська в уп.	1650	1394,25	0	50	25	5	2
9	Булка дніпропетровська в уп.	1650	1394,25	0	50	25	5	2
10	Булка Завиток	1111	938,89	0	50	25	10	2
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
13	Булочка столична	1666,67	1416,67	25	75	50	70	6
14	Булочка столична в уп.	1833,33	1558,33	25	75	50	35	6
15	Булочка харківська	2000	1700	25	75	50	70	6
16	Булочка харківська в уп.	2250	1912,50	25	75	50	35	6
17	Вироби здібні з повидлом	1666,67	1408,34	0	50	25	0	9, 10
18	Витушка київська	1766,67	1492,84	0	50	25	0	9, 10
19	Здоба з повидлом	2300	1943,5	0	50	25	5	9, 10
20	Здоба столична	2500	2112,5	0	50	25	10	9, 10
21	Здоба столична в уп.	2700	2281,5	0	50	25	5	9, 10
22	Калач український	2100	1774,5	0	100	50	0	7, 8
23	Калач український в уп.	2185,72	1846,93	0	100	50	0	7, 8
24	Паляниця столична	1055,83	892,18	0	500	250	100	5, 6
25	Паляниця столична в уп.	1094,44	924,8	0	500	250	50	5, 6
26	Плетінка з маком	941,67	795,71	0	50	25	25	4
27	Плетінка з маком	1041,67	880,21	0	50	25	25	4
28	Плетінка з маком в уп.	1300	1098,50	0	50	25	10	4
29	Плетінка українська	2000	1690	0	50	25	25	4
30	Плюшка московська	2300	1943,5	0	50	25	0	7, 8

Продовження таблиці 10.2

31	Плюшка московська в уп.	2493,72	2107,19	0	50	25	0	7, 8
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
33	Ріжки з повидлом	1840	1610	10	150	80	140	9, 10
34	Ріжки з повидлом	2100	1837,5	10	150	80	140	9, 10
35	Ріжки з повидлом	2080	1820	10	150	80	125	9, 10
36	Ріжки з повидлом в уп.	1993	1743,88	10	150	80	60	9, 10
37	Ріжки з повидлом в уп.	1666,67	1458,34	10	150	80	50	9, 10
38	Рогалик маковий	2750	2406,25	10	150	80	100	7, 8
39	Рогалі козацькі	1184,3	1036,26	10	150	80	75	7, 8
40	Рогалі козацькі в уп.	1335	1168,13	10	150	80	30	7, 8
41	Ріжки з маком	2033	1779,05	10	150	80	75	7, 8
42	Хліб білий	950	855,	100	500	300	300	4, 5
43	Хліб висівковий	750	675	100	500	300	300	4, 5
44	Хліб гірчичний	916,67	825	100	500	300	300	4, 5
45	Хліб пшеничний	826,67	744	100	500	300	300	4, 5
46	Хліб пшеничний	890	801	100	500	300	300	4, 5
47	Хліб святошинський	650	585	100	500	300	300	6
48	Хліб святошинський в уп.	712,5	641,25	100	500	300	150	6
49	Хліб хотинський	541,67	487,5	100	500	300	300	6
50	Хліб хотинський в уп.	593,75	534,38	100	500	300	300	6
51	Хлібці з висівками	940	846	100	500	300	300	6
52	Хлібці з висівками в уп.	1040	936	100	500	300	300	6

Таблиця 10.3

Річна продуктивність печей, т/рік.

1	Піч БН-50 № 1	8970
2	Піч БН-50 № 2	8970
3	Піч БН-50 № 3	8970
4	Піч БН-50 № 4	8970
5	Піч БН-50 № 5	8970
6	Піч БН-50 № 6	8970
7	Піч БН-50 № 7	8970
8	Піч БН-50 № 8	8970
9	ПКЄ-9-03	547,2
10	ПКЄ-9-03	548,2

Таблиця 10.4

№ п/п	Назва сировини	Одиниця виміру	Ціна за одиницю
1	Борошно вищ.гат.	тн	516,67
2	Борошно 1 гат.	тн	413,98
3	Ванілін	кг	62,42
4	Висівки	тн	79,17
5	Дріжджі конц.	кг	0,91
6	Дріжджі прес.	кг	1,03
7	Мак	кг	5,67
8	Маргарин	кг	2,76
9	Масло гірчичне	кг	1,65
10	Меланж	кг	3,75
11	Молоко сухе	кг	2,94
12	Олія	кг	2,42
13	Оцет	л	0,87
14	Плівка	тн	1043,12
15	Повидло	кг	1,4
16	Сабза	кг	3,08
17	Сіль	тн	60
18	Цукор	тн	930
19	Цукрова пудра	тн	940

Таблиця 10.5

№	Види продукції	Вихід продукції, кг	Борошно вищ. гат.	Борошно 1 гат.	Ванілін	Висівки	Дріжджі конц.	Дріжджі прес.	Мак	Маргарин	Масло гірчичне	Меланж	Молоко сухе	Олія	Оцет	Плівка	Повидло	Сабза	Сіль	Цукор	Цукрова пудра
			1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
1	Батон дорожній	131,7	100				1,2							2,125					1,3	2	
2	Батон дорожній	131,7	100					3,0		0,1				2,125					1,3	2	
3	Батон дорожній	131,7	100				2,0												1,5	6	
4	Батон дорожній в уп.	131,7	100				2,0									7			1,5	6	
5	Батон святковий в уп.	143,5	100				1,2							2,125		5		7	1,3	8	
6	Батон святковий	142,5	100				1,6						2,0	2,550				7	1,4	5	
7	Булка дніпропетровська	163,0	100		0,020		1,3					0,8	2,0					12	1,4	17	
8	Булка дніпропетровська в уп.	163,0	100		0,020		3,2			13,0		0,8	2,0			7		12	1,0	17	
9	Булка дніпропетровська в уп.	163,0	100		0,020		4,0			13,0		0,8	2,0			7		12	1,0	17	
10	Булка Завиток	137,0	100		0,020		3,2			13,0		0,8						12	1,0	5	
11	Булочка родзинка	158,5	100				1,2		1,5					3,400				15	1,5	6	
12	Булочка Світанок	150,0	100				2,4			8,9		5,0	2,2					15	1,0	14	1,0
13	Булочка столична	150,0	100		0,050		4,0			20,0		3,0	3,0						1,0	15	2,0
14	Булочка столична в уп.	150,0	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0			7			1,0	20	2,0
15	Булочка харківська	151,0	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0						1,0	20	1,0
16	Булочка харківська в уп.	151,0	100		0,020		2,0			10,0		3,0	3,0			14			1,0	15	1,0
17	Вироби здібні з повидлом	155,0	100		0,020		2,0			10,0		3,0					15		1,0	15	1,0
18	Витушка київська	131,0	100		0,020		2,4			10,0		3,0			0,3		10		1,0	14	1,5
19	Здоба з повидлом	165,3	100				1,2							2,125			20		1,3	20	
20	Здоба столична	150,0	100		0,050		3,2			12,7		4,0	3,0						1,0	16	
21	Здоба столична в уп.	150,0	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0			14			1,0	20	

Продовження таблиці 10.5

22	Калач український	136,5	100		0,050		4,0			12,0		3,0	3,0				5	1,0	20	
23	Калач український в уп.	136,5	100		0,025		2,4			7,0			1,0			9	5	1,0	12	
24	Паляниця столична	129,0	100		0,025		2,4			7,0			1,0	0,850				1,0	12	
25	Паляниця столична в уп.	129,0	100		0,025		1,6					1,5	1,0	0,850		7		1,5	12	
26	Плетінка з маком	135,0	100				1,6		1,0			1,5		0,850				1,5	10	
27	Плетінка з маком	135,0	100				0,8		1,0					2,125	0,3			1,5	10	
28	Плетінка з маком в уп.	135,0	100				0,8		1,0					2,125	0,3	7		1,5	7	
29	Плетінка українська	150,0	100				0,8		1,0					2,125				1,5	4	
30	Плюшка московська	155,0	100		0,025			3,2		9,0		6,0	2,0					1,0	17	
31	Плюшка московська в уп.	155,0	100		0,025		3,2			15,2		6,8	3,0			14		1,0	22	
32	Ріжки дніпровські	132,5	100		0,025		3,2			15,2		6,0	3,0					1,0	22	
33	Ріжки з повидлом	161,1	100				3,2						9,0				20	1,5	15	
34	Ріжки з повидлом	161,7	100					3,0		10,0			9,0				20	1,0	15	2,0
35	Ріжки з повидлом	161,7	100				3,0			10,0			9,0				20	1,0	15	2,0
36	Ріжки з повидлом в уп.	161,1	100				2,4			10,0			9,0			14	20	1,0	15	2,0
37	Ріжки з повидлом в уп.	161,7	100					3,0		10,0			9,0			14	20	1,0	15	2,0
38	Рогалик маковий	165,0	100				2,4		20,0	10,0								1,0	15	2,0
39	Рогалі козацькі	132,0	100		0,050		4,0			8,0				2,000	0,3			1,0	28	2,0
40	Рогалі козацькі в уп.	132,0	100		0,050		2,4			5,0				2,000	0,3	7		1,5	2	
41	Ріжки з маком	153,3	100					2,4	10,0	5,0				2,000				1,5	12	
42	Хліб білий	129,5	100				2,4			8,0		3,0					12	1,0	7	
43	Хліб висівковий	132,5	100		0,020		4,0			13,0		0,8						1,0	2	
44	Хліб гірчичний	140,0	100				1,2				6				0,3			1,3		
45	Хліб пшеничний	127,0	100				0,8								0,3			1,3		
46	Хліб пшеничний	129,2	100				1,0								0,3			1,3		
47	Хліб святошинський	132,5	90			10	1,6							3,000	0,3			1,5	1	
48	Хліб святошинський в уп.	132,5	90			10	2,0							3,000	0,3	7		1,5	1	
49	Хліб хотинський	131,5		100			1,2							1,700				1,5		
50	Хліб хотинський в уп.	131,5		100			1,2							1,700		6		1,5		
51	Хлібці з висівками	132,5		50		50	1,2											1,5		
52	Хлібці з висівками в уп.	131,5		50		50	1,2									6		1,5		

Приклад виконання лабораторної роботи

Робоча модель задачі.

Цільова функція – отримати оптимальний випуск хлібобулочних виробів, що забезпечить **максимальний прибуток** при певних обмеженнях по продуктивності ліній, попиту, ресурсах.

$$F(x) = \Sigma P_j \tilde{X_j} \rightarrow max,$$

де P_j – прибуток по j-му виду хлібобулочних виробів, тис. грн.

X_j – оптимальний випуск j-го виду хлібобулочних виробів.

$$P_j = D_j - C_j,$$

де D_j - оптова ціна 1 т j-го виду виробів, грн.

C_j - собівартість 1 т j-го виду виробів, грн.

Оптимальні випуски, т:

X_1 – Батон степовий;

$\tilde{X_2}$ – Батон соціальний;

X_3 – Хліб новий пш.ф. І гат.;

X_4 – Хліб білий соціальний ф.;

X_5 – Хліб Дарницький подов.;

X_6 – Хліб селянський ф.;

X_7 – Хліб Дарницький подов.соц. 0,7;

X_8 – Хліб висівковий 0,3;

X_9 – Булка апетитна 0,3;

X_{10} – Булка смачна 0,5;

X_{11} – Булка калорійна 0,4;

X_{12} – Булка калорійна 0,4.

Хліб білий соціальний формовий – збитковий.

Вихідні дані до складання моделі оптимального плану наведені в таблицях 10.6, 10.7.

Таблиця 10.6

№	Види продукції	Обсяг виробництва	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Прибуток	Попит, т			№ печі
						Мінім.	Максим.	Серед.	
1	Батон степовий	99	3690	2760	930	50	200	125	3
2	Батон соціальний	13,2	3090	2760	330	10	100	55	3
3	Хліб новий пш.ф. І гат.	495	1970	1533	437	100	550	400	1
4	Хліб білий соціальний ф.	23,76	1530	1558	–28	20	30	25	1
5	Хліб Дарницький подов.	102,3	1830	1632	198	80	150	125	2
6	Хліб селянський ф.	204,6	1845	1532	313	150	200	225	2
7	Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	16,5	1750	1642	108	15	50	22,5	2
8	Хліб висівковий 0,3	18,0	3600	2830	770	10	50	22,5	3
9	Булка апетитна 0,3	29,0	4200	3796	404	10	50	32,5	3
10	Булка смачна 0,4	133,0	6600	4666	1934	10	200	140	3
11	Булка смачна 0,5	40,0	6600	4707	1893	15	100	42,5	3
12	Булка калорійна 0,4	52,0	7300	6216	1084	50	80	55	3

Таблиця 10.7

Річна продуктивність печей	
Піч № 1	3900
Піч № 2	3400
Піч № 3	2400

Використовуючи дані таблиці 10.6, визначимо прибуток по кожному виду:

$P_1 = 930$ грн.

$P_2 = 330$ грн.

$P_3 = 437$ грн.

$P_4 = -28$ грн.

$P_5 = 198$ грн.

P_6 = 313 грн.

P_7 = 108 грн.

P_8 = 770 грн.

P_9 = 404 грн.

P_{10} = 1934 грн.

P_{11} = 1893 грн.

P_{12} = 1084 грн.

Тоді **цільова функція** моделі оптимізації прийме наступний вигляд:

$$930\ X_1 + 330\ X_2 + 437X_3 - 28\ X_4 + 198\ X_5 + 313\ X_6 +$$

$$+ 108\ X_7 + 770\ X_8 + 404\ X_9 + 1934\ X_{10} + 1893\ X_{11} + 1084\ X_{12} \rightarrow \max.$$

Обмеження:

- **по попиту:**

$$T_j \min < X_j < T_j \max,$$

де. T_j min , T_j max – мінімальний та максимальний попит на j-й вид продукції.

- **по продуктивності ліній:**

$$\sum_{I=j}^{n} Xj \cdot Kj \le R_y,$$

де $\mathbf{K_j}$ – коефіцієнт використання потужності j-го виду продукції;
$\mathbf{R_y}$ – річна продуктивність у-тої лінії для кожного j.

- **по витратах на сировину:**

$$B_0 \le B$$

B, B_0 – вартість сировини в базовому і оптимальному варіанті.

БАЗОВИЙ ВАРІАНТ.

В базовому варіанті визначаються обсяги закупівлі сировинних ресурсів у вартісному виразі для забезпечення виробництва продукції в запланованих обсягах та одночасно розраховуються техніко-економічні показники: обсяг товарної продукції, витрати на виробництво, загальний прибуток, рентабельність, витрати на 1 грн. товарної продукції.

Вихідні дані представлені в таблиці 10.8.

Таблиця 10.8

ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ

_	Батон степовий	Батон соціальний	Хліб новий пш.ф. І гат.	Хліб білий соціальний ф.	Хліб Дарницький подовий	Хліб селянський ф.	Хліб Дарницький подовий соціальний 0,7	Хліб висівковий 0,3	Булка апетитна 0,3	Булка смачна 0,4	Булка смачна 0,5	Булка калорійна 0,4	Загалом	
_	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
Обсяг виробництва	99	13,2	495	23,76	102,3	204,6	16,5	18	29	133	40,00	52,00	1226,36	тонн
Нижня межа попиту	50	10	100	20	80	150	15	10	10	10	15	50		тонн
Верхня межа попиту	200	100	550	30	150	200	50	50	50	200	100	80		тонн
Коефіцієнти цільової функції	930,00	330,00	437,00	-28,00	198,00	313,00	108,00	770,00	404,00	1934,00	1893,00	1084,00	813038,92	тис.грн.
Оптова ціна 1 т	3690,00	3090,00	1970,00	1530,00	1830,00	1845,00	1750,00	3600,00	4200,00	6600,00	6600,00	7300,00	3719171,8	тис.грн.
Собівартість випуску 1 т	2760,00	2760,00	1533,00	1558,00	1632,00	1532,00	1642,00	2830,00	3796,00	4666,00	4707,00	6216,00	2906132,88	тис.грн.

Продовження таблиці 10.8

ОБМЕЖЕННЯ ПО СИРОВИННІ													Ліва частина	Напрямок	Вартість борошна	Ціна за 1 т	Вартість
Вихід продукції, кг	135,5	146,0	134,0	134,0	148,0	150,0	148,0	124,6	136,0	148,8	135,0	135,5					
Борошно 1 гатунку	100	100	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100					
К-ть борошна вищ. гат.	73,06	9,04	0	0	0	0	0	0	21,32	89,38	29,63	38,38	260,815	←		1300	339059,62
Борошно 1 гат.	0	0	100	100	40	40	40	88	0	0	0	0					
К-ть борошна 1 гат.	0	0	369,40	17,73	27,65	54,56	4,46	12,71	0	0	0	0	486,515			1700	827075,70
Борошно житнє	0	0	0	0	60	60	60	0	0	0	0	0					
К-ть борошна житнього	0	0	0	0	41,47	81,84	6,69	0	0	0	0	0	130,002	←		1600	208003,46
Висівки	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0					
К-ть висівків	0	0	0	0	0	0	0	1,7335	0	0	0	0	1,734	←		340	589,41
Загальна кількість борошна	**73,06**	**9,04**	**369,4**	**17,73**	**69,12**	**136,4**	**11,15**	**14,45**	**21,32**	**89,38**	**29,63**	**38,38**	**879,1**	←	**1374728**		
Сіль	1,3	1,5	1,5	1,5	1,3	1,3	1,5	1,3	1	1,4	1	1	12,06	←		1,2	14,48
Дріжджі конц.	1	2	1,2	1,2	0,8	0	1,2	1,6	1,2	4	1,3	3,2	11,92	←		5,6	66,75
Цукор	0	1	0	0	0	2	10	0	28	17	17	16	36,28	←		6,5	235,79
Маргарин	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	9	12	8,43	←		8,3	69,95
Яйце	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	7,87	←		16,25	127,88
Ванілін	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	1,73	←		97	168,15
Ізюм	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	4,61	←		17	78,29
Часник	0	0	0	0	0	0	0	0	2,3	0	0	0	0,49	←		20	9,81
Олія	0	3	1,7	0	0	0	2,1	0,85	0	2	0	0	1197,05	←		6,5	7780,83
Загальна вартість сировини	**94986,78**	**12012,59**	**633486,3**	**30144,79**	**113363,6**	**223715,9**	**18517,21**	**22479,68**	**27770,89**	**118118,15**	**38599,98**	**50084,24**	**1383280**		**1383280**	сума =	**1383280**
Витрати сировини на 1 т хлібобулочних виробів	959,46	910,04	1279,77	1268,72	1108,15	1093,43	1122,25	1248,87	957,62	888,11	965,00	963,16	1127,96				

Продовження таблиці 10.8

ПРОДУКТИВНІСТЬ ЛІНІЙ

Піч № 1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	518,76	←	3900
Піч № 2	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	323,4	←	3400
Піч № 3	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	384,2	←	2400

При переході до оптимізаційного варіанту необхідно скопіювати вихідні дані з базового варіанту, при цьому в першій таблиці будуть вказані такі величини: оптимальний обсяг виробництва, нижня та верхня межа попиту, коефіцієнт цільової функції, оптова ціна 1т, собівартість 1 т продукції.

Друга таблиця – це обмеження, які ми вводимо. В нашому варіанті встановлені такі обмеження: по продуктивності ліній, по попиту на кожний вид продукції, по витратах на сировину.

Пакет EXCEL дозволяє обрахувати оптимізаційний варіант, коли введені всі обмеження. Ми заходимо в меню "Сервіс", далі "Пошук рішення". На моніторі з'являється діалогове вікно з трьома рамками. В першій рамці розміщуються адреси клітинок цільової функції, в другій – оптимального випуску продукції, в третій – наших обмежень. Після перевірки правильності адрес наших показників, запускаємо програму на виконання.

В результаті виконання програми повинно з'явитися повідомлення про коректність моделі і правильності розрахунків. Це повідомлення міститься у вікні, яке дозволяє додатково обрахувати три звіти: по результатам, по границям, по стійкості.

В результаті проведеної оптимізації підприємство отримає можливість збільшити випуск продукції на 86,7 т, або на 6,61 %.

Відбудуться зміни по асортименту (табл. 10.9).

Таблиця 10.9

Показники	Одиниця виміру	До оптим.	Після оптим.	+ –	%
1. Випуск продукції – всього	тонн	1226,4	1313,1	86,7	6,61%
в тому числі в асортименті: Батон степовий	т	99	200,0	101,0	50,5%
Батон соціальний	т	13,2	100,0	86,8	86,8%
Хліб новий пш.ф. І гат.	т	495	283,1	-211,9	-74,8%
Хліб білий соціальний ф.	т	23,76	10,0	-13,8	-137,6%
Хліб Дарницький подов.	т	102,3	80,0	-22,3	-27,9%
Хліб селянський ф.	т	204,6	150,0	-54,6	-36,4%
Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	т	16,5	10,0	-6,5	-65,0%
Хліб висівковий 0,3	т	18	50,0	32,0	64,0%
Булка апетитна 0,3	т	29	50,0	21,0	42,0%
Булка смачна 0,4	т	133	200,0	67,0	33,5%
Булка смачна 0,5	т	40	100	60,0	60,0%
Булка калорійна 0,4	т	52	80	28,0	35,0%
2. Обсяг товарної продукції	тис. грн.	3719,2	5014,7	1295,5	25,8%
3. Витрати на виробництво	тис. грн.	2906,1	3886,8	980,7	25,2%
4. Загальний прибуток	тис. грн.	813,0	1127,8	314,8	27,9%

Продовження таблиці 10.9

5. Рентабельність продукції	%	28,0%	29,0%	1,04%	
6. Витрати на 1 грн. товарної продукції	коп.	78,1	77,5	-0,63	-0,8%
6. Потреба у сировині :					
потреба у борошні					
Борошно вищого ґатунку	т	260,8	520,4	259,57	49,9%
Борошно 1 ґатунку	т	486,5	318,4	-168,14	-52,8%
Борошно житнє	т	130,0	96,5	-33,52	-34,7%
Висівки	т	12,1	12,4	0,37	3,0%
Сіль	кг	11,9	15,3	3,38	22,08%
Дріжджі конц.	кг	36,3	58,5	22,27	38,0%
Цукор	кг	8,4	17,0	8,53	50,3%
Маргарин	кг	7,9	13,4	5,51	41,2%
Яйце	л	1,7	4,8	3,08	64,0%
Ванілін	кг	4,6	7,1	2,48	35,0%
Ізюм	кг	0,5	0,8	0,36	42,0%
Часник	кг	1197,1	1244,8	47,73	3,8%
Олія	кг	1383,3	1383,3	0,0	0%
8. Загальна потреба у коштах	тис. грн.	1226,4	1313,1	86,7	6,61%

Після оптимізації асортименту збільшиться випуск на наступні види продукції: Батон степовий – на 50,5%, Батон соціальний – на 86,8%, Хліб висівковий 0,3 – на 64,0%, Булка апетитна 0,3 – на 42,0%, Булка смачна 0,4 – на 33,5%, Булка смачна 0,5 – на 60,0%, Булка калорійна 0,4 – на 35,0%.

Зменшиться випуск на наступні види продукції: Хліб новий пшеничний формовий І ґатунку, Хліб білий соціальний формовий, Хліб Дарницький подовий, Хліб селянський формовий, Хліб Дарницький подовий соціальний 0,7.

Потреба у ресурсах теж зазнає певних змін. Збільшиться потреба у борошні вищого ґатунку на 259,57 т (49,9%); у висівках на 0,37 т (3,0%).

Зменшиться потреба в борошні 1 ґатунку на 168,14 т (–52,8%); у борошні житньому на 33,52 т (–4,7%).

З'явиться потреба у додатковій сировині.

Всі ці зміни пов'язані з тим, що програма оптимізації для досягнення мети – отримання максимального прибутку збільшує обсяги випуску більш рентабельних видів продукції та зменшує обсяги випуску менш рентабельних видів продукції. За рахунок цього відбудеться покращення основних техніко-економічних показників:

- обсяг товарної продукції зріс на 1295,5 тис. грн. (25,8%);
- збільшиться рентабельність продукції на 1,04%;
- зменшаться витрати на 1 грн. товарної продукції на 0,63 коп. (–0,8%).

Витрати на виробництво збільшаться за рахунок збільшення обсягу виробництва та за рахунок використання додаткової сировини на 86,7 тис. грн. (6,61%).

Більш детальну інформацію по результатам оптимізації дозволяють отримати звіт по результатам, звіт по границям, звіт по стійкості.

В звіті по результатам порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана (рис. 10.1):

A1 — Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Оптимізація
Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$N$7	Коефіцієнти цільової функції Загалом	1127826,632	1127826,632

Изменяемые ячейки

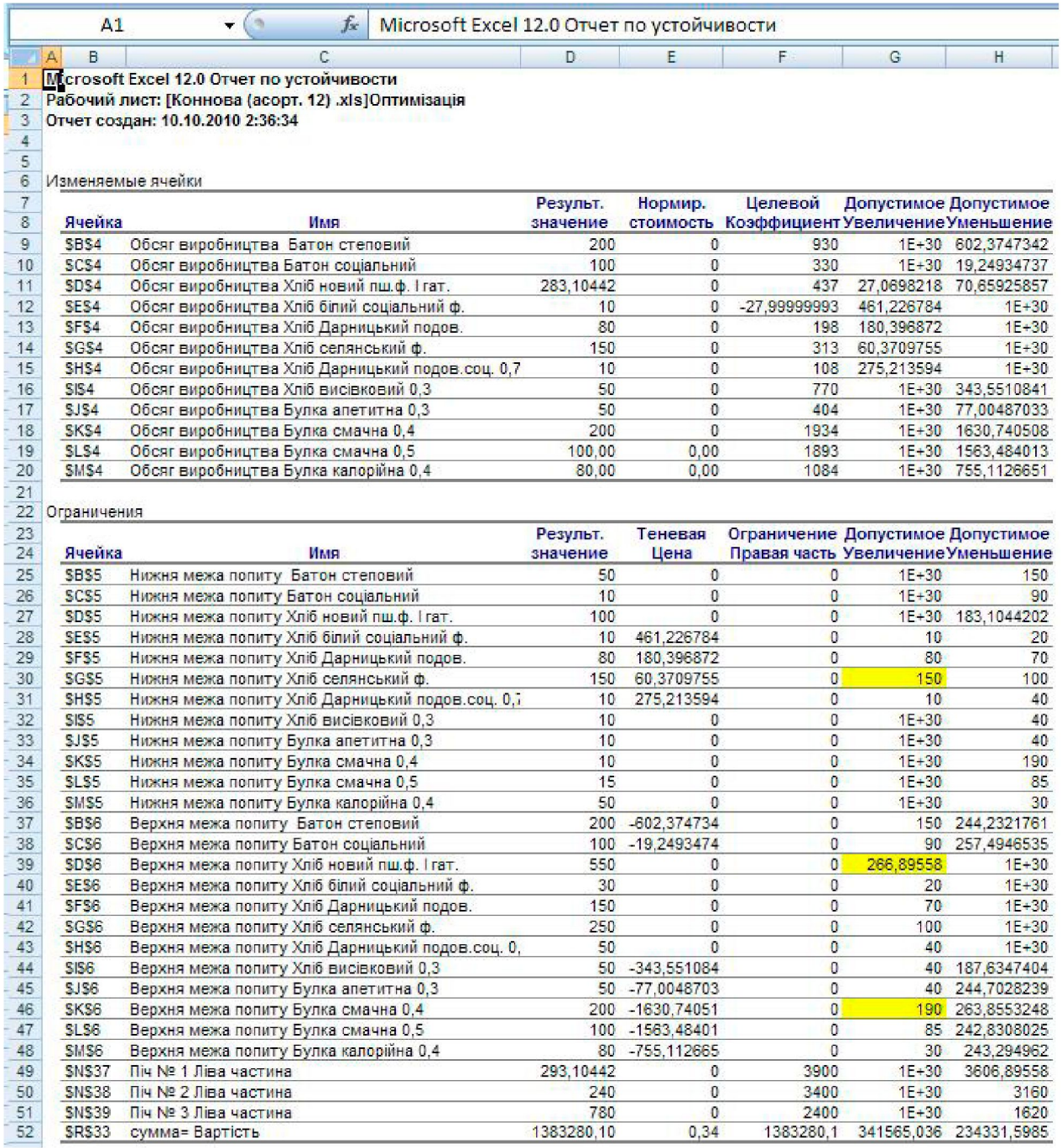
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	200
$C$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	100
$D$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. І гат.	283,1044202	283,1044202
$E$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	10
$F$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	80
$G$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	150
$H$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0	10	10
$I$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	50
$J$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	50
$K$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	200
$L$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	100,00
$M$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	80,00

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$5	Нижня межа попиту Батон степовий	50	$B$5<=$B$4	не связан.	150
$C$5	Нижня межа попиту Батон соціальний	10	$C$5<=$C$4	не связан.	90
$D$5	Нижня межа попиту Хліб новий пш.ф. І гат.	100	$D$5<=$D$4	не связан.	183,10442
$E$5	Нижня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	10	$E$5<=$E$4	связанное	0
$F$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.	80	$F$5<=$F$4	связанное	0
$G$5	Нижня межа попиту Хліб селянський ф.	150	$G$5<=$G$4	связанное	0
$H$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0	10	$H$5<=$H$4	связанное	0
$I$5	Нижня межа попиту Хліб висівковий 0,3	10	$I$5<=$I$4	не связан.	40
$J$5	Нижня межа попиту Булка апетитна 0,3	10	$J$5<=$J$4	не связан.	40
$K$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,4	10	$K$5<=$K$4	не связан.	190
$L$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,5	15	$L$5<=$L$4	не связан.	85
$M$5	Нижня межа попиту Булка калорійна 0,4	50	$M$5<=$M$4	не связан.	30
$B$6	Верхня межа попиту Батон степовий	200	$B$6>=$B$4	связанное	0
$C$6	Верхня межа попиту Батон соціальний	100	$C$6>=$C$4	связанное	0
$D$6	Верхня межа попиту Хліб новий пш.ф. І гат.	550	$D$6>=$D$4	не связан.	266,89558
$E$6	Верхня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	30	$E$6>=$E$4	не связан.	20
$F$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.	150	$F$6>=$F$4	не связан.	70
$G$6	Верхня межа попиту Хліб селянський ф.	250	$G$6>=$G$4	не связан.	100
$H$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц.	50	$H$6>=$H$4	не связан.	40
$I$6	Верхня межа попиту Хліб висівковий 0,3	50	$I$6>=$I$4	связанное	0
$J$6	Верхня межа попиту Булка апетитна 0,3	50	$J$6>=$J$4	связанное	0
$K$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,4	200	$K$6>=$K$4	связанное	0
$L$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,5	100	$L$6>=$L$4	связанное	0
$M$6	Верхня межа попиту Булка калорійна 0,4	80	$M$6>=$M$4	связанное	0
$N$37	Піч № 1 Ліва частина	293,1044202	$N$37<=$P$3	не связан.	3606,8956
$N$38	Піч № 2 Ліва частина	240	$N$38<=$P$3	не связан.	3160
$N$39	Піч № 3 Ліва частина	780	$N$39<=$P$3	не связан.	1620
$R$33	сумма= Вартість	1383280,10	$R$33<=$P$3	связанное	0

Рис. 10.1.

В звіті по стійкості важливим показником є нормована вартість, яка показує як зміниться цільова функція при примусовому випуску одиниці j-го виду продукції. Цей звіт показує, яка продукція є вигідною (рис. 10.2):



A1 — Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости

Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Оптимізація
Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	0	930	1E+30	602,3747342
$C$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	0	330	1E+30	19,24934737
$D$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.	283,10442	0	437	27,0698218	70,65925857
$E$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	0	-27,99999993	461,226784	1E+30
$F$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	0	198	180,396872	1E+30
$G$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	0	313	60,3709755	1E+30
$H$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	0	108	275,213594	1E+30
$I$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	0	770	1E+30	343,5510841
$J$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	0	404	1E+30	77,00487033
$K$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	0	1934	1E+30	1630,740508
$L$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	0,00	1893	1E+30	1563,484013
$M$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	0,00	1084	1E+30	755,1126651

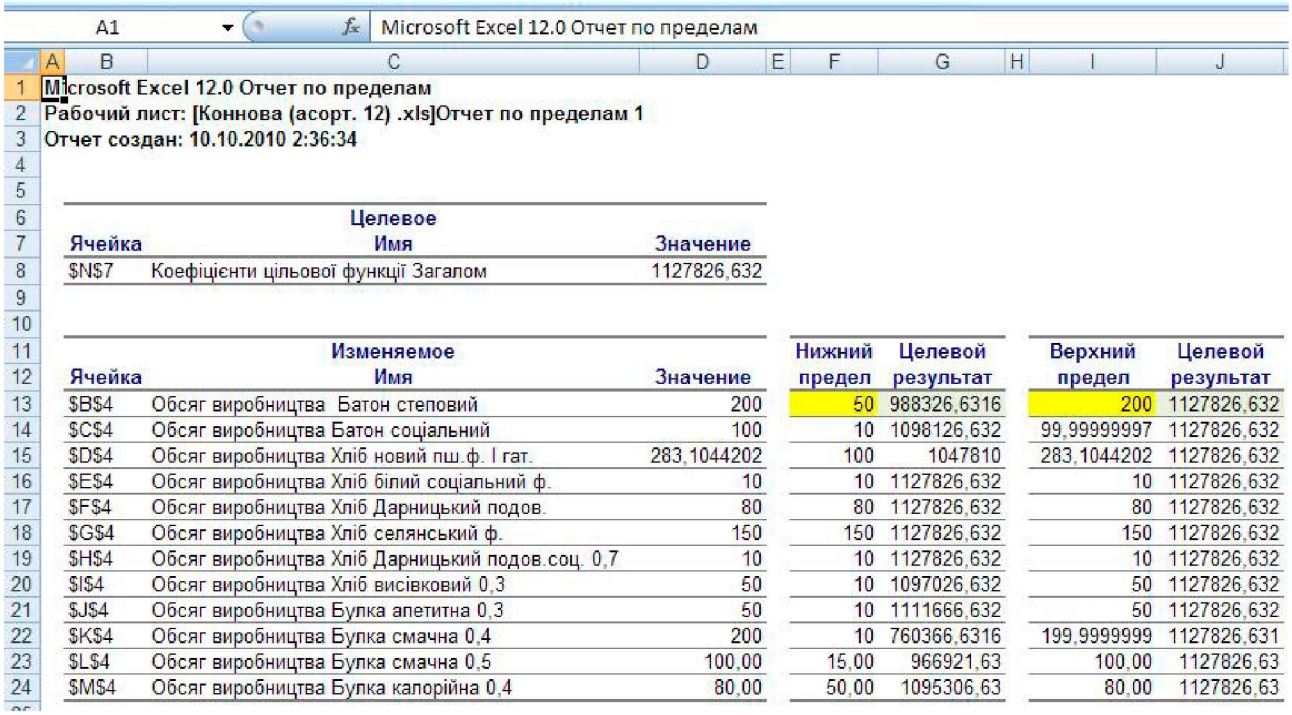
Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$5	Нижня межа попиту Батон степовий	50	0	0	1E+30	150
$C$5	Нижня межа попиту Батон соціальний	10	0	0	1E+30	90
$D$5	Нижня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	100	0	0	1E+30	183,1044202
$E$5	Нижня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	10	461,226784	0	10	20
$F$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.	80	180,396872	0	80	70
$G$5	Нижня межа попиту Хліб селянський ф.	150	60,3709755	0	150	100
$H$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	275,213594	0	10	40
$I$5	Нижня межа попиту Хліб висівковий 0,3	10	0	0	1E+30	40
$J$5	Нижня межа попиту Булка апетитна 0,3	10	0	0	1E+30	40
$K$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,4	10	0	0	1E+30	190
$L$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,5	15	0	0	1E+30	85
$M$5	Нижня межа попиту Булка калорійна 0,4	50	0	0	1E+30	30
$B$6	Верхня межа попиту Батон степовий	200	-602,374734	0	150	244,2321761
$C$6	Верхня межа попиту Батон соціальний	100	-19,2493474	0	90	257,4946535
$D$6	Верхня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	550	0	0	266,89558	1E+30
$E$6	Верхня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	30	0	0	20	1E+30
$F$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.	150	0	0	70	1E+30
$G$6	Верхня межа попиту Хліб селянський ф.	250	0	0	100	1E+30
$H$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0,	50	0	0	40	1E+30
$I$6	Верхня межа попиту Хліб висівковий 0,3	50	-343,551084	0	40	187,6347404
$J$6	Верхня межа попиту Булка апетитна 0,3	50	-77,0048703	0	40	244,7028239
$K$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,4	200	-1630,74051	0	190	263,8553248
$L$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,5	100	-1563,48401	0	85	242,8308025
$M$6	Верхня межа попиту Булка калорійна 0,4	80	-755,112665	0	30	243,294962
$N$37	Піч № 1 Ліва частина	293,10442	0	3900	1E+30	3606,89558
$N$38	Піч № 2 Ліва частина	240	0	3400	1E+30	3160
$N$39	Піч № 3 Ліва частина	780	0	2400	1E+30	1620
$R$33	сумма= Вартість	1383280,10	0,34	1383280,1	341565,036	234331,5985

Рис. 10.2.

В нашому випадку може бути вигідним збільшення обсягів виробництва Хліб новий пшеничний формовий I ґатунку, Булка смачна 0,5 та Хліб селянський формовий.

Звіт по границям дає змогу проаналізувати, в яких межах будуть дійсні рекомендації по структурі випуску. Наприклад, якщо підприємство буде випускати Батон степовий в обсязі 50 тонн, то отриманий прибуток буде 988 тис. грн., а якщо 200 тонн – 1127,8 тис. грн. (рис. 10.3):



A1 — Microsoft Excel 12.0 Отчет по пределам

Microsoft Excel 12.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
$N$7	Коефіцієнти цільової функції Загалом	1127826,632

Изменяемое			Нижний	Целевой	Верхний	Целевой
Ячейка	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат
$B$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	50	988326,6316	200	1127826,632
$C$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	10	1098126,632	99,99999997	1127826,632
$D$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. І гат.	283,1044202	100	1047810	283,1044202	1127826,632
$E$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	10	1127826,632	10	1127826,632
$F$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	80	1127826,632	80	1127826,632
$G$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	150	1127826,632	150	1127826,632
$H$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	10	1127826,632	10	1127826,632
$I$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	10	1097026,632	50	1127826,632
$J$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	10	1111666,632	50	1127826,632
$K$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	10	760366,6316	199,9999999	1127826,631
$L$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	15,00	966921,63	100,00	1127826,63
$M$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	50,00	1095306,63	80,00	1127826,63

Рис. 10.3.

Висновок: оптимізація асортименту продукції та обсягів її випуску дозволила поліпшити основні економічні показники без додаткових витрат на сировину. Так, обсяг випуску зріс в цілому на 86,7 тонн, або на 6,61%, товарна продукція зросла на 1295,5 тис. грн., або на 25,8%, збільшився прибуток від реалізації на 314,8 тис. грн. (на 27,9%), витрати на 1 грн. товарної продукції в оптимальному варіанті знизились на 0,63 копійки (на 0,8%), рентабельність продукції зросла на 1,04%.

Таким чином, оптимізація виробничої програми виробництва на хлібозаводі дозволить поліпшити економічні показники його роботи та збільшити економічну ефективність виробництва.

Лабораторна робота № 11
«Модель оптимального використання потужності»

Задача. Виробнича дільниця має в наявності три види взаємозв'язаного обладнання (**M_1, M_2 і M_3**). Фонд робочого часу відповідно становить A_i годин на місяць. Дільниці встановлено план випуску п'яти видів продукції (**P_1,P_2,P_3,P_4,P_5**) механізованим способом в обсязі **B_j** тонн.

Норми витрат часу за видами продукції і обладнання a_{ij} год. на тону подано в табл. 11.1 (i – індекс виду обладнання, j – індекс виду продукції).

Собівартість одиниці виробленої продукції відповідним видом обладнання c_{ij} гривень наведено в табл. 11.1.

Потрібно знайти оптимальний план розподілу продукції по видах обладнання, який забезпечить мінімальні витрати на виробництво.

Таблиця 11.1

Варіанти визначення a_{ij} і c_{ij} за видами продукції для побудови моделі

Номер виду продукції	a_{ij}			c_{ij}		
	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	c_{1j}	c_{2j}	c_{3j}
1	0,22	0,33	0,50	30	45	28
2	0,23	0,34	0,45	25	36	41
3	0,25	0,25	0,44	29	38	35
4	0,26	0,29	0,42	31	24	27
5	0,27	0,35	0,56	25	50	39
6	0,29	0,45	0,52	26	39	41
7	0,21	0,40	0,51	34	26	25
8	0,20	0,32	0,44	48	37	35
9	0,30	0,35	0,43	26	28	45
10	0,32	0,36	0,40	34	52	29
11	0,25	0,27	0,39	25	49	34
12	0,29	0,21	0,37	27	29	40
13	0,32	0,26	0,52	27	36	35
14	0,28	0,38	0,54	35	34	39
15	0,26	0,34	0,52	36	42	27

Таблиця 11.2

Варіанти визначення A_i і B_j для побудови моделі оптимального завантаження обладнання

Ва-рі-ант	Фонд робочого часу і-го обладнання Ai			Завдання по випуску j-го виду продукції Bj				
	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	800	400	500	320	150	400	640	520
2	900	800	600	180	650	700	220	300
3	600	400	450	220	450	800	740	350
4	700	300	850	140	160	190	100	200
5	500	700	750	600	500	700	450	580
6	900	900	260	350	480	620	330	310
7	1000	600	800	800	400	600	700	400
8	600	500	300	550	530	440	680	720
9	400	700	700	150	230	180	290	110
10	700	800	900	330	490	450	300	500
11	900	400	400	400	410	560	630	510
12	700	550	600	380	220	150	300	420
13	600	850	450	260	220	330	400	270
14	300	950	750	410	460	540	580	320
15	850	1100	800	590	600	450	640	280

Варіант визначається за допомогою табл. 11.3 і задається шести цифрами, перші п'ять цифр – визначають номери видів продукції, за якими будується модель із табл. 11.1 і остання цифра – варіанти визначення A_i і B_j із табл.11.2.

Таблиця 11.3

Варіант	Номери варіантів за завданням
1	1,2, 3,4,5,12
2	2,3,4,5,6,11
3	3,4,5,6,7,10
4	4,5,6,7,8,9
5	5,6,7,8,9,8
6	7,8,9,10,11,7
7	2,4,5,12,13,6
8	3,6,9,11,12,5
9	9,10,11,12,15,4
10	2,4,6,12,13,3

Варіант	Номери варіантів за завданням
11	10,11,12,13,14,1
12	7,8,13,14,15,2
13	1,2,5,14,15,1
14	1,3,5,6,8,9
15	1,7,9,11,12,8
16	2,4,8,10,11,9
17	4,6,8,12,13,10
18	4,3,8,9,10,11
19	5,6,11,1.2,14,5
20	2,7,9,10,15,4

Варіант	Номери варіантів за завданням
21	1,5,10,12,13,3
22	2,4,9,11,12,2
23	3,7,8,10,11,1
24	2,5,9,13,15,12
25	4,8,6.8.9,13
26	2,3,8,9,10,14
27	7,9,10,14,15,15
28	6,8,10,11,14,2
29	2,5,6,9,12,3
30	2,4,8,10,11,9

Приклад виконання лабораторної роботи

Задача. Будівельна дільниця має в наявності три групи взаємопов'язаних механізмів (M_1, M_2, M_3). Фонд робочого часу відповідно становить 800, 900 і 600 машино-змін за місяць. Дільниці встановлено план виконання п'яти видів робіт (P_1, P_1, P_3, P_4, P_5) в такому обсязі 450,320,640,520 і 280 м^3. Норми витрат часу за видами робіт і групами механізмів наведено в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Норми витрат часу на одиницю виконаної роботи

Група механізмів	Норми витрат часу на одиницю виконаної роботи відповідним механізмом, машино-змін				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	0,2	0,3	0,5	0,25	0,4
M_2	0,4	0,45	0,56	0,6	0,5
M_3	0,41	0,65	0,56	0,45	0,3

Собівартість одиниці роботи, виконаної відповідною групою механізмів наведено в табл. 11.5.

Таблиця 11.5

Собівартість одиниці виконаної роботи

Група механізмів	Собівартість одиниці виконаної роботи відповідним механізмом, грн.				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	20	30	40	35	45
M_2	30	25	35	40	40
M_3	35	20	30	30	55

Знайти оптимальний план завантаження будівельних механізмів, який забезпечить мінімальні витрати.

Розв'язок

Для побудови моделі введемо невідому величину x_{ij} – обсяг і-го виду роботи (j = 1, 2, ..., 5), яка виконується і-им механізмом (i = 1, 2, 3).

Цільова функція мінімуму витрат набуде вигляду:

$$F(x) = 20x_{11} + 30x_{12} + 40x_{13} + 35x_{14} + 45x_{15} + 30x_{21} + ... + 55x_{35} \rightarrow \min.$$

За такими обмеженнями:

1) по використанню наявного фонду робочого часу механізмів:

M_1: $0{,}2x_{11} + 0{,}3x_{12} + 0{,}5x_{13} + 0{,}25x_{14} + 0{,}4x_{15} \leq 800$;

M_2: $0{,}4x_{21} + 0{,}45x_{22} + 0{,}56x_{23} + 0{,}6x_{24} + 0{,}5x_{25} \leq 900$;

M_3: $0{,}41x_{31} + 0{,}65x_{32} + 0{,}56x_{33} + 0{,}45x_{34} + 0{,}3x_{35} \leq 600$;

2) по виконанню гарантованого плану відповідних механізованих робіт:

P_1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 450$;

P_2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 320$;

P_3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 640$;

P_4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 520$;

P_5: $x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 280$;

3) умова невід'ємності змінних:

$x_{ij} \geq 0$, $i=1,2,3$; $j=1,2,3,4,5$.

Розв'язавши дану задачу, бачимо, що всі будівельні роботи будуть виконані в запланованих обсягах.

Висновок. Оптимальний план завантаження механізмів буде такий:

$$[X_{ij}] = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 308{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11{,}7 & 640 & 520 & 0 \end{bmatrix}$$

Це свідчить про те, що для того щоб загальна собівартість робіт була мінімальною потрібно:

на першому механізмі виконувати роботу P_1 в обсязі 450 одиниць і роботу P_5 в обсязі 280 одиниць;

на другому механізмі – роботу P_2 – 308,3 одиниць;

на третьому механізмі – роботу P_2 – 11,7; P_3 – 640 і P_4 – 520 одиниць продукції.

Лабораторна робота № 12. «Транспортна задача»

На практиці при перевезенні вантажів може виникнути одна з трьох ситуацій.

I.

Метою **транспортної задачі** є таке планування перевезень вантажу від постачальників до споживачів, щоб забезпечити мінімальні транспортні витрати.

Введемо позначення:

x_{ij} – змінні, які підлягають розшуку та виражають кількість вантажу, який перевозиться від ***i-го*** постачальника до ***j-го*** споживача ($i=1...m$, $j=1...n$);

c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника до ***j*-го** споживача;

a_i – кількість одиниць вантажу у ***i-го*** постачальника;

b_j – кількість одиниць вантажу, яка потрібна ***j-му*** споживачу.

Транспортна задача може бути сформульована як частковий випадок задачі лінійного програмування і вирішена симплекс-методом.

Кількість одиниць вантажу у постачальників відповідає попиту **з** боку споживачів, що відображається в умові балансу

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (12.1)$$

Така економіко-математична модель транспортної задачі називається **закритою** та **з** урахуванням умови (8.1) вона має вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \ ; \qquad (12.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = \mathbf{1}...m); \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = \mathbf{1}...n); \qquad (12.3)$$

$$x_{ij} \geq \mathbf{0} (i = \mathbf{1}...m, i = \mathbf{1}...n) \ . \qquad (12.4)$$

Дана транспортна задача є **збалансованою.**

У наведених виразах формула (12.2) відповідає цільовій функції з мінімізації транспортних витрат. Формули (12.3) є обмеженнями задачі:

перша формула характеризує те, що весь вантаж від постачальників має бути вивезеним;

друга формула відтворює той факт, що попит споживачів задоволений.

Формула (12.4) є умовою невід'ємності змінних.

II.

Кількість вантажу у постачальників більше попиту у ньому з боку споживачів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \succ \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (12.5)$$

Це означатиме, що частина вантажу у постачальників залишиться, а споживачі отримають весь потрібний їм вантаж. Тому знак у першому обмеженню (12.3) зміниться з "=" на "≥". Інші формули розглянутої моделі (12.2)–(12.4) залишаться такими ж.

III.

Кількість вантажу у постачальників менше попиту в ньому у споживачів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prec \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (12.6)$$

Це означатиме, що кожен постачальник увесь свій вантаж вивезе, а частина споживачів отримає вантажу менше відповідної кількості. Тому друге обмеження у формулах (12.3) буде мати знак "≤". Інші формули моделі (12.2)–(12.4) залишаться без зміни.

Економіко-математичні моделі у ситуаціях **II** і **III** називаються **відкритими,** а самі задачі – **незбалансованими.**

У всіх трьох розглянутих моделях кількість основних змінних складає m×n, а кількість обмежень – (m+n).

Найбільш простою та часто використовуємою є закрита модель (12.2)–(12.4). З особливостями реалізації відкритих моделей можна познайомитися у спеціальній літературі.

1. Постановка транспортної задачі

Визначити, чи є дана транспортна задача **збалансованою або незбалансованою.**

Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі, якщо задані витрати на перевезення одиниці вантажу від постачальників $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{A_5}$ до споживачів $\mathbf{B_1}$,$\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$, $\mathbf{B_4}$, $\mathbf{B_5}$.

Витрати на перевезення одиниці вантажу, запаси постачальників і потреби споживачів визначаються за даними таблиці 12.1.

Таблиця 12.1

N° вар.	Витрати на перевезення одиниці вантажу																								
	A_1					**A_2**					**A_3**					**A_4**					**A_5**				
	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
1.	1	2	3	4	4	3	5	6	4	3	6	2	1	2	3	4	4	3	5	6	4	3	6	2	4
2.	5	2	3	4	4	3	5	7	4	3	6	2	5	2	3	4	4	3	5	7	4	3	6	2	4
3.	5	2	3	4	4	3	4	5	4	7	5	4	5	2	3	4	4	3	4	5	4	7	5	4	4
4.	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	3
5.	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	2
6.	5	1	4	6	9	3	2	6	8	7	9	5	5	1	4	6	9	3	2	6	8	7	9	5	9
7.	3	5	2	4	6	1	8	9	7	5	3	2	3	5	2	4	6	1	8	9	7	5	3	2	6
8.	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	1	4	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	1	4	1
9.	5	1	4	6	9	3	2	6	8	7	9	5	5	1	4	6	9	3	2	6	8	7	9	5	9
10.	8	3	9	4	7	2	1	5	6	4	8	2	8	3	9	4	7	2	1	5	6	4	8	2	7
11.	1	2	3	4	4	3	5	6	4	3	6	2	1	2	3	4	4	3	5	6	4	3	6	2	4
10.	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	3
13.	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	2
14.	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	1	4	6	9	4	3	1	5	6	8	5	7	1	4	1
15.	4	2	3	5	4	3	5	7	4	3	6	2	4	2	3	5	4	3	5	7	4	3	6	2	4
16.	5	8	6	9	1	2	4	7	3	5	8	5	5	8	6	9	1	2	4	7	3	5	8	5	1
17.	4	6	9	4	5	7	6	8	4	9	3	2	4	6	9	4	5	7	6	8	4	9	3	2	5
18.	2	5	3	6	8	5	9	6	4	5	2	1	2	5	3	6	8	5	9	6	4	5	2	1	8
19.	7	5	3	1	5	9	8	6	2	4	5	7	7	5	3	1	5	9	8	6	2	4	5	7	5
20.	2	5	8	4	6	5	7	5	3	1	5	9	2	5	8	4	6	5	7	5	3	1	5	9	6
21.	8	2	4	6	5	3	1	5	7	5	9	5	8	2	4	6	5	3	1	5	7	5	9	5	5
22.	2	4	2	3	6	8	8	4	4	2	2	6	2	4	2	3	6	8	8	4	4	2	2	6	6
23.	5	2	3	4	4	3	5	7	4	3	6	2	5	2	3	4	4	3	5	7	4	3	6	2	4
24.	5	2	3	4	4	3	4	5	4	7	5	4	5	2	3	4	4	3	4	5	4	7	5	4	4
25.	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	2	9	6	7	3	5	4	2	3	5	4	9	3
26.	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	7	6	5	6	2	4	3	1	5	3	6	8	2
27.	9	5	6	4	7	5	1	5	2	3	4	6	9	5	6	4	7	5	1	5	2	3	4	6	7
28.	7	4	6	8	4	2	6	7	5	3	1	5	7	4	6	8	4	2	6	7	5	3	1	5	4
29.	8	5	4	6	8	5	2	1	3	5	6	7	8	5	4	6	8	5	2	1	3	5	6	7	8
30.	3	5	2	4	6	1	8	9	7	5	3	2	3	5	2	4	6	1	8	9	7	5	3	2	6

Продовження таблиці 12.1

N° вар.	Запаси постачальників					Потреби споживачів				
	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
1.	15	15	45	60	45	60	20	30	45	10
2.	25	25	40	65	40	65	10	35	40	15
3.	35	35	20	35	20	35	25	30	55	20
4.	30	30	10	25	10	25	45	15	60	10
5.	25	25	55	40	55	40	30	25	15	35
6.	10	10	25	45	25	45	65	40	10	20
7.	50	50	85	20	85	20	75	15	25	70
8.	20	20	60	45	60	45	80	25	30	45
9.	25	25	40	65	40	65	10	35	40	15
10.	55	55	20	40	20	40	15	75	35	20
11.	25	25	55	40	55	40	30	25	15	35
10.	50	50	85	20	85	20	75	15	25	70
13.	10	10	25	45	25	45	65	40	10	20
14.	30	30	10	25	10	25	45	15	60	10
15.	25	25	40	65	40	65	10	35	40	15
16.	65	65	15	20	15	20	35	40	75	10
17.	20	20	85	45	85	45	15	35	65	55
18.	50	50	40	35	40	35	10	75	45	40
19.	35	35	40	15	40	15	20	35	30	10
20.	25	25	50	70	50	70	85	30	40	65
21.	55	55	45	25	45	25	65	15	25	40
22.	25	25	30	10	30	10	75	10	50	20
23.	25	25	40	65	40	65	10	35	40	15
24.	35	35	20	35	20	35	25	30	55	20
25.	30	30	10	25	10	25	45	15	60	10
26.	25	25	55	40	55	40	30	25	15	35
27.	85	85	65	50	65	50	80	25	10	45
28.	60	60	75	20	75	20	10	30	30	25
29.	40	40	80	25	80	25	15	40	25	65
30.	20	20	10	55	10	55	30	35	65	20

2. Приклад рішення транспортної задачі за допомогою електронних таблиць

Задача. В Київський області 3 цукрових заводи (**В**) отримують від 5 сільськогосподарських підприємств (**А**) сировину. Скласти такий план перевезень від постачальників до споживачів, щоб вартість перевезень була мінімальною, вантаж від постачальників був вивезеним, а потреби заводів у сировині були задоволені (табл. 12.2).

Таблиця 12.2

Вихідні дані для транспортної задачі

Витрати на перевезення одиниці вантажу

A_1			A_2			A_3			A_4			A_5		
B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3
20	15	35	25	20	35	30	25	25	20	30	30	15	20	25

Продовження таблиці 12.2

Запаси постачальників					Потреби споживачів		
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B_1	B_2	B_3
100	220	110	170	120	220	240	260

Розглянемо загальну схему розміщення даних в середовищі Excel для рішення транспортної задачі (рис. 12.1).

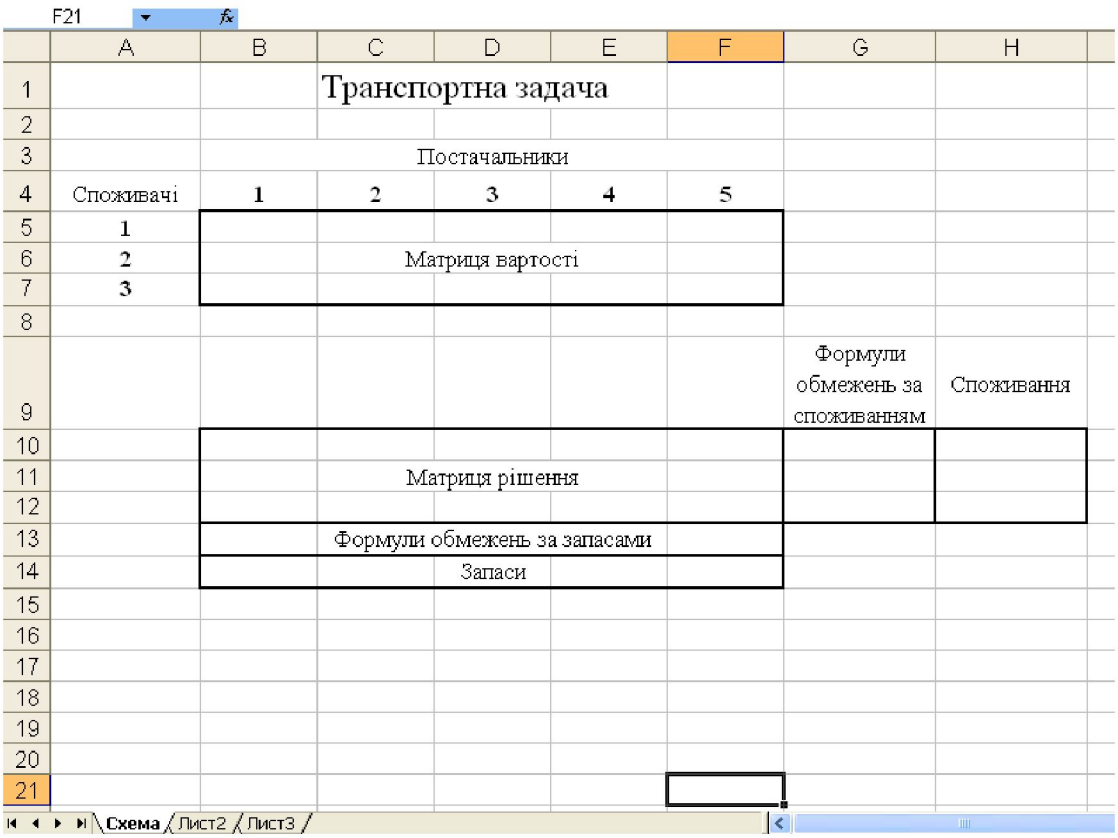


Рис. 12.1.

Рішення транспортної задачі на ПК проводиться за таким алгоритмом:

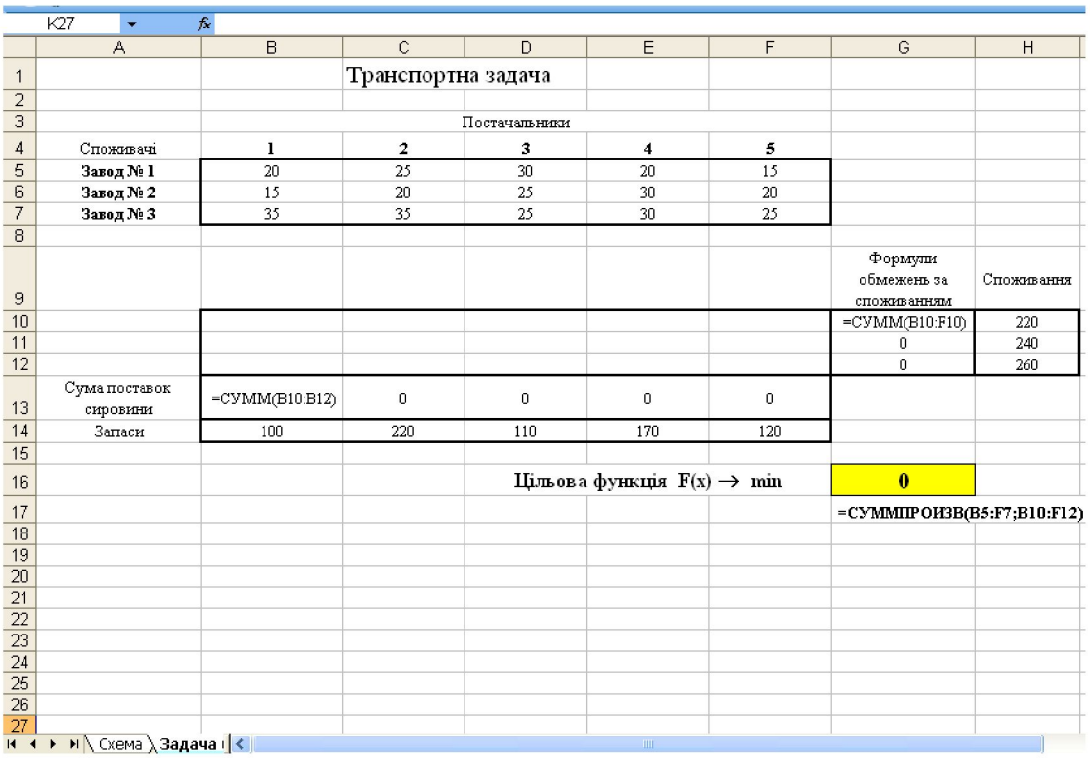
1. Заповнюємо шапку та заготовки рядків і стовпців як на рис. 12.2.
2. Заповнюємо електронну таблицю: блоки «Запаси», «Споживання» та «Матрицю вартості».
3. Записуємо економіко-математичну модель згідно з похідними даними:

$$F(x) = 20x_{11} + 25x_{12} + 30x_{13} + 20x_{14} + 15x_{15} + 15x_{21} + 20x_{22} + 25x_{23} + 30x_{24} + 20x_{25} + 35x_{31} + 35x_{32} + 25x_{33} + 30x_{34} + 25x_{35} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 220, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 240, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 260, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 110, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 170, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 120; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (i=1\ldots5;\ j=1\ldots3).$$

4. В клітинку G16 за допомогою **Майстра функцій** записуємо формулу цільової функції **=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B10:F12)**.
5. У клітинки D13÷F13 записуються формули сумування змінних по стовпцям, що відповідає запасам постачальників **=СУММ(B10:B12).**
6. У клітинки G10÷G12 записуються формули сумування змінних по рядках, що відповідає потребі споживачів **=СУММ(B10:F10)** (рис. 12.2).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Транспортна задача					
2								
3				Постачальники				
4	Споживачі	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**		
5	**Завод № 1**	20	25	30	20	15		
6	**Завод № 2**	15	20	25	30	20		
7	**Завод № 3**	35	35	25	30	25		
8								
9							Формули обмежень за споживанням	Споживання
10							=СУММ(B10:F10)	220
11							0	240
12							0	260
13	Сума поставок сировини	=СУММ(B10:B12)	0	0	0	0		
14	Запаси	100	220	110	170	120		
15								
16					Цільова функція F(x) → min		0	
17							=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B10:F12)	
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								

Рис. 12.2.

7. Відмітити клітинку G16 (цільова функція) та активізувати режим Севис/Поиск решения (рис. 12.3).

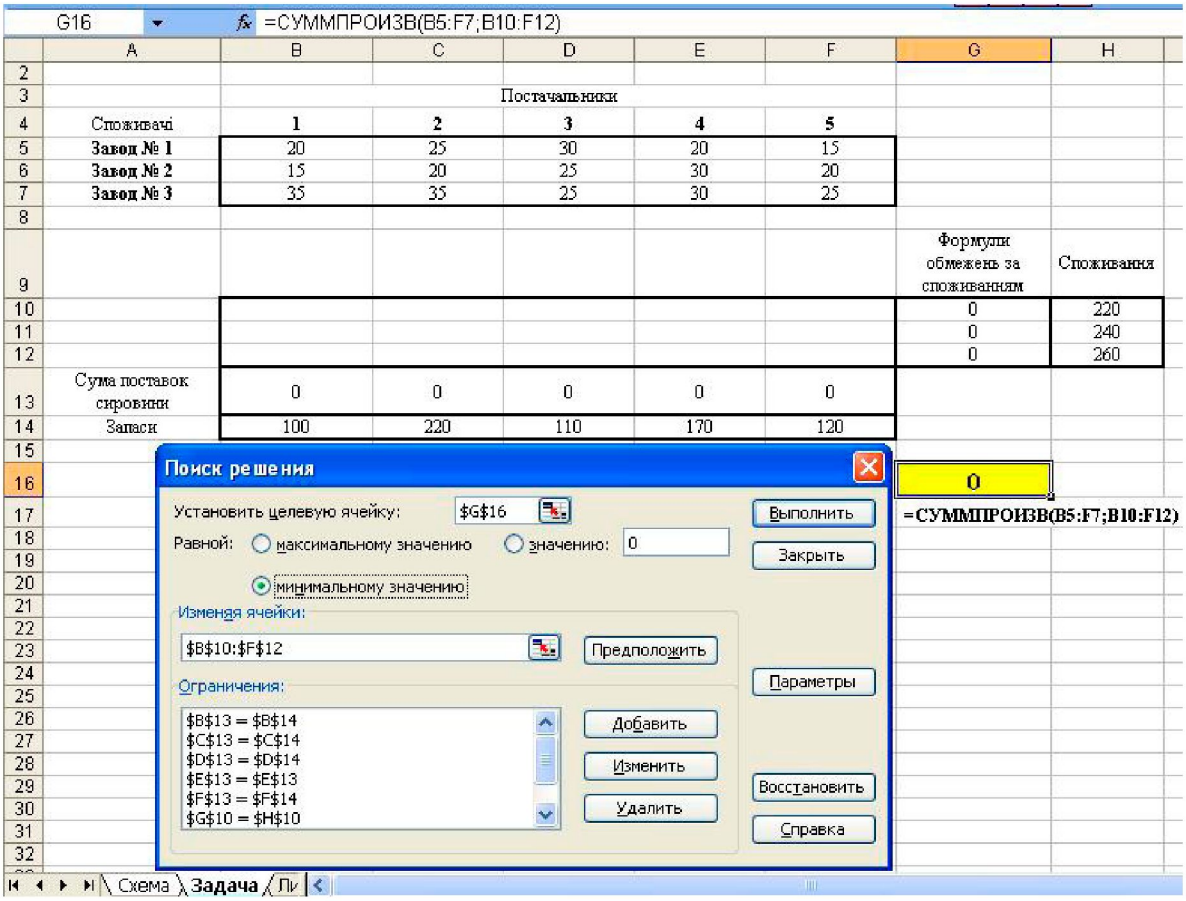


Рис. 12.3.

8. Заповнити рядок **Установить целевую ячейку**.

9. Включити один з варіантів оптимізації. Для нашої задачі – **Мінімальному значенню**.

10. Заповнити рядок **Изменяя ячейки** посиланням на блок B10:F12.

11. Заповнити вікно **Ограничения** обмеженнями за рядками і стовпцями змінних, що відповідає запасам постачальників та потребам споживачів (рис. 8.4).

12. У рядку **Знак** вибрати знак « = ».

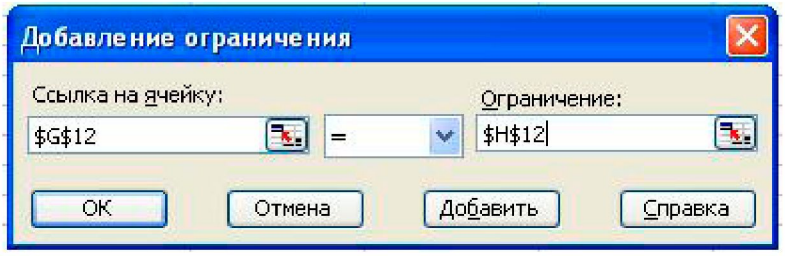


Рис. 12.4.

13. Заповнення рядків вікна **Добавить** закінчити натиском кнопки ОК.

14. Натиснути кнопку **Параметры** та вибрати режим **Линейная модель** і **Неотрицательные значения**, натиснути кнопку ОК (рис. 12.5).

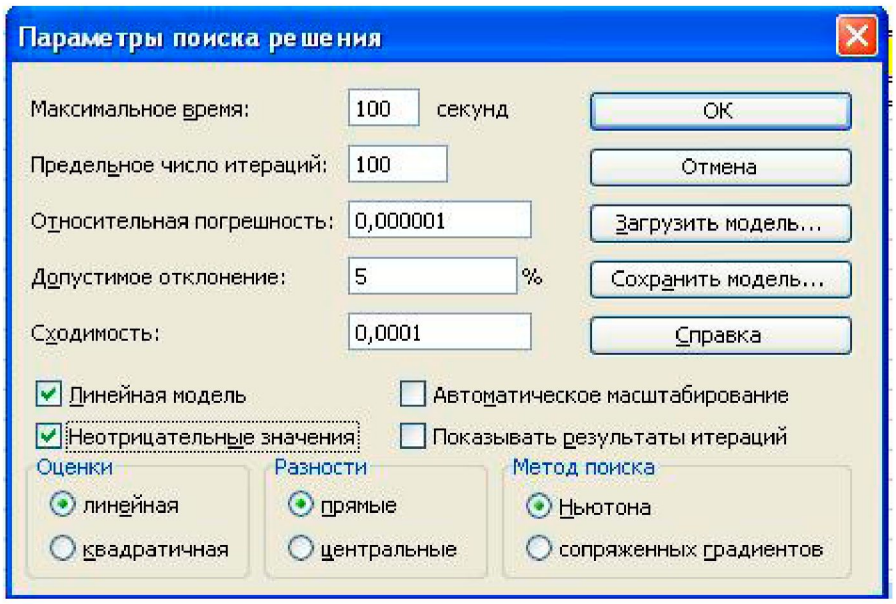


Рис. 12.5.

15. Далі натискаємо кнопку **Выполнить**.

16. Після виконання обчислень на екрані з'явиться вікно **Результаты поиска решений**, в ньому відображено результат роботи: Решение найдено Все ограничения и условия оптимальности выполнены (рис. 12.6).

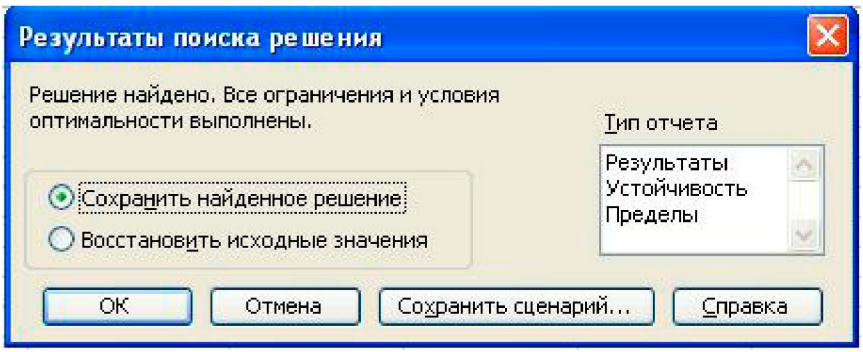
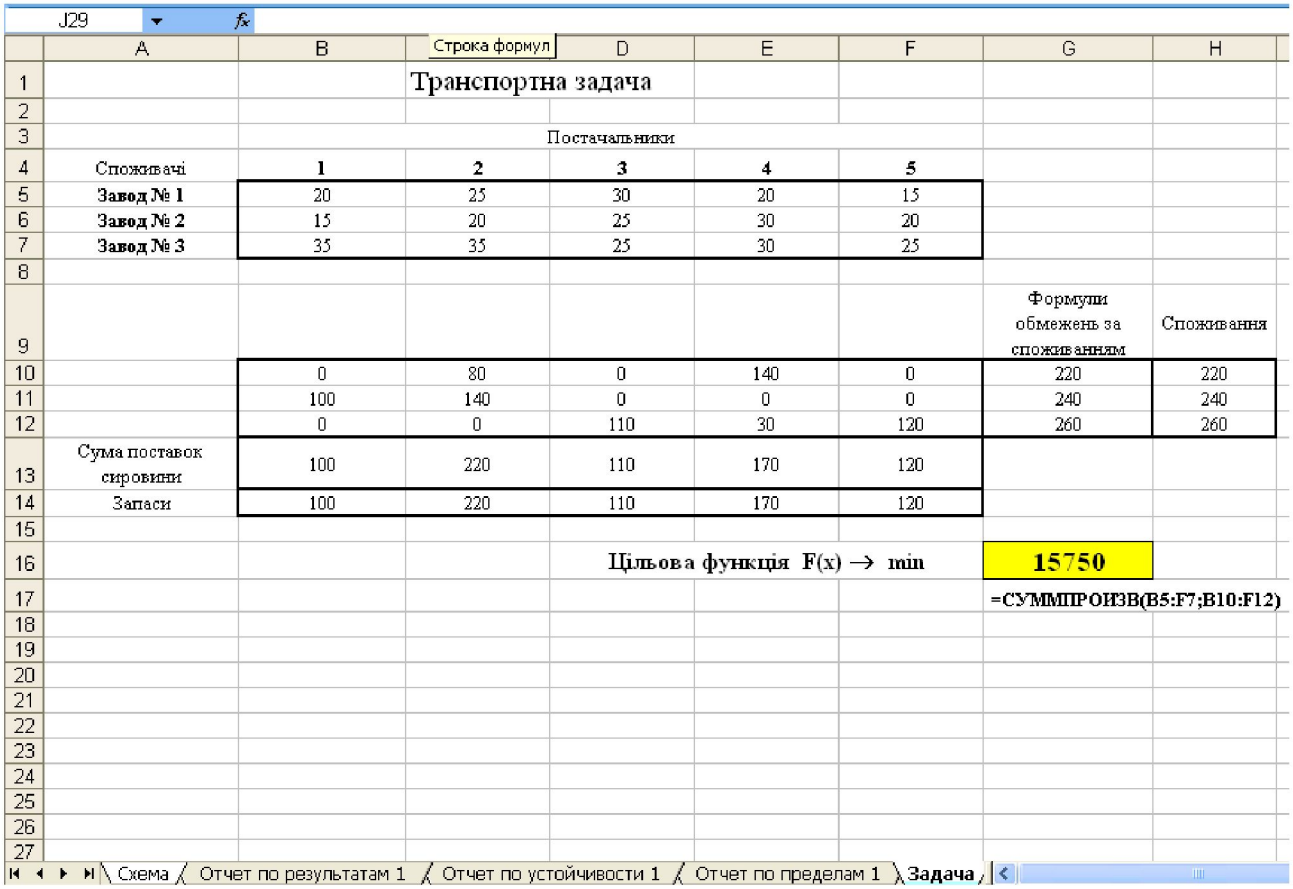


Рис. 12.6.

Рішення транспортної задачі має вигляд (рис. 12.7):



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Транспортна задача				
2								
3				Постачальники				
4	Споживачі	1	2	3	4	5		
5	Завод № 1	20	25	30	20	15		
6	Завод № 2	15	20	25	30	20		
7	Завод № 3	35	35	25	30	25		
8								
9							Формули обмежень за споживанням	Споживання
10		0	80	0	140	0	220	220
11		100	140	0	0	0	240	240
12		0	0	110	30	120	260	260
13	Сума поставок сировини	100	220	110	170	120		
14	Запаси	100	220	110	170	120		
15								
16				Цільова функція F(x) → min			15750	
17							=СУММПРОИЗВ(B5:F7;B10:F12)	

Рис. 12.7.

3. Економічна інтерпретація математичного розв'язку транспортної задачі

Мінімальна вартість перевезень від постачальників до споживачів (15750 грн.) буде отримана за умови, якщо буде перевезено сировину:

На завод № 1
від господарства № 2 – 80 одиниць,
від господарства № 4 – 140 одиниць.

На завод № 2
від господарства № 1 – 100 одиниць,
від господарства № 2 – 140 одиниць.

На завод № 3
від господарства № 3 – 110 одиниць,
від господарства № 4 – 30 одиниць,
від господарства № 5 – 120 одиниць.

У **звіті по результатам** (рис. 8.8) порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана.

A1 — Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [8. Лабораторна № Транспортна задача.xls]Задача
Отчет создан: 17.05.2007 23:24:18

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$G$16	Цільова функція F(x) ® min Формули обмежень за споживання	0	15750

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$10	Постачальники	0	0
$C$10	Транспортна задача	0	80
$D$10		0	0
$E$10		0	140
$F$10		0	0
$B$11	Постачальники	0	100
$C$11	Транспортна задача	0	140
$D$11		0	0
$E$11		0	0
$F$11		0	0
$B$12	Постачальники	0	0
$C$12	Транспортна задача	0	0
$D$12		0	110
$E$12		0	30
$F$12		0	120

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$13	Сума поставок сировини Постачальники	100	$B$13=$B$1	не связан.	0
$C$13	Сума поставок сировини Транспортна задача	220	$C$13=$C$1	не связан.	0
$D$13	Сума поставок сировини	110	$D$13=$D$1	не связан.	0
$E$13	Сума поставок сировини	170	$E$13=$E$1	не связан.	0
$F$13	Сума поставок сировини	120	$F$13=$F$14	не связан.	0
$G$10	Формули обмежень за споживаннам	220	$G$10=$H$1(	не связан.	0
$G$11	Формули обмежень за споживаннам	240	$G$11=$H$1	не связан.	0
$G$12	Формули обмежень за споживаннам	260	$G$12=$H$1	не связан.	0

Схема | **Отчет по результатам 1** | Отчет по устойчивости 1 | Отчет по пределам 1 | Задача

Рис. 12.8.

<u>Коротко за звітом по стійкості</u> (рис. 12.9)**.**

Показник нормована вартість, показує як зміниться цільова функція при примусовому збільшенні на одиницю j-го виду споживання. Цей звіт показує, що транспортування сировини на завод № 1 та на завод № 2 є вигідним.

A1 — Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [8. Лабораторна № Транспортна задача.xls]Задача
Отчет создан: 17.05.2007 23:24:18

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$10	Постачальники	0	0	20	1E+30	0
$C$10	Транспортна задача	80	0	25	0	10
$D$10		0	15	30	1E+30	15
$E$10		140	0	20	0	0
$F$10		0	0	15	1E+30	0
$B$11	Постачальники	100	0	15	0	1E+30
$C$11	Транспортна задача	140	0	20	10	0
$D$11		0	15	25	1E+30	15
$E$11		0	15	30	1E+30	15
$F$11		0	10	20	1E+30	10
$B$12	Постачальники	0	5	35	1E+30	5
$C$12	Транспортна задача	0	0	35	1E+30	0
$D$12		110	0	25	15	1E+30
$E$12		30	0	30	0	0
$F$12		120	0	25	0	1E+30

Ограничения

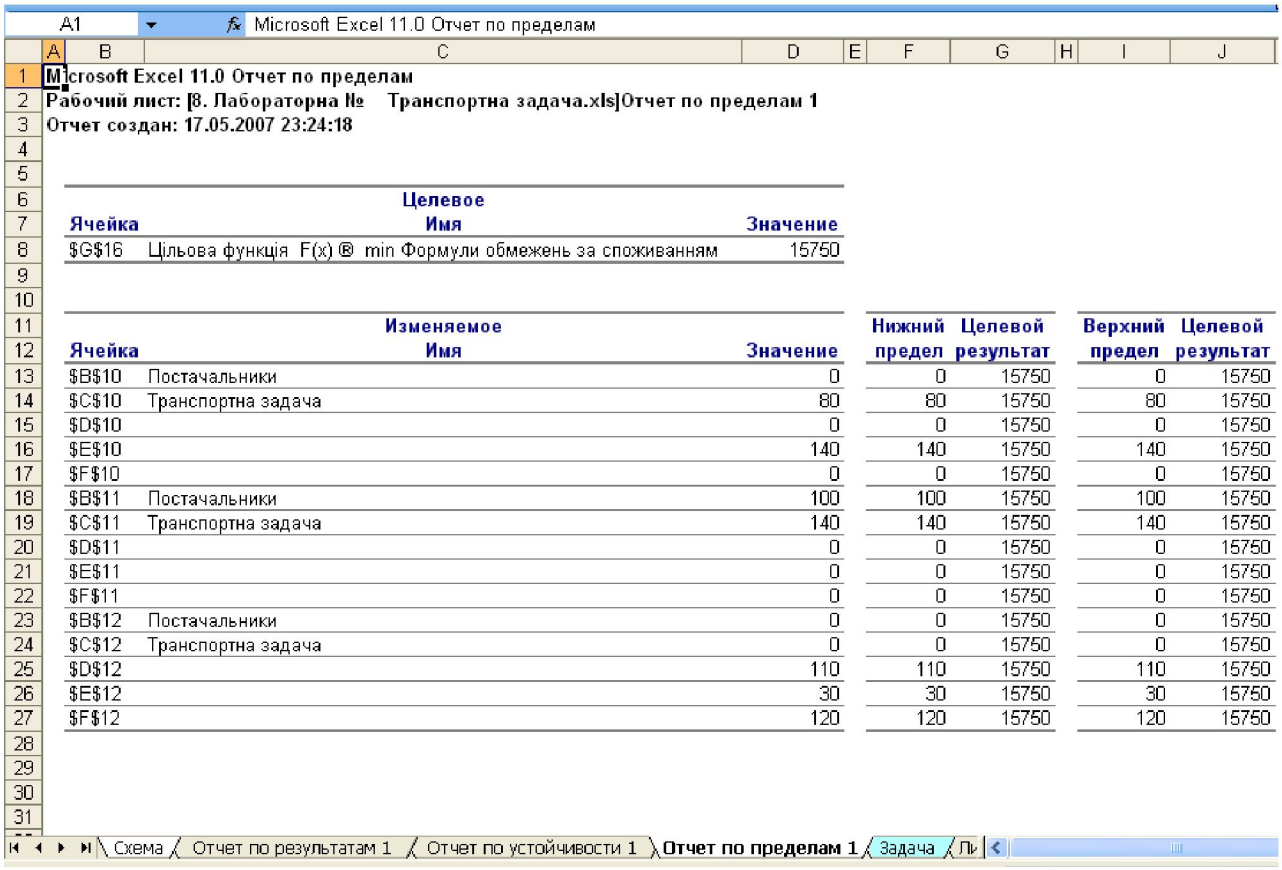
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$13	Сума поставок сировини Постачальники	100	0	100	140	0
$C$13	Сума поставок сировини Транспортна зад.	220	5	220	140	0
$D$13	Сума поставок сировини	110	-5	110	30	0
$E$13	Сума поставок сировини	170	0	170	0	1E+30
$F$13	Сума поставок сировини	120	-5	120	30	0
$G$10	Формули обмежень за споживанням	220	20	220	0	140
$G$11	Формули обмежень за споживанням	240	15	240	0	140
$G$12	Формули обмежень за споживанням	260	30	260	0	30

Схема | Отчет по результатам 1 | **Отчет по устойчивости 1** | Отчет по пределам 1 | Зада

Рис. 12.9.

Звіт по границям (рис. 12.8).

У ньому показано, у яких межах може змінюватися постачання сировини, що ввійшла в оптимальне рішення, при збереженні структури оптимального рішення:



Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [8. Лабораторна № Транспортна задача.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 17.05.2007 23:24:18

Целевое

Ячейка	Имя	Значение
$G$16	Цільова функція F(x) ® min Формули обмежень за споживанням	15750

Изменяемое

Ячейка	Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$10	Постачальники	0	0	15750	0	15750
$C$10	Транспортна задача	80	80	15750	80	15750
$D$10		0	0	15750	0	15750
$E$10		140	140	15750	140	15750
$F$10		0	0	15750	0	15750
$B$11	Постачальники	100	100	15750	100	15750
$C$11	Транспортна задача	140	140	15750	140	15750
$D$11		0	0	15750	0	15750
$E$11		0	0	15750	0	15750
$F$11		0	0	15750	0	15750
$B$12	Постачальники	0	0	15750	0	15750
$C$12	Транспортна задача	0	0	15750	0	15750
$D$12		110	110	15750	110	15750
$E$12		30	30	15750	30	15750
$F$12		120	120	15750	120	15750

Схема | Отчет по результатам 1 | Отчет по устойчивости 1 | Отчет по пределам 1 | Задача

Рис. 12.8.

Контрольні запитання

1. Які методи існують при вирішенні задач лінійного програмування?
2. Сформулюйте економічну постановку задачі розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства.
3. Побудуйте математичну модель задачі оптимальної виробничої програми.
4. Що в задачі оптимального випуску продукції визначає цільова функція?
5. Що в задачі оптимального випуску продукції визначають обмеження на змінні?
6. Що в задачі оптимального випуску продукції визначають умови невід'ємності змінних?
7. Який план вважається оптимальним на підприємстві?
8. Записати економіко-математичну модель задачі оптимального розподілу завдань з випуску однорідної продукції.
9. Наведіть порядок визначення оптимальної виробничої програми підприємства із застосуванням електронних таблиць Excel.

10. Пояснити суть транспортної задачі.
11. Записати економіко-математичну модель транспортної задачі.
12. Яка модель транспортної задачі називається закритою?
13. Яка модель транспортної задачі називається відкритою?
14. Назвіть методи реалізації транспортної задачі.
15. Наведіть порядок рішення транспортної задачі із застосуванням електронних таблиць Excel

Література: [1, с. 354-377, 385-392, 436-455; 2, с. 69-72, 117-190; 6, с. 120-137; 7, с. 102-128, 251; 9, с. 45-58, 53-54, 59, 63-65; 13, с. 9-11, 31-39, 41-47, 60-63, 75-87].

Тема 4. НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Взаємозв'язки між економічними показниками досить часто носять нелінійний характер і побудована лінійна модель в такому випадку буде неадекватна реальній дійсності. Нелінійне програмування використовується для задач планування виробництва, управління ресурсами, контролю якості продукції.

В загальному випадку задача нелінійного програмування має вигляд:

$$\begin{aligned} &F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min); \\ &g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i (i = 1...m); \\ &x_j \ge 0 (j = 1...n). \end{aligned} \tag{4.1}$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – нелінійні залежності цільової функції та обмежень.

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів та обчислювальних алгоритмів, які в основному ґрунтуються на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

До нелінійних методів знаходження оптимізаційних рішень відносяться: класичний метод оптимізації (за допомогою множників Лагранжа); метод прямого пошуку (градієнтний метод); випукле (квадратичне) програмування; метод Куна-Такера, та ін.

Часто задачу нелінійного програмування намагаються привести до лінійного виду, але заміна функції призводить до значних похибок, що зображено на рис. 4.1.

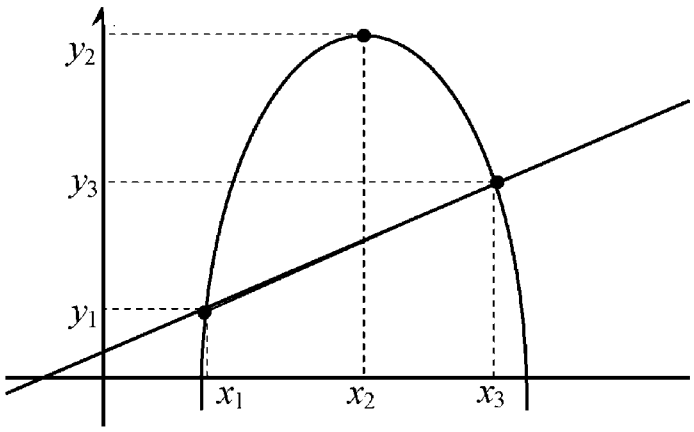


Рис. 4.1. Приклад випуклої функції.

В точках x_1 та x_3 значення обох функцій співпадають, а в точці x_2 відрізняються значною мірою.

Ми бачимо, що лінеаризація нелінійних процесів не завжди себе виправдовує і в загальному випадку є досить складною математичною задачею.

При розв'язуванні нелінійних задач використовують наближені методи, більшість яких дають змогу знаходити локальні оптимуми, а вже знайшовши всі локальні оптимуми, методом порівняння значень цільової функції у кожній з точок локального оптимуму можна знайти глобальний. Наприклад, на рис. 4.2 маємо на деякому відрізку локальні оптимуми в точках x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_9 та x_{10}, а глобальні – в точках x_3 та x_8. Проте для практичних розрахунків такий метод не завжди ефективний, тому що часто наближені методи не «вловлюють» глобального оптимуму, особливо коли глобальний оптимум лежить досить близько до локального.

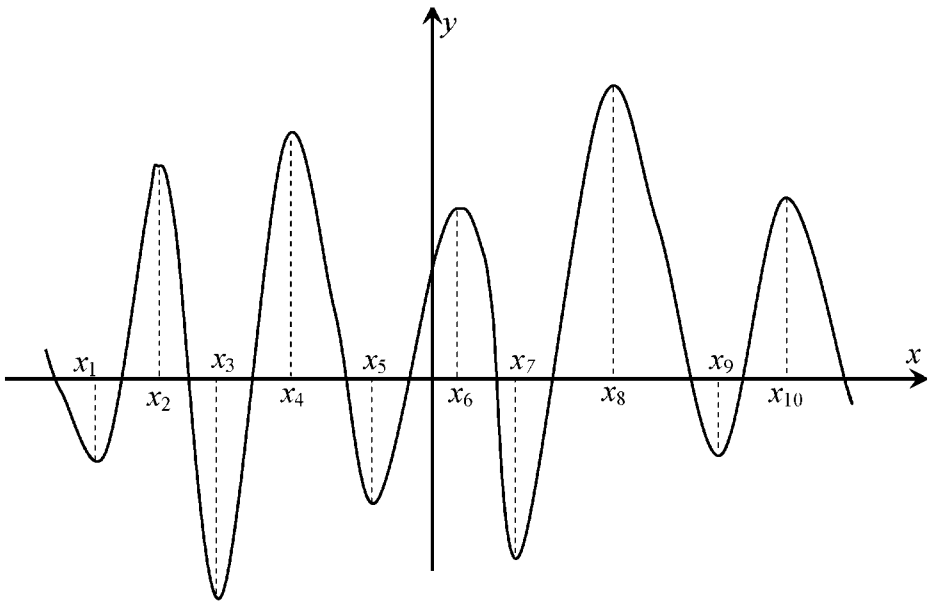


Рис. 4.2. Приклад нелінійної функції.

У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною, а в нелінійних вона може бути або граничною, або такою, що міститься всередині допустимої області розв'язків.

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель загальної задачі нелінійного програмування.
2. В яких випадках використовуються нелінійні методи знаходження оптимізаційних рішень?
3. Які існують методи нелінійного програмування?
4. Сформулювати задачу випуклого (квадратичного) програмування.
5. Яка функція називається випуклою?
6. Який вигляд має функція Лагранжа?

Література: [1, с. 468–491; 5, с. 186-211; 7, с. 139-147; 9, с. 69-70].

Тема 5. МЕТОДИ ТА СПОСОБИ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

Управлінське рішення – це сукупний результат творчого процесу (суб'єкта) та дій колективу (об'єкта управління) для вирішення конкретної ситуації, що виникла у зв'язку з функціонуванням системи. Управлінські рішення є соціальним актом, що організовує і спрямовує в певне русло діяльність трудового колективу та виконує роль засобу, який сприяє досягненню мети, поставленої перед підприємством.

Зміст управлінського рішення розкривається у його функціях, які воно виконує в загальній системі управління господарською діяльністю організацій і підприємств. Виділяють три основні функції управлінських рішень (табл. 5.1).

Таблиця 5.1.

Функції управлінських рішень та їх характеристика

№	Функція	Характеристика
1	Скеровуюча	Будь-яке рішення розробляють, виходячи з певної стратегії управління соціально-економічною системою, організацією чи підприємством з урахуванням довгострокової перспективи. Виходячи зі стратегічної лінії розвитку, у рішенні ставиться конкретне завдання, яке потрібно виконати в певний термін. При цьому найкращих результатів досягають у тих випадках, коли поставлене завдання забезпечує реалізацію принципу: те, що вигідно підприємству, має бути вигідним і окремому працівнику

2	Координуюча (узгодження)	Управлінське рішення визначає місце кожної ланки, підрозділу, працівника у вирішенні поставлених завдань, погоджує та взаємно пов'язує їх дії та необхідні ресурси в часі і просторі. Таким чином, функція координації та узгодження у поєднанні з іншими заходами покликана забезпечувати чітку узгодженість дій всього трудового колективу, ритмічність виконання виробничої програми
3	Мобілізуюча (стимулююча)	Зміст цієї функції полягає у забезпеченні найбільш повної активізації окремих виконавців чи трудових колективів для досягнення сформульованих у рішенні цілей

Управлінські рішення відрізняються різноманітністю форм і змісту. Тому використовують різні ознаки для їх групування та класифікації, виділяючи як загальні, так і особливі риси, притаманні окремим видам рішень (табл. 5.2).

Таблиця 5.2.

Види управлінських рішень

№	Класифікаційна ознака	Види управлінських рішень	Характеристика
1	*2*	*3*	*4*
1	За цілями підприємства	Стратегічні (перспективні)	Рішення, які встановлюють основні шляхи розвитку об'єкта управління на тривалий період часу. Вони стосуються розширення або скорочення бізнесу і його ресурсів , або виходу на ринки інших країн чи випуску нових видів продукції
		Тактичні (поточні)	Це рішення, які покликані забезпечувати досягнення найближчих цілей, вирішення, як правило, часткових завдань. Ця група містить такі рішення, як калькуляція цін на товари та послуги, рекламні та торгівельні витрати. Вони мають характер регулювання чи коригування відхилень у системі, зумовлених непередбаченими раніше обставинами
		Оперативні (щоденні)	Передбачають негайне втручання до стану і розвитку об'єкта управління приймаються, як правило, службовцями найнижчих ланок, більшість з яких тимчасові та базуються на конкретній інформації: наприклад, відповіді на запити покупців щодо характеристик товару. Їхні рішення, звичайно, є меншими за масштабом та впливають на вузький діапазон виробничих процесів

2	За періодом дії	Довгострокові (прогнозні)	Призначені для досягнення стратегічних цілей підприємства, тому період їх виконання складає від одного до п'яти років
		Середньострокові (тактичні)	Пов'язані з виконанням тактичних цілей і вирішенням поточних проблем. Часовий інтервал їх вирішення становить період до одного року
		Короткострокові (оперативні)	Забезпечують виконання щоденних рішень, пов'язаних з виробничими питаннями. Період виконання може займати час від декількох хвилин або годин до декількох днів або тижнів
3	За функціональним змістом	Організуючі	Пов'язані з вирішенням загально-організаційних питань, що визначають діяльність підприємства в цілому
		Координуючі	Характеризують управлінські функції в межах виконання конкретних проектів або робіт, передбачають розподіл функціональних обов'язків і поточне керівництво
		Активізуючі	Визначають рішення і дії керівництва, спрямовані на прискорення термінів або обсягів виконання робіт, пов'язані з прийняттям заходів стимулюючого характеру, мотивацією праці
		Регулюючі	Спрямовані на вирішення питань поточного характеру, пов'язаних з виконанням конкретних робіт. Передбачають постійний аналіз стану і розвитку об'єкта управління та внесення своєчасних змін до виконуваних робіт
		Контролюючі	Включають заходи, що застосовуються керівництвом для визначення стану і поведінки об'єкта управління, оцінки відхилень від заданих параметрів і приведення показників до нормального рівня
4	За масштабом виконання	Загальні (глобальні)	Пов'язані з питанням, що стосуються всього персоналу господарюючого суб'єкта, можуть визначати режим праці, умови роботи
		Спеціальні (локальні)	Пов'язані з функціонуванням окремих структурних підрозділів або виконанням окремих видів робіт, що потребують врахування специфічних умов їх організації та виконання
5	За характером рішення	Стандартні або прийняті автоматично	Це такі рішення, що однозначно диктуються обставинами, постійно повторюються. Вони пропонують набір стандартних дій: вимагають від керівника інструктаж, інформацію про початок дій, контролю, стимулювання
		Творчі	Пов'язані з унікальними ситуаціями, передбачають нестандартні дії та вимагають від керівника дослідження проблем, розробки альтернатив, вибору варіантів, навчання виконавців

		Прийняті за аналогією	Якщо це рішення відноситься до групи щоденних, тоді його характеристика співпадає зі стандартними рішеннями. У випадку, якщо рішення є разовим, але подібні рішення приймались в межах підприємства чи галузі, тоді порядок дій керівництва визначається за аналогічною ситуацією
6	За умовами прийняття та імовірності результатів	В умовах визначеності	Рішення приймаються в умовах визначеності, коли керівник точно знає результат кожного з альтернативних варіантів вибору. Наприклад, можна точно встановити на найближчу перспективу, якими будуть витрати на виробництво певного виробу, оскільки орендна плата, вартість матеріалів і робочої сили відомі або можуть бути розраховані з високою точністю
		В умовах ризику	Належать рішення такі, результати яких не є визначеними, але імовірність кожного результату відома. Імовірність визначається як ступінь можливості здійснення певної події і змінюються від 0 до 1. Сума ймовірностей усіх альтернатив повинна дорівнювати одиниці
		В умовах невизначеності	Рішення приймаються в умовах невизначеності, коли неможливо оцінити імовірність потенційних результатів. Це відбувається тоді, коли фактори, які вимагають обліку, настільки нові й складні, що про них неможливо отримати достатньо релевантної інформації. В підсумку імовірність певного наслідку неможливо передбачити з достатнім ступенем достовірності. Невизначеність характерна для деяких рішень, які доводиться приймати в обставинах, які швидко змінюються
7	За характером впливу	Директивні	Визначаються наказовим характером інформування про виконання робіт. Доводяться до відома виконавців у вигляді наказів або розпоряджень керівництва, включають можливість невиконання такого рішення або зміну порядку його виконання
		Нормативні	Такі рішення містяться, як правило, у зовнішніх та внутрішніх нормативних документах (норми, нормативи, інструкції, порядки). Можуть носити як загальний, так і спеціальний характер, є обов'язковими для виконання
		Методичні	Пов'язані з визначенням конкретного порядку, виконання певних видів робіт. Доводяться до виконавців через розроблені методики, методичні розробки, вказівки, рекомендації, порядки, стандарти. Як правило, є обов'язковими для дотримання, проте можуть передбачити певні коригування
		Орієнтуючі	Приймаються в ході видачі завдань, делегування повноважень, носять спрямовуючий характер, покликані задавати основний напрям дій

		Рекомендуючі	Можуть носити зовнішній та внутрішній характер, спрямовані на надання описових характеристик певних дій, робіт. Виконання таких рішень є бажаним, але не обов'язковим
		Дозволяючи	Пов'язані, як правило, з аналізом відповідності дій виконавців цілям підприємства та надання дозволу на виконання таких дій. Можуть повідомлятись у вигляді усних або письмових дозволів, резолюцій, надписів
8	За способом прийняття	Індивідуальні	Таке рішення приймається однією особою і передбачає повне покладання відповідальності за наслідки його прийняття на цю особу. Приймається за короткий період часу. Застосовується для вирішення простих, шаблонних питань процедурного характеру
		Колективні	Прийняття такого рішення здійснюється групою осіб, передбачає значні витрати часу на його прийняття, проте дозволяє зібрати достатню кількість інформації щодо проблеми. Застосовується для вирішення складних проблем
		Консультативні (дорадчі)	Приймаються з урахуванням думки багатьох осіб, що мають відношення до проблеми, передбачає знаходження компромісу між усіма наявними думками
9	За ступенем ефективності	Оптимальні	Такі рішення враховують найкраще співвідношення дій та їх ефективність, також можуть передбачати рівне урахування інтересів сторін, що приймають рішення
		Раціональні	Спрямовані на стабільне підвищення ефективності дій у перспективі, тому на етапі прийняття такого рішення може спостерігатись зворотній ефект перевищення витрат над ефектом від виконаних робіт
10	За способом обґрунтування	Організаційні рішення	Це вибір, який повинен зробити керівник, щоб виконати обов'язки, зумовлені посадою. Мета організаційного рішення – забезпечення руху до поставлених перед підприємством завдань
		Інтуїтивні рішення	Ґрунтуються на припущенні, що вони засновані на "шостому почутті", та передчутті, що вибір правильний. Вони приймаються за наявності значного досвіду роботи і відсутність часу. Недоліком цих рішень є відсутність гарантії успіху
		Адаптаційні рішення	Базуються на аналогії з минулими успішними діями. Приймаються за умов, що є достатні загальні знання, досвід, здоровий глузд. Недоліками такого рішення є те, що здоровий глузд зустрічається рідко, необхідний досвід може бути відсутній, обставини можуть не відповідати тим, які вже були
		Раціональні (аналітичні)	Ґрунтуються на всебічному науковому аналізі, наявності можливостей дослідження проблеми. Недоліком таких рішень можуть бути великі затрати часу та засобів

		Засновані на суб'єктивних судженнях	Такі рішення сприймаються на віру як аксіома це може бути думка чи висновок експерта, фахівця, спеціаліста. Ці рішення типові для ситуації, в якій управлінець не володіє достатньою компетенцією для самостійного аналізу, а тому звертається за допомогою до професіонала
11	За альтернативністю рішень	Безальтернативні	Мають лише один варіант дій. Як правило, є бінарними, передбачають два протилежних варіанти дій
		Багатоваріантні	Такі рішення мають декілька різних варіантів дій, з яких вибирається оптимальний
		Інноваційні	Передбачають формування принципово-наукового варіанту. Штучно складаються із елементів, які раніше були відкинуті
12	В залежності від особистості керівника	Врівноважені рішення	Приймаються керівниками, які уважно та критично відносяться до своїх дій, існуючих гіпотез та їх перевірки. Зазвичай, перед тим як прийняти повне рішення, вони вже мають вихідну ідею
		Імпульсивні рішення	Рішення, що приймають особи, які досить легко генерують нові ідеї в необмежених кількостях, однак вони не в змозі їх як слід перевірити, оцінити
		Інертні рішення	Такі рішення стають результатом обережного пошуку. В них контрольні та уточнюючі дії переважають над генеруванням ідей, тому в таких випадках важко виявити оригінальність, новаторство
		Ризиковані рішення	Рішення, що відрізняються від імпульсивних тим, що їх автори не потребують ретельного обґрунтування своїх гіпотез та, якщо впевнені у собі, можуть вирішити проблеми на належному рівні
		Обережні рішення	Рішення характеризуються ретельністю оцінки керівником усіх варіантів. Вони у меншому ступені ніж інертні характеризуються новизною та оригінальністю

Прийняття управлінських рішень в умовах ризику.

Методи прийняття рішень в умовах неповної інформації та конфліктності

Елементи невизначеності властиві функціонуванню і розвитку багатьох економічних процесів, обумовлюють виникнення ситуацій, які не мають однозначного рішення.

Ця обставина ускладнює процес прийняття рішень в умовах невизначеності і викликає необхідність використання відповідних методів, які дають можливість за заданими цілями і обмеженнями отримати оптимальні для господарської практики управлінські рішення.

В залежності від ступеня невизначеності розрізняють ситуації ризику і ситуації невизначеності. Ситуація ризику характеризується тим, що в результаті кожної дії можуть бути отримані різні результати, ймовірність яких відома або може бути оцінена.

На методи прийняття рішень в умовах ризику впливає багатоваріантність критеріїв, які застосовуються для оцінки ризику.

В загальному вигляді постановка та розв'язування задачі оптимізації прийняття рішень в умовах ризику може бути представлена таким чином:

- маємо m можливих рішень $P_1, P_2, \ldots, P_m$;
- умови обставин наперед точно невідомі, однак про них можна зробити n передбачень $O_1, O_2, \ldots, O_n$;
- результат, так званий виграш a_{ij}, відповідає кожній парі сполучень рішень P і обставин O, може бути представлений у вигляді таблиці ефективності:

Таблиця 5.3

Таблиця ефективності

Варіанти рішень (P_i)	Варіанти умов обставин (O_j)			
	O_1	O_2	...	O_n
P_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
P_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
P_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{nm}

Виграші, вказані в таблиці 5.1 є показниками ефективності рішень. При виборі рішення в якості критерію ризику використовують середньозважений показник ризику. Перевагу надають рішенню із найменшим значенням цього показника. Даний показник визначається за формулою:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} p_j, \quad i = \overline{1,m},$$

де H_{ij} – втрати, які відповідають сполученню певного рішення і умов обставин; p_j – ймовірність O_j-ї умови обставин.

Приклад 1.

Таблиця 5.4

Таблиця ефективності нових видів послуг

Варіанти рішень (P_i)	Варіанти умов обставин (O_j)		
	O_1	O_2	O_3
P_1	0,25	0,35	0,40
P_2	0,75	0,20	0,30
P_3	0,35	0,82	0,10
P_4	0,80	0,20	0,35

За наведеними даними необхідно визначити ту стратегію (лінію поведінки), яка в порівнянні з іншими є найбільш вигідною (при $p_1 = 0{,}5, p_2 = 0{,}30, p_3 = 0{,}2$). Визначимо втрати для всіх рішень при всіх варіантах умов обставин і складемо наступну таблицю:

Таблиця 5.5

Величина втрат при наданні нових видів послуг

Варіанти рішень (P_i)	Варіанти умов обставин (O_j)		
	O_1	O_2	O_3
P_1	0,55	0,47	0,00
P_2	0,05	0,62	0,10
P_3	0,45	0,00	0,20
P_4	0,00	0,72	0,05

Показник ризику для кожного рішення складе:

$$R_1 = 0{,}55 * 0{,}5 + 0{,}47 * 0{,}30 + 0{,}00 * 0{,}2 = 0{,}416;$$
$$R_2 = 0{,}05 * 0{,}5 + 0{,}62 * 0{,}30 + 0{,}10 * 0{,}2 = 0{,}231;$$
$$R_3 = 0{,}45 * 0{,}5 + 0{,}00 * 0{,}30 + 0{,}30 * 0{,}2 = 0{,}265;$$
$$R_4 = 0{,}00 * 0{,}5 + 0{,}72 * 0{,}30 + 0{,}05 * 0{,}2 = 0{,}226.$$

Таким чином, рішення P_4 для даних умов є найменш ризикованим.

Використання розглянутого метода значно підвищує ступінь достовірності оцінок і результатів у порівнянні з підходами до прийняття рішень без кількісної оцінки варіантів. Покращення результатів досягається за рахунок скорочення кількості невдалих результатів в числі багатьох господарських циклів.

Прийняття рішень в умовах відсутності повторюваності подій

При прийняті рішень в умовах невизначеності, коли ймовірності можливих варіантів обставин невідомі, може бути застосована низка критеріїв, вибір кожного з яких обумовлений характером проблеми, що розв'язується, встановлених цільових установок, і обмежень, схильності до ризику особи, що приймає рішення.

До числа класичних критеріїв, які використовуються при прийнятті рішень в умовах невизначеності, можна віднести:

- принцип недостатнього обґрунтування Лапласа;
- максимінний критерій Вальда;
- мінімаксний критерій Севіджа;
- критерій узагальненого максиміну (оптимізму-песимізму) Гурвіца.

Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа використовується у випадку, якщо можна зауважити, що будь-який з варіантів обставин не більш ймовірний ніж інший. Тоді ймовірності можна рахувати рівними і обирати рішення таким же чином як і в умовах ризику – за середньозваженим показником ризику. Це означає, що превагу слід надати варіанту, який забезпечить мінімум у виразі:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} p_j = p_j \sum_{j=1}^{n} H_{ij} \ , \ i = \overline{1,m}$$

Приклад 2.

З врахуванням наведених даних про втрати в таблиці 5.5 і ймовірністю кожного варіанту 0,33, середньозважений показник ризику для кожного рішення складе:

$$R_1 = 0{,}55 * 0{,}33 + 0{,}47 * 0{,}33 + 0{,}00 * 0{,}33 = 0{,}3366;$$
$$R_2 = 0{,}05 * 0{,}33 + 0{,}62 * 0{,}33 + 0{,}10 * 0{,}33 = 0{,}2541;$$
$$R_3 = 0{,}45 * 0{,}33 + 0{,}00 * 0{,}33 + 0{,}30 * 0{,}33 = 0{,}2145;$$
$$R_4 = 0{,}00 * 0{,}33 + 0{,}72 * 0{,}33 + 0{,}05 * 0{,}33 = 0{,}2541.$$

В якості оптимального слід обрати варіант рішення P_3.

Максимінний критерій Вальда використовується у випадках, коли потрібна гарантія, що виграш у будь-яких умовах буде не меншим, ніж найбільший із можливих в найгірших умовах. Найкращим рішенням буде те, для якого виграш буде максимальним із всіх мінімальних при різних варіантах умов. Формалізований вираз цього критерію має вигляд:

$$\max_i \min_j a_{ij} \ .$$

Приклад 3.

Скористаємося наведеним прикладом в таблиці 5.4 для ілюстрації вибору оптимального варіанту за критерієм Вальда.

Таблиця 5.6

Таблиця ефективності нових видів послуг

Варіанти рішень (P_i)	Варіанти умов обставин (O_j)		
	O_1	O_2	O_3
P_1	0,25	0,35	0,40
P_2	0,75	0,20	0,30
P_3	0,35	0,82	0,10
P_4	0,80	0,20	0,35

Мінімальна віддача по варіантах виділена жирним шрифтом. Із таблиці можна зробити висновок, що максимальний з мінімальних результатів дорівнює 0,25. Таким чином, перевагу слід надати варіанту P_1, який забезпечує цей результат. Це найбільший **гарантований** результат.

Мінімаксний критерій Севіджа використовується в тих випадках, коли потрібно за будь-яких умов уникнути великого ризику. У відповідності із цим критерієм перевагу слід надати рішенню, для якого втрати максимальні прирізних варіантах умов обставин будуть мінімальними. Його формалізований вираз:

$$\min_i \max_j H_{ij} .$$

Приклад 4.

Таблиця 5.7

Величина втрат при наданні нових видів послуг

Варіанти рішень (P_i)	Варіанти умов обставин (O_j)		
	O_1	O_2	O_3
P_1	**0,55**	0,47	0,00
P_2	0,05	**0,62**	0,10
P_3	**0,45**	0,00	0,20
P_4	0,00	**0,72**	0,05

Із таблиці можна зробити висновок, що мінімальні із максимальних втрат складають 0,45, а це означає, що перевагу слід надати варіанту P_3, який саме і забезпечує їх мінімальне значення. Вибір зазначеного варіанту **гарантує,** що у випадку несприятливих обставин втрати не перевищать 0,45.

Критерій узагальненого максимуму (оптимізму-песимізму) Гурвіца використовується, якщо потрібно зупинитися між лінією поведінки в розрахунку на найкраще і найгірше. В цьому випадку перевага надається варіанту рішення, для якого буде максимальним значення показника G, який визначається за формулою:

$$G = \{k \cdot min\ a_{ij} + (1-k) \cdot max\ a_{ij}\},$$

де k – коефіцієнт, який розглядається як показник оптимізму ($0 \le k \le 1$), при $k = 0$ – лінія поведінки в розрахунку на краще, при $k = 1$ – в розрахунку на гірше.

Приклад 5.

Таблиця 5.8

Значення показника G для різних k

Варіанти рішень (P_i)	Значення коефіцієнта k				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
P_1	0,400	0,362	0,325	0,287	0,250
P_2	0,750	0,612	0,475	0,337	0,200
P_3	0,820	0,640	0,460	0,280	0,100
P_4	0,800	0,650	0,500	0,350	0,200
Оптимальне рішення	P_3	P_4	P_4	P_4	P_1

Із зміною коефіцієнта k змінюється варіант рішення, якому слід надати перевагу.

Контрольні запитання

1. Сформулювати загальні принципи управління.
2. Як класифікуються функції управлінських рішень?
3. Назвіть види управлінських рішень.
4. Вимоги, що висуваються до управлінських рішень.
5. Методи та способи прийняття управлінських рішень.
6. Назвіть нестандартні підходи прийняття управлінських рішень.
7. Методи прийняття рішень в умовах неповної інформації та конфліктності.
8. Прийняття рішень в умовах відсутності повторюваності подій.
9. Назвіть способи зниження економічного ризику.

Література: [5, с. 346-372; 20, с. 5-10, 11-25, 46-61].

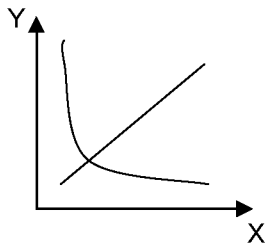
Тема 6. КОРЕЛЯЦІЯ ДВОХ ЗМІННИХ

Економетрична модель – різновид економіко-математичної моделі, параметри якої оцінюються за допомогою методів математичної статистики.

Одним з основних підходів у вимірі зв'язку між досліджуваними показниками в економетричній моделі є кореляційно-регресивний аналіз. Він являє собою комплекс методів, за допомогою яких визначається вид рівняння для досліджуваних показників та розрахунок їх параметрів (регресивний аналіз), а також встановлення тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях (кореляційний аналіз).

Варто відрізняти кореляційний зв'язок від функціонального. Для вивчення кореляційних зв'язків використовуються методи кореляційного і регресійного аналізу. Кореляційні методи застосовуються для опису взаємодії випадкових величин; методи регресійного аналізу – при дослідженні зв'язку між випадковими значеннями функції і невипадкових значень аргументів. Кореляційна залежність виявляє тенденцію у відношенні Y та X.

Функціональний зв'язок – це такий зв'язок, при якому кожному значенню незалежної перемінної (аргументу) відповідає строго визначена величина залежної перемінної (функції). Функціональний зв'язок часто називають повним зв'язком, оскільки в ній відбивається вся безліч причинно-наслідкових відношень, що існують між розглянутими ознаками.

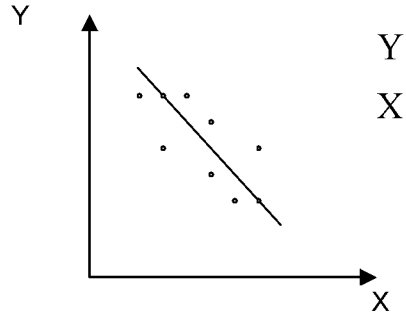


Y – вартість;

X – кількість одиниць.

Кореляційний зв'язок є неповним статистичним зв'язком. При кореляційній взаємодії на показник-функцію впливають не тільки фактори-аргументи, відібрані в процесі дослідження, але й безліч інших ознак, що не піддаються вивченню в силу недосконалості статистичного обліку, труднощі обчислення і т.п.

При кореляційному зв'язку кожному значенню незалежної перемінної можуть відповідати декілька значень (статистичний розподіл) функції.



Y – продуктивність праці;

X – втрати робочого часу.

Термінологія, яка використовується в економіко-математичному моделюванні

Система (у перекладі з грецької – ціле, зіставлене з частин) – це множина взаємозв'язаних елементів, які складають певну єдність.

Моделлю називається наближене чи спрощене відтворення найважливіших сторін, особливостей і характеристик систем, явищ і процесів, що вивчаються.

Економетричні (статистичні) моделі призначенні для аналізу і прогнозування розглядаємих економічних явищ в умовах невизначеності вхідних даних і реалізуються методами математичної статистики.

Економіко-математичні методи – узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Параметри – це чисельні ознаки показників, такі як норми витрат сировини, матеріалів, часу на виробництво тощо.

Регресія – це статистичний метод, який дозволяє знайти рівняння, що найкращим чином описує масив фактичних даних (спостережень).

В усіх випадках необхідно, щоб модель мала достатньо детальний опис об'єкту, який дозволяв би здійснювати вимір економічних величин та їх взаємозв'язок, щоб були виділені фактори, які впливають на досліджувані показники.

Зміст змінних і рівнянь в економетричній моделі

В регресійному аналізі розрізняють рівняння парної (простої) та множинної (багатофакторної) регресії.

Коли зв'язок із залежною змінною Y здійснюється з одним видом незалежних змінних X, то рівняння регресії є найпростішим і має назву рівняння парної регресії (проста модель). Якщо залежна змінна y пов'язана з декількома видами незалежних змінних X_j $(j=1...m)$, то така залежність має назву рівняння множинної регресії.

У загальному вигляді проста вибіркова регресійна модель запишеться так:

$$Y = f(X) + u,$$

де X – незалежна змінна,
Y – залежна змінна,
u – випадкова складова.

Незалежні фактичні змінні ***X*** найчастіше бувають детермінованими і вони є наперед заданими змінними, або вхідними показниками.

Випадкові складові ***u*** називають ще стохастичними складовими, помилками або частіше залишками. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

Прості лінійні регресійні моделі встановлюють лінійну залежність між двома змінними. При цьому одна із змінних вважається залежною змінною (Y) та розглядається як функція від незалежної змінної (X).

У загальному вигляді проста вибіркова регресійна модель запишеться так:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де Y – вектор спостережень за залежною змінною;
X – вектор спостережень за незалежною змінною;
a_0, a_1 – невідомі параметри регресійної моделі;
u – вектор випадкових величин (помилок).

У загальному матричному вигляді економетрична модель записується так:

$$Y=AX+u,$$

де A – матриця параметрів моделі розміром m×n (m – кількість незалежних змінних, n – число спостережень);
Y – матриця значень залежної змінної;
X – матриця незалежних змінних;
u – матриця випадкової складової.

Регресійна модель називається лінійною, якщо вона лінійна за своїми параметрами. Отже, модель (2.1) є лінійною регресійною моделлю.

Французький математик Лежандром у XIX ст. запропонував метод знаходження теоретичної лінії, наближеної до фактичних даних як мінімальну суму (S) квадратів відхилення їх ординат Y_i від теоретичних значень Y:

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y - Y_i)^2 = \min$$

Назва цього методу – метод найменших квадратів (або скорочено 1МНК).

Лабораторна робота № 13
«Модель парної лінійної кореляційної залежності»

Задача. Згідно з вибіркою статистичних даних (табл. 13.2) потрібно побудувати лінійну модель вигляду $\mathbf{Y=\beta_0+\beta_1 \cdot X}$ залежності об'єму реалізації продукції від витрат на впровадження інновацій в попередньому періоді.

Потрібно: оцінити точність і достовірність моделі; побудувати модель в декартових координатах; виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Вибірка даних характеризує роботу підприємства за останні 10 місяців. У вибірці кожному значенню Y – об'єм реалізації (тис. грн.) відповідає значення X – витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді (тис грн.).

Номер варіанту завдання з табл. 13.2 визначається за варіантом з табл.13.1. Перша цифра – номер стовпця для показника Y, а друга – номер стовпця для показника X .

Таблиця 13.1

Варіант	Номери варіантів за завданням	**Варіант**	Номери варіантів за завданням	**Варіант**	Номери варіантів за завданням
1	1, 12	**11**	1, 11	**21**	1, 19
2	2, 20	**12**	2, 12	**22**	2, 13
3	3, 14	**13**	3, 13	**23**	3, 15
4	4, 11	**14**	4, 14	**24**	4, 19
5	5, 14	**15**	5, 20	**25**	5, 19
6	6, 16	**16**	6, 17	**26**	6, 14
7	7, 15	**17**	7, 17	**27**	7, 13
8	8, 15	**18**	8, 18	**28**	8, 12
9	9, 13	**19**	9, 19	**29**	9, 11
10	10, 12	**20**	10, 20	**30**	10, 19

Таблиця 13.2

Вихідні дані для виконання лабораторних робіт

Номер спостереження	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	151,9	411,4	676,3	804,9	559,5	804,9	851,7	745,3	583,1	802,1
2	161,7	559,5	745,3	832,1	583,1	559,5	1395,1	676,3	591,5	804,9
3	205,1	583,1	795,1	851,7	592,3	592,3	1086,3	591,5	592,3	804,9
4	301,3	591,5	802,1	862,3	704,9	583,1	802,1	411,4	676,3	832,1
5	351,1	592,3	804,9	1023,2	804,9	832,1	795,1	351,1	745,3	851,7
6	411,4	676,3	804,9	1053,1	832,1	851,7	745,3	301,3	795,1	862,3
7	559,5	745,3	832,1	1086,3	951,7	1395,1	676,3	205,1	802,1	1023,2
8	583,1	795,1	851,7	1251	962,3	1086,3	591,5	151,9	804,9	1053,1
9	591,5	802,1	862,3	1289	1023,2	802,1	411,4	161,7	804,9	1086,3
10	592,3	804,9	1023,2	1395,1	1053,1	795,1	351,1	289	832,1	1251

Продовження таблиці 13.2

Номер спостереження	Варіанти									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3,52	11,5	19,5	24,3	11,5	15	21,5	20,2	14	21,5
2	8,9	13,9	19,9	25	14,2	14,3	44,5	14	14,2	22,7
3	9,7	14	20,2	25,2	14,3	14,2	34,1	19,5	14,3	24,3
4	9,8	14,2	21,5	27,1	21,5	11,5	28,2	19,9	19,5	25
5	10,1	14,3	22,7	28,2	24,3	24,3	22,7	13,9	19,9	25,2
6	11,5	19,5	24,3	34,1	25	21,5	20,2	10,1	20,2	27,1
7	13,9	19,9	25	34,1	25,2	44,5	14	9,8	21,5	28,2
8	14	20,2	25,2	35,2	27,1	34,1	19,5	9,7	22,7	34,1
9	14,2	21,5	27,1	36,3	30	28,2	19,9	8,9	24,3	34,1
10	14,3	22,7	28,2	44,5	34,1	22,7	13,9	35,2	25	35,2

Приклад виконання лабораторної роботи

Задача. Маємо вибірку даних, які характеризують роботу підприємства за останні 8 місяців. Побудувати парну лінійну регресійну модель виду $\mathbf{Y=\beta_0+\beta_1*X}$ об'єму реалізації підприємства (Y), тис. грн., в залежності від витрат на впровадження інновацій в попередньому періоді (X), тис грн.

Оцінити тісноту та значимість зв'язку між змінними моделі. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів.

Для аналізу необхідно розрахувати:

1) коефіцієнт детермінації;
2) скоригований коефіцієнт детермінації;
3) стандартні похибки оцінок параметрів моделі порівняти з величиною оцінок;
4) перевірити значущість змінної за t-критерієм Стьюдента;
5) знайти інтервали надійності для оцінок параметрів моделі;
6) відобразити модель на графіку;
7) знайти прогнозні значення матриці залежних змінних $Y_{пр}$, які відповідають ***очікуваним значенням*** матриці незалежних змінних $X_{пр}$.
8) зробити економічний висновок.

Вихідні дані для розрахунку в табл.13.3.

Таблиця 13.3

Спостереження	Об'єм реалізації, тис. грн.	Витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді, тис. грн.
	Y	X
1	862,3	27,1
2	804,9	25,2
3	804,9	25,0
4	559,5	14,3
5	592,3	14,2
6	583,1	11,5
7	832,1	24,3
8	851,7	21,5
Середнє значення	**736,35**	

Для спрощення розрахунків використаємо вбудовану електронні в таблиці Microsoft Excel статистичну функцію ЛИНЕЙН. Ця функція застосовує метод найменших квадратів, щоб визначити оцінки параметрів лінійної регресії.

Суть методу найменших квадратів, полягає у наступному: сума квадратів відхилень ординат точки, що спостерігається, (X_i, Y_i) від відповідної ординати точки, що лежить на регресійній прямій, повинна бути найменшою

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2 = \min .$$

Результат застосування статистичної функції ЛИНЕЙН – це оцінка

параметрів лінійної регресії та регресійна статистика:

20,45	319,44
3,033	64,203
0,883	48,935
45,47	6
108879,7	14367,5

$\beta_0 = 319,44$; $\beta_1 = 20,45$

Можна побудувати рівняння регресії: $Y_{розр} = 319,44 + 20,45\ X$.

Коефіцієнт регресії $\beta_1 = 20,45$ говорить про те, що збільшення витрат на впровадження інновацій на 1 тис. грн. збільшить об'єм реалізації на 20,45 тис. грн.

Для визначення статистичних коефіцієнтів та подальших розрахунків знаходимо відхилення (табл.13.4).

Таблиця 13.4

$Y_{факт}$	$Y_{розр}$	$(Y_{фак} - Y_{роз})^2$	$(Y_{фак} - Y_{сер})^2$	$(Y_{роз} - Y_{сер})^2$
1	2	3	4	5
862,3	873,62		18842,0	
804,9	834,76		9685,0	
804,9	830,67		8896,7	
559,5	611,86		15496,6	
592,3	609,82		16009,9	
583,1	554,61		33030,7	
832,1	816,36		6401,3	
851,7	759,10		517,6	
		14367,5	108879,7	108879,7

Статистична функція ЛИНЕЙН обчислює додаткову регресійну статистику:

$\sum (Y_{розр} - \overline{Y})^2$ – сума квадратів відхилення, що пояснюється регресією (колонка 5 з табл. 13.4);

$\sum(Y_{факт} - Y_{розр})^2$ – сума квадратів відхилення, що пояснюється похибкою u (колонка 3 з табл. 13.4);

$\sum(Y_{факт} - \bar{Y})^2$ – загальну суму квадратів відхилень розраховуємо (колонка 4 табл. 13.4).

Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними моделі

Тісноту зв'язку між залежною змінною Y та незалежною змінною X оцінюють за допомогою статистичних характеристик: **коефіцієнта детермінації, коефіцієнта кореляції**. За допомогою цих коефіцієнтів перевіряється відповідність побудованої регресійної моделі (теоретичної) фактичним даним. **Значимість зв'язку** визначається за допомогою F-критерію Фішера.

Коефіцієнт детермінації

Розраховується за формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{розр} - Y_{сер})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_{факт} - Y_{сер})^2} \qquad (13.1)$$

Статистична функція ЛИНЕЙН обчислює коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 0{,}883$$

Скоригований коефіцієнт детермінації:

$$R^2_{скор} = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0{,}883) \cdot \frac{8-1}{8-1-1} = 0{,}864$$

Скоригований коефіцієнт детермінації не перевищує одиниці

$$R^2_{скор} \le 1$$

Справедлива нерівність:

$$R^2_{скор} \le R^2$$

$$0{,}864 < 0{,}883$$

Коефіцієнт кореляції (індекс кореляції)

Дає **кількісну оцінку зв'язку** між двома показниками і розраховується за такою формулою:

$$R = \pm \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{факт} - Y_{розр})^2}{\sum_{i=1}^{n} (Y_{факт} - Y_{сер})^2}} \qquad (13.2)$$

Іноді для спрощення розрахунків тісноту кореляційного зв'язку характеризують коефіцієнтом кореляції, який розраховується за формулою:

$$R = \sqrt{R^2} = 0{,}94 \qquad (13.3)$$

F-критерій Фішера

Тестування значимості змінної X, або адекватності моделі проводиться за критерієм Фішера.

$$F_{розр} = \frac{\sum (Y_{факт} - Y_{сер})^2}{\sum (Y_{факт} - Y_{розр})^2} = 8{,}58 \qquad (13.4)$$

Розрахунковий критерій Фішера з урахуванням ступенів вільності обчислюємо за формулою:

$$F_{розр} = \frac{\sum (Y_{розр} - Y_{сер})^2 \Big/ m}{\sum (Y_{факт} - Y_{сер})^2 \Big/ n - m - 1} = 45{,}47 \qquad (13.5)$$

де m, (n–m–1) – число ступенів вільності відповідно чисельника та знаменника залежності;

n – кількість спостережень;

m – кількість незалежних змінних.

$$F_{розр} = 8{,}58$$

$F^{0,05}_{табл}$ визначаємо за допомогою статистичної функції FРАСПОБР(0,05;6;7) для рівня надійності α=0,05 і ступенів вільності відповідно $f_1 = (n–m–1) = 8–1–1=6$ та $f_2 = (n–1)= 8–1=7$:

$$F^{0,05}_{табл} = 3{,}87$$

$F_{розр} > F^{0,05}_{табл}$, робимо висновок про адекватність побудованої моделі – припускаємо присутність лінійного зв'язку.

Оцінка точності моделі

Визначаємо стандартні похибки оцінок параметрів моделі з урахуванням дисперсії залишків:

$$S_{\beta_j} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{kj}} \tag{13.6}$$

де σ_u^2 – дисперсія залишків:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - m_1} \tag{13.7}$$

c_{kj} – елемент матриці похибок **C** (матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь);

m_1 – кількість параметрів моделі.

$$S_{\beta_0^*} = 64{,}2 < 319{,}44$$

$$S_{\beta_0^*} = 3{,}03 < 20{,}45$$

Порівняємо стандартні похибки оцінки з величиною оцінки: $\frac{S_{\beta_j}}{\beta_j} 100$.

$$S_{\beta_0^*} = S_{\beta_0^*}/\beta_0^* * 100 = 64{,}2/\ 319{,}44*100 = 20{,}1\%$$

$$S_{\beta_1^*} = S_{\beta_1^*}/\beta_1^* * 100 = 3{,}03/\ 20{,}45*100 = 14{,}83\%$$

Визначається також середньоквадратичне відхилення (похибка)

$$S_{yx} = \pm\sqrt{\frac{\sum(Y_{факт} - Y_{розр})^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{14367{,}5}{8-1}} = \pm = 45{,}3 \tag{13.8}$$

Відносна похибка

$$\sigma = \frac{S_{yx}}{Y_{сер}} \cdot 100 = \frac{45{,}3}{736{,}35} \cdot 100 = 6{,}2\% \tag{13.9}$$

Перевірка значущості та довірчі інтервали

Перевірка значущості коефіцієнта детермінації

Для перевірки статистичної значущості коефіцієнта детермінації R^2 висувається нульова гіпотеза

$$H_0: \quad R^2=0.$$

$$H_0: \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Альтернативною до неї є

$$H_A: \quad \beta_i \neq 0$$

Для перевірки цих обчислюють експериментальне значення F-статистики:

$$F_{експ} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = 15{,}45 \qquad (13.10)$$

$$F^{0.05}_{табл} = 3{,}87$$

$$F_{експ} > F^{0.05}_{табл}$$

Нульова гіпотеза відхиляється, тобто існує такий коефіцієнт у регресійному рівнянні, який суттєво відрізняється від нуля, а відповідний фактор виливає на досліджувану змінну. Відхилення нуль-гіпотези свідчить про адекватність побудованої моделі.

Перевірка значущості коефіцієнта кореляції

Коефіцієнт кореляції перевіряється на значущість за допомогою t-критерію Ст'юдента. Фактичне значення t-статистики обчислюється за формулою

$$t_{експ} = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}} = 6{,}74 \qquad (13.11)$$

$$t_{табл.} = 2{,}45$$

$$|t_{експ}| > t_{табл},$$

Можна зробити висновок, що коефіцієнт кореляції достовірний (значущий), а зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Оцінка статистичної значущості параметрів моделі

Статистичну значущість кожного параметра моделі можна перевірити за допомогою t-критерію. При цьому нульова гіпотеза має вигляд

$$H_0: \quad \beta_j = 0,$$

альтернативна

$$H_A: \quad \beta_j \neq 0.$$

Експериментальне значення t-статистики для кожного параметра моделі обчислюється за формулою

$$t_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\sigma_u^2 \cdot c_{jj}}} = \frac{\beta_j}{S_{\beta_j}} \qquad (13.12)$$

де C_{jj} – діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$;

$S_{в_j}$ – стандартна похибка оцінки параметра моделі:

$$S_{\beta_j} = \sigma_u \sqrt{c_{jj}} \qquad (13.13)$$

t_1	t_0
6,74	4,98

$$t_{табл} = 2,45$$

$$|t_{експ}| > t_{табл},$$

Значення t-статистики потрапляє до критичної області (за абсолютним значенням перевищує $t_{табл}$), приймається альтернативна гіпотеза про значущість параметрів.

Знайдемо інтервали надійності для кожного окремого параметра за формулою:

$$P\{в_j^* - t \cdot S_{в_j} \prec в_j \prec в_j^* + t \cdot S_{в_j}\} = 1 - б$$

Оскільки оцінки параметрів моделі β_j*, $t_{спос}$ і стандартні похибки параметрів моделі S_{β_j} обчислені нами у попередніх пунктах, достатньо просто скористатися формулою для знаходження інтервалів:

$$= 319,44 - 2,4469 * 64,2 < \beta_0 < 319,44 + 2,4469 * 64,2$$

$$= 20,45 - 2,4469 * 3,03 < \beta_1 < 20,45 + 2,4469 * 3,03$$

$$P\ (0162,34 < \beta_0 < 476,54) = 0,95$$

$$P\ (13{,}03 < \beta_1 < 27{,}87) = 0{,}95$$

Розрахуємо коефіцієнт еластичності за формулою:

$$E_i = \frac{X}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{A_i \cdot X_{i\ сер}}{Y_{р\ сер}} = \frac{20{,}45 \cdot 20{,}39}{736{,}35} = 0{,}566.$$

Коефіцієнт еластичності говорить про те, що збільшення витрат на впровадження інновацій на 1% , збільшить об'єм реалізації на 0,566%.

Зобразимо побудовану кореляційно-регресійну модель на графіку (рис.13.1 та рис. 13.2).

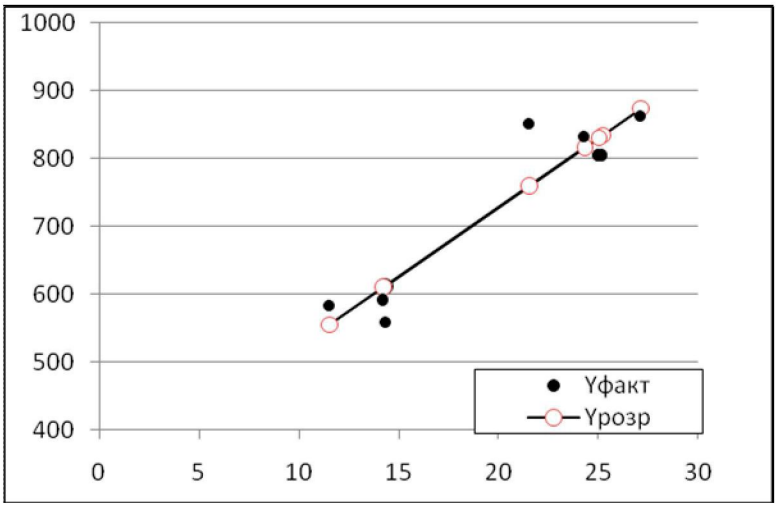


Рис. 13.1.

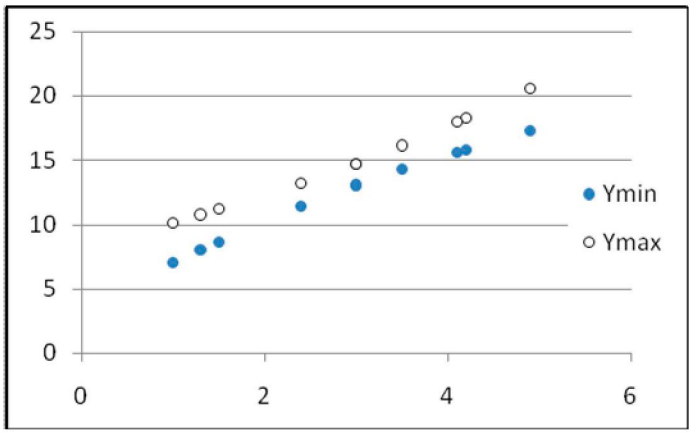


Рис. 13.2.

Прогнозування за лінійною моделлю

Побудована модель адекватна за F-критерієм, то її можна застосувати для прогнозування залежної змінної.

На підставі побудованої моделі можна знайти прогнозні значення матриці залежних змінних $Y_{пр}$, які відповідають очікуваним значенням матриці незалежних змінних $X_{пр}$.

Прогноз на перспективу буває двох видів: точковий та інтервальний.

Незміщена оцінка точкового прогнозу може розглядатися як точкова оцінка математичного сподівання прогнозного значення $Y_{пр}$

$$M\left[Y_{пр}(X_{пр})\right] = BX_{пр} \qquad (13.14)$$

а також як індивідуальне значення $Y_{пр}$ для матриці незалежних змінних $X_{пр}$, що лежать за межами базового періоду $Y_{пр} = BX_{пр}$.

У рівняння $Y_{розр} = 319{,}44 + 20{,}45\ X$ підставимо прогнозні значення фактору $\mathbf{X_{пр} = 27{,}1}$ що лежить за межами базового періоду (точковий прогноз):

$$Y_{пр} = 319{,}44 - 20{,}45 \cdot 27{,}1 = 873{,}616$$

Дисперсія похибки прогнозу дорівнює

$$y_n^2 = y_u^2 X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр} = X'_{пр}\,\mathrm{var}(B)X_{пр} \qquad (13.15)$$

де σ_u^2 – дисперсия залишків u, яка розраховується за формулою (13.7);

var*(B)* – дисперсійно-коваріаційна матриця, яка записується у вигляді:

$$\mathrm{var}(B) = \begin{vmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1\beta_2} & \dots & \sigma_{\beta_1\beta_m} \\ \sigma_{\beta_2\beta_1} & \sigma_{\beta_2}^2 & \dots & \sigma_{\beta_2\beta_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\beta_m\beta_1} & \sigma_{\beta_m\beta_2} & \dots & \sigma_{\beta_m}^2 \end{vmatrix} \qquad (13.16)$$

Матриця похибок:

$\mathbf{(X' * X)^{-1}} =$

1,72139	-0,0783024
-0,07830	0,0038407

Елементи на головній діагоналі матриці $\sigma_{\beta_j}^2$ та за її межами $\sigma_{\beta_j\beta_k}$ розраховуються за формулами:

$$\sigma^2_{\beta_j} = \sigma^2_u c_{jj} \qquad (13.17)$$

$$\sigma^2_{\beta_0} = \sigma^2_u c_{00} = 2394{,}6 \cdot 1{,}72139 = 4122{,}016$$

$$\sigma^2_{\beta_1} = \sigma^2_u c_{11} = 2394{,}6 \cdot 0{,}0038407 = 9{,}1969$$

$$\sigma_{\beta_j\beta_k} = \sigma^2_u c_{jk} \qquad (13.18)$$

$$\sigma_{\beta_0\beta_1} = \sigma^2_u c_{01} = 2394{,}6 \cdot (-0{,}0783) = -187{,}5018$$

де c_{jj}, c_{jk} – елементи матриці похибок $(X'X)^{-1}$.

$$var\ (B) = \begin{vmatrix} 4122{,}016 & -187{,}5018 \\ -187{,}5018 & 9{,}19690 \end{vmatrix}$$

Тоді дисперсія прогнозу буде:

$$y^2_n = X'_{пр}\ \mathrm{var}\,(B) X_{пр} \qquad (13.19)$$

$$X_{пр} = \begin{vmatrix} 1 \\ 27{,}1 \end{vmatrix}$$

$$X'_{пр} = \begin{vmatrix} 1 & 27{,}1 \end{vmatrix}$$

$$X'_{пр} * \mathrm{var}\,(A) = \begin{vmatrix} -959{,}2827488 & 61{,}73419732 \end{vmatrix}$$

$$\sigma^2_n = X'_{pr}\ \mathrm{var}(B) X_{pr} = 713{,}7139985$$

Середньоквадратична (стандартна) похибка прогнозу:

$$y_n = \sqrt{y^2_n} = 26{,}71543 \qquad (13.20)$$

Довірчий інтервал для прогнозних значень:

$$Y_{пр} - t_\alpha \sigma_u \sqrt{X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр}} \le M(Y_{пр}) \le Y_{пр} + t_\alpha \sigma_u \sqrt{X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр}} \qquad (13.21)$$

Інтервальній прогноз математичного сподівання $M(Y_{пр})$ буде в межах:

$$Y_{пр} - t_б \sigma_n \le M(Y_{пр}) \le Y_{пр} + t_б \sigma_n \qquad (13.22)$$

$$873{,}616 - 2{,}4469 \cdot 26{,}71543 \le M(Y_{пр}) \le 873{,}616 + 2{,}4469 \cdot 26{,}71543$$

$$808{,}2458 \le M(Y_{пр}) \le 938{,}9864$$

Визначення інтервального прогнозу індивідуального значення $Y_{пр}$ базується на знаходженні середньоквадратичної помилки прогнозу:

$$\sigma^2_{n_{(i)}} = \sigma^2_u + \sigma^2_n = \sigma^2_u + \sigma^2_u X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр} = \sigma_u\sqrt{1 + X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр}} \quad (13.23)$$

Обчислимо дисперсію та стандартну помилку прогнозу індивідуального значення $Y_{пр}$:

$$\sigma^2_{n_{(i)}} = \sigma^2_u + \sigma^2_n = 2394{,}6 + 713{,}714 = 3108{,}3$$

$$\sqrt{\sigma^2_{n_{(i)}}} = \sqrt{3108{,}3} = 55{,}7521$$

Тоді інтервальний прогноз індивідуального значення буде відповідати такому довірчому інтервалу:

$$Y_{пр} - t_\alpha\sigma_{n_{(i)}} \le Y_{пр} \le Y_{пр} + t_\alpha\sigma_{n_{(i)}} \quad (13.24)$$

$$873{,}616 - 2{,}4469 \cdot 55{,}7521 \le Y_{пр} \le 873{,}616 + 2{,}4469 \cdot 55{,}7521$$

$$737{,}1956 \le Y_{пр} \le 1010{,}0366$$

Висновки.

Згідно з обчисленими характеристиками можна сказати, що об'єм реалізації продукції підприємства на 88,3% залежить від витрат на впровадження інновацій в попередньому періоді, а на 11,7% від неврахованих в задачі чинників. Зв'язок між залежною змінною Y та незалежною X (об'ємом реалізації продукції та витратами на впровадження інновацій в попередньому періоді) досить високий (коефіцієнт кореляції дорівнює 0,94).

Перевірено значимість зв'язку між змінними моделі $F_{розр} > F^{0,05}_{табл}$ (8,58>3,87) для рівня надійності α=0,05. З 5%-ним ризиком помилитися припускаємо присутність лінійного зв'язку.

Стандартні помилки параметрів S_{β_j} не перевищують абсолютні значення цих параметрів:

$$S_{\beta_0^*} = 64{,}2 < 319{,}44$$

$$S_{\beta_0^*} = 3{,}03 < 20{,}45$$

Це означає, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істотних значень.

Середньоквадратичне відхилення (похибка)

$$S_{yx} = \pm\sqrt{\frac{\sum(Y_{факт} - Y_{розр})^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{14367{,}5}{8-1}} = \pm 45{,}3$$

свідчить про те, що фактичні значення Y відхиляються від розрахункових його значень на ±45,3 тис. грн.

Відносна похибка $\sigma = \frac{S_{yx}}{Y_{сер}} \cdot 100 = \frac{45,3}{736,35} \cdot 100 = 6,2\%$ – це характеризує модель з хорошої сторони.

Проведена перевірка значущості коефіцієнта детермінації за F-критерієм Фішера. $F^{0.05}_{табл} < F_{експ}$ (3,87 < 15,45). Коефіцієнт детермінації значущій.

Перевірена значимість коефіцієнта кореляції за t-критерієм Ст'юдента. $t_{табл} < |t_{експ}|$ (2,45 < 6,74). Коефіцієнт кореляції достовірний (значущий) і зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Дана оцінка значимості кожного параметра моделі за допомогою t-критерію Ст'юдента: $|t_{експ}| > t_{табл}$ – параметри моделі є значущими.

Отже, модель є достовірною та відображає тісний кількісний взаємозв'язок між залежним та незалежним показниками і може бути використана для практичного економічного висновку.

На даному підприємстві збільшення об'єму реалізації продукції обумовлюється збільшенням витрати на впровадження інновацій у попередньому періоді. Так, на кожні 10 тис. грн. збільшення витрат на впровадження інновацій, можливе підвищення об'єму реалізації продукції підприємства на 204,57 тис. грн., за умови незмінної дії інших чинників.

Були обчислені прогнозні значення $Y_{пр}$ для $X_{пр} = |1;\ 27,1|$:

$$Y_{пр} = 319,44 + 20,45 \cdot 27,1 = 873,616 \text{ тис. грн.}$$

Так, при ймовірності P=0,95 (α=0,05), прогноз математичного сподівання $M(Y_{пр})$ потрапляє в інтервал [808,2458; 938,9864], а прогноз індивідуального значення $Y_{пр}$ – в інтервал [737,1956; 1010,03].

В економічній інтерпретації це означає, що при прогнозних значеннях збільшення витрат на впровадження інновацій 27,1 тис. грн. об'єм реалізації продукції підприємства потрапляє в інтервал:

$$808,2458 \leq M(Y_{пр}) \leq 938,9864$$

Водночас окремі *(інтервальні)* значення об'єму реалізації продукції підприємства містяться в інтервалі:

$$737,1956 \leq Y_{пр} \leq 1010,0366$$

Контрольні запитання

1. У чому суть методу найменших квадратів?
2. Які основні причини наявності в регресійній моделі випадкового відхилення?
3. Як розрахувати невідомі параметри лінійної моделі?
4. Пояснити сутність поняття "тіснота зв'язку".
5. Пояснити сутність поняття "значимість зв'язку".
6. За допомогою яких характеристик перевіряються тіснота зв'язку між змінними моделі?
7. За допомогою якої характеристики перевіряються значимість зв'язку між змінними моделі?
8. Що показує коефіцієнт детермінації і в яких межах він приймає значення?
9. Що показує коефіцієнт кореляції?
10. Запишіть формулу дисперсії залишків.
11. З якою ціллю розраховуються стандартні похибки оцінок параметрів?
12. За якими характеристиками вибирається табличне значення критерію Фішера?
13. Як визначити коефіцієнт детермінації у парній регресійній моделі?
14. Як визначити коефіцієнт кореляції у парній регресійній моделі?
15. У чому відмінність між точковим і інтервальним прогнозом?

Література [3, с. 233-263; 5, с. 415-463; 8, с. 25-38; 9, с. 43-46,96-106, 111-130; 10, с. 44-60,63-65,102; 11, с. 23-29, 113-120, 127-140; 12, с. 41-58].

Тема 7. ОДНОВИМІРНІ ЧАСОВІ РЯДИ ТА ЇХ МОДЕЛЮВАННЯ

Елементи часового ряду.

У дослідженні економічних показників важливе місце належить часовим або динамічним рядам, що представляють собою сукупність числових даних, які характеризують зміну деякого показника в часі.

Розрізняють інтервальні і моментні ряди.

Прикладом **інтервального** ряду може служити сукупність показників, що характеризують випуск однорідної продукції за кілька років.

Типовим **моментним** рядом є безліч числових значень, що відбивають вартість залишків готових виробів на складі підприємства за станом на кінець кожного дня.

Кожен член (рівень) часового ряду (Y_t) можна в найпростішому випадку представити як суму двох складових:

$$Y_t = \bar{Y}_t + \gamma,$$

де Y_t – значення ознаки, що випливає із закономірної зміни показника в часі;

γ – випадковий компонент.

Виокремлюють три основні систематичні компоненти часового ряду:

- тренд;
- сезонність;
- циклічність.

Тренд (тенденція) часового ряду (T_t) – це систематична лінійна чи нелінійна компонента, яка плавно змінюється з часом. Вона описує чистий вплив довготривалих факторів (наприклад, зростання чисельності населення, змінювання промислового виробництва тощо).

Сезонна компонента (S_t) – це періодичні коливання рівнів часового ряду протягом не дуже тривалого періоду (тижня, місяця, максимум – року). Сезонність відбиває повторюваність економічних процесів у межах одного року (наприклад, обсяг продажу певної групи товарів у різні пори року).

Циклічність (C_t) – це періодичні коливання, що виходять за межі одного року. Проміжок часу між двома сусідніми "вершинами" (найбільшими значеннями) чи "западинами" (найменшими значеннями) є довжиною циклу. Циклічність відбиває повторюваність економічних процесів протягом тривалих періодів (наприклад, фазовий процес розвитку економіки).

Рівні часового ряду можуть одночасно містити всі систематичні компоненти або лише деякі з них.

Випадкова складова γ відбиває різкі й несподівані впливи, що найсильніше позначаються на основній тенденції ряду, а також вплив поточних чинників, пов'язаних, наприклад, з похибками вимірювань.

Для визначення основної тенденції (тренда) в рівнях часового ряду зазвичай застосовують методи механічного або аналітичного вирівнювання.

Однак перш ніж будувати трендове рівняння, необхідно перевірити гіпотезу про існування тенденції часового ряду.

Найчастіше для перевірки такої гіпотези застосовують:

1) порівняння середніх рівнів фрагментів ряду;
2) критерій "зростаючих і спадних" серій;
3) метод Фостера-Стюарта тощо.

Перевірка гіпотези про існування тенденції

Під *тенденцією* розуміють деякий загальний напрям розвитку, довготривалу еволюцію. Тенденцію ряду динаміки зображають у вигляді гладкої кривої (траєкторії) як функцію часу і називають трендом. *Тренд* характеризує основну закономірність розвитку економічного явища в часі, вільну в основному (але не цілковито) від випадкових впливів.

Здебільшого отриману траєкторію пов'язують виключно з часом. Припускають, що, розглядаючи будь-яке явище як функцію часу, можна виявити спільний вплив усіх основних чинників, не визначаючи впливу кожного з них в явному вигляді. У зв'язку з цим під трендом зазвичай розуміють регресію на час.

На практиці зручніше користуватися загальним поняттям, згідно з яким тренд – це детермінована складова динаміки розвитку, зумовлена впливом постійно діючих факторів. При цьому окремі рівні часового ряду не збігаються із загальною тенденцією, а мають певні випадкові відхилення від неї, які характеризують випадкові впливи. Отже, рівняння, що описує процес у часі, має випадкову складову – відхилення від тренда. Тому рівні часового ряду описують рівнянням

$$y_t = f(t) + u$$

де *f(t)* – систематична складова, яка характеризує основну тенденцію явища в часі;

u – випадкова складова.

У часових рядах можна спостерігати тенденції трьох видів: середнього рівня; дисперсії; автокореляції.

Тенденцію середнього рівня наочно можна представити графіком часового ряду. Він має вигляд функції *f(t)*, навколо якої варіюють фактичні значення явища, що вивчається.

Тенденція дисперсії – це зміни відхилень емпіричних значень часового ряду від значень, обчислених за рівнянням тренда.

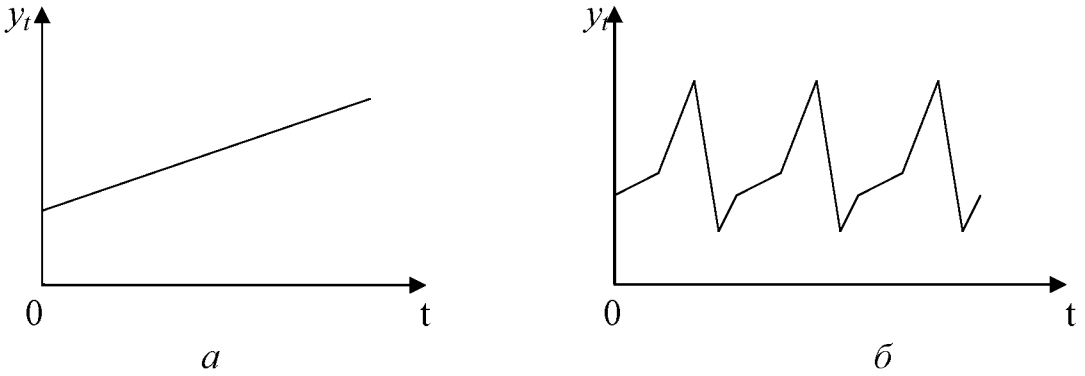
Тенденція автокореляції – це тенденція зміни зв'язку між окремими рівнями часового ряду.

Для опису і детального вивчення часових рядів застосовують різні математичні моделі, які дають змогу виявити їх основні компоненти.

При різних поєднаннях систематичних складових ряду залежність його рівнів

від часу може набувати різних форм.

На рис. 7.1 показано компоненти гіпотетичного часового ряду, що ілюструє зростаючу тенденцію (*а*) і гіпотетичний часовий ряд, що містить лише сезонну компоненту (*б*).



а *б*

Рис. 7.1.

Деякі часові ряди не містять тенденції й циклічної компоненти, а кожен наступний їх рівень утворюється як сума середнього рівня ряду та деякої (додатної чи від'ємної) випадкової компоненти. Приклад ряду, що містить лише випадкову компоненту, наведено на рис. 7.2.

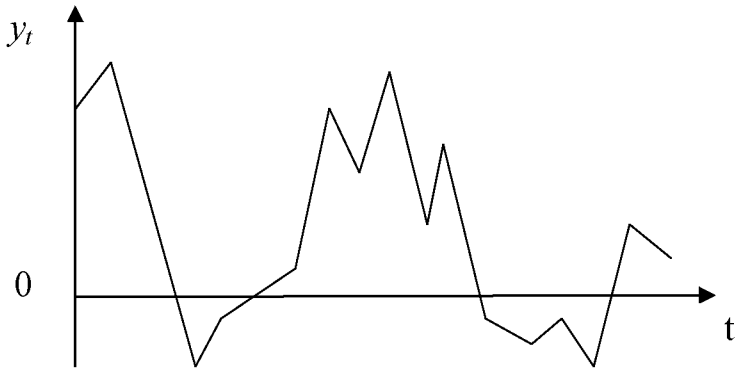


Рис. 7.2.

Для аналізу часових рядів існує декілька методів:

– методи кореляційного аналізу, які дають можливість виявити найбільш суттєві періодичні залежності та їх лаги (затримки) в одному процесі (автокореляція) або між декількома процесами (кроскореляція);

– методи спектрального аналізу дозволяють знаходити періодичні та квазіперіодичні залежності в даних;

– методи згладжування та фільтрації призначені для перетворення часових рядів з метою усунення з них високоякісних або сезонних коливань;

– методи авторегресії та ковзного середнього є особливо корисними для опису та прогнозування процесів, які виявляють однорідні коливання навколо середнього значення.

Перевірка наявності тенденції середнього рівня

Один із способів перевірки наявності тенденції заснований на порівнянні середніх рівнів ряду: часовий ряд розбивають на дві приблизно рівні частини, кожну з яких розглядають як деяку самостійну вибіркову сукупність, що має нормальний розподіл. Якщо часовий ряд має тенденцію до змінювання, то середні значення, обчислені для кожної сукупності, мають істотно (значно) різнитися між собою. Якщо розбіжність буде незначною (неістотною, випадковою), це означатиме, що часовий ряд не має тенденції.

Отже, перевірка наявності тренда в досліджуваному ряді зводиться до перевірки гіпотези про рівність середніх двох нормально розподілених сукупностей.

Обчислення за цим методом складається з наступних етапів:

1) вхідний часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ розбивають на дві приблизно рівні частини обсягом $n_1 \approx n_2$, де $(n_1 + n_2 = n)$;

2) для кожної з частин обчислюють середні значення та дисперсії:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}; \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} y_t}{n_2}; \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} (y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1};$$

3) висувають основну гіпотезу про рівність середніх значень: H_0: $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ проти альтернативної H_A: $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$ і допоміжну гіпотезу про рівність дисперсій $H_0^{доп}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ проти альтернативної $H_{1A}^{доп}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$;

4) перевіряють допоміжну гіпотезу за допомогою F-критерію Фішера. Для цього порівнюють розрахункове (експериментальне) значення критерію:

$$F_{експ} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, & якщо\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2, \\ \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}, & якщо\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2, \end{cases}$$

з табличним (критичним) значенням розподілу Фішера $F_{табл} = F(a, k_1, k_2)$, де a – заданий рівень значущості, $k_i = n_i - 1$ – степені вільності, $i = 1,2$.

Якщо за критерієм Фішера дисперсії виявляться нерівними $(F_{експ} > F_{табл})$, то основну гіпотезу не перевіряють. Інакше переходять до наступного пункту;

5) основну гіпотезу про відсутність тренда перевіряють за допомогою t-критерію Стьюдента. Для цього обчислюють вибіркову статистику –

розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою

$$t_{експ} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

де σ – середньоквадратичне відхилення різниці середніх;

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Якщо розрахункове значення $t_{експ}$ менше від табличного значення розподілу Стьюдента ($t_{експ} < t_{табл}$), де $t_{табл} = t(a, (n–2))$, то основна гіпотеза H_0 приймається, тобто середні значення рівні, отже, ряд не має тренда.

Якщо H_0 відхиляється, то ряд має тенденцію до змінювання (тренд є).

Метод ковзної середньої

Метод ковзної середньої є найбільш простим способом згладжування емпіричних кривих. Суть цього методу складається в заміні фактичних значень показника їхніми усередненими величинами, що мають значно меншу варіацію, чим вихідні рівні ряду.

Залежно від періоду усереднення розрізняють ковзні середні, розраховані для непарного й парного числа інтервалів часу. Розглянемо порядок побудови ковзної середньої з непарним числом членів.

Є динамічний ряд, що складається з рівнів $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Для визначення ковзної середньої послідовно розраховують суми m елементів ряду (де m – непарне число), поступово переходячи від перших членів $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ до наступних груп рівнів: $y_2, y_3, \ldots y_{m+1}$; $y_3, y_4, \ldots y_{m+2}$; $y_4, y_5, \ldots y_{m+3}$; і т.д.

По окремих сумах визначають середні арифметичні, кожна з яких міняє свою величину («ковзає») у міру збільшення параметра t. Із середніх арифметичних формується новий динамічний ряд, елементи якого в значній мірі вільні від випадкових зовнішніх впливів на прогнозований показник. Вважається, що ковзні середні більш точно характеризують тенденцію зміни ознаки, чим рівні вихідного тимчасового ряду. Найбільше часто на практиці застосовуються трьох- і п’ятичленні середні.

Їхній розрахунок ведеться по формулах

$$y_t' = (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/3, \qquad t=2,3\ldots,(n–1);$$

$$14y_t' = (y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})/5, \quad t=3,4\ldots,(n–2),$$

де y_t' – ковзна середня.

Більш складна обчислювальна схема використовується в тих випадках, коли ковзна середня визначається по парному числу елементів. При парному

періоді згладжування проста середня арифметична має один істотний недолік – вона не може бути приписана жодному реальному значенню *t*, оскільки доводиться на проміжок часу між двома роками. Наприклад, при t = 4 середня арифметична буде ставитися до проміжку між другим і третім роком; при m=6 – до проміжку між третім і четвертим роком і т.д.

При виконанні реальних розрахунків ковзну середню з парним періодом вирівнювання визначають у два етапи. Спочатку знаходять середні для проміжків часу (*t–1* й *t*, *t* й *t+1*), а потім отримані величини підсумують і знову використають для розрахунку середньої.

З ковзних середніх з парним числом елементів найчастіше використається згладжування по чотирьох рівнях динамічного ряду. Обчислення чотиричленної ковзної середньої здійснюється по формулі

$$y_t' = \frac{1}{2}[(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1})/4 + (y_{t-1} + + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})/4],$$

$$t=3,4\ldots,(n-2),$$

Застосування ковзних середніх дозволяє «вирівняти» контури вхідної кривої, що створює умови для більш точного відтворення динаміки зміни показника.

Приклад 1. Перевірка наявності тенденції

Дослідити часовий ряд на наявність тренду (тенденції). Умовні дані про витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді, тис грн. (Y).

Вхідні дані та обчислення оформимо у таблиці (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

t (рік)	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Витрати на впровадження інновацій в попередньому періоді, тис грн.	Y	3,52	9,7	8,9	9,8	10,1	13,9	19,9	14,3	11,5	19,5	14,2
$y_t - \bar{y}_{середнє}$		-9,52	-3,34	-4,14	-3,24	-2,94	0,86	6,86	1,26	-1,54	6,46	1,16
$(y_t - \bar{y}_{середнє})^2$		90,63	11,16	17,14	10,50	8,64	0,74	47,06	1,59	2,37	90,63	11,16

Продовження таблиці 7.1

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
14	20,2	22,7	28,2	25,2	25	24,3	21,5	27,1	36,3	34,1	34,1	35,2	44,5
0,96	7,16	-7,15	-1,65	-4,65	-4,85	-5,55	-8,35	-2,75	6,45	4,25	4,25	5,35	14,65

$\bar{y}_1 =$ **13,04** $\bar{y}_2 =$ **29,85**

41,73	1,35	0,92	51,27	51,12	2,72	21,62	23,52	30,80	69,72	7,56	41,60	18,06	18,06

$\sum_1^{13} (y_t - \bar{y}_1)^2 = 285{,}09$ $\sum_{14}^{25} (y_t - \bar{y}_2)^2 = 528{,}05$

Обчислення:

Крок 1. Вхідний часовий ряд $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ розбиваємо на дві приблизно рівні частини обсягом $n_1 \approx n_2$: $n_1 = 13$, $n_2 = 12$, $(n_1 + n_2 = n)$;

Крок 2. Для кожної з частин обчислюють середні значення та дисперсії:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1} = 13{,}04;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} y_t}{n_2} = 29{,}85;$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} (y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1} = \frac{285{,}09}{13-1} = 23{,}76;$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_2} (y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1} = \frac{528{,}05}{12-1} = 48{,}0.$$

Крок 3. Висуваємо основну гіпотезу про рівність середніх значень:

$$H_0: \quad \bar{y}_1 = \bar{y}_2$$

проти альтернативної $$H_A: \quad \bar{y}_1 \neq \bar{y}_2.$$

Нульову гіпотезу відхиляємо: $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$.

Та допоміжну гіпотезу про рівність дисперсій

$$H_0^{доп}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

проти альтернативної $$H_A^{доп}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Допоміжну нульову гіпотезу про рівність дисперсій відхиляємо: $\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$.

Крок 4. Перевіряємо допоміжну гіпотезу за допомогою F-критерію Фішера. Для цього порівняємо розрахункове (експериментальне) значення критерію з табличним (критичним) значенням розподілу Фішера :

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2, \quad \text{тому } F_{експ} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 2{,}02$$

$$F_{табл} = F(a, k_1, k_2) = 2{,}79,$$

при $a=0{,}05$ – заданий рівень значущості, $k_1 = n_1 - 1 = 13 - 1 = 12$, $k_2 = n_2 - 1 = 12 - 1 = 11$.

За критерієм Фішера $F_{експ} < F_{табл}$. Переходимо до наступного пункту.

Крок 5. Основну гіпотезу про відсутність тренда перевіряють за допомогою t-критерію Стьюдента. Обчислимо вибіркову статистику – розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою

$$t_{експ} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{|-16{,}81|}{5{,}95\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{12}}} = 7{,}06$$

де σ – середньоквадратичне відхилення різниці середніх;

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(13-1)23{,}76 + (12-1)48{,}0}{13+12-2}} = 5{,}95$$

$$t_{табл} = 2{,}18,$$

де $t_{табл} = t(a, (n-2))$.

Розрахункове значення $t_{експ} > t_{табл}$. Основна гіпотеза H_0 відхиляється. Отже, ряд має тренд.

Висновок. Нульова гіпотеза (H_0) відхиляється, ряд має тенденцію до змінювання (тренд є).

Приклад 2. Згладжування емпіричних кривих

Провести вирівнювання за методом трьох- чотирьох- та п'ятичленної ковзної середньої.

Нижче представлена інформація про розміри балансового прибутку (у млн. грн.), отриманою групою заводів первинного виноробства за період з 1996 по 2008 р. Нанести вихідні дані на графік.

Всі обчислення оформимо у вигляді таблиці (табл. 7.3).

Таблиця 7.3.

Рік (t)	Розмір балансового прибутку y_t, млн. грн.	Тричленні суми	Тричленні ковзні середні y_t'	Чотиричленні суми	Проміжні середні	Чотирьох-членні ковзні середні	П'ятичленні суми	П'ятичленні ковзні середні y_t'
1996	235							
1997	340	823	274,3					
1998	248	988	329,3	1223	305,75			314,4
1999	400	997	332,3	1337	334,25	320,0	1740	348
2000	349	1152	384,0	1400	350,00	342,1	1781	356,2
2001	403	1133	377,7	1533	383,25	366,6	1995	399
2002	381	1246	415,3	1595	398,75	391,0	2012	402,4
2003	462	1260	420,0	1663	415,75	407,3	2088	417,6
2004	417	1304	434,7	1685	421,25	418,5	2118	423,6
2005	425	1275	425,0	1737	434,25	427,8	2178	435,6
2006	433	1299	433,0	1716	429,00	431,6	2139	427,8
2007	441	1297	432,3	1722	430,50	429,8		
2008	423							

Нанесемо вихідні дані на графік (рис. 7.3). Як видно з малюнка, розмір балансового прибутку коливається в значному діапазоні. Зробимо статистичне

вирівнювання вихідного ряду.

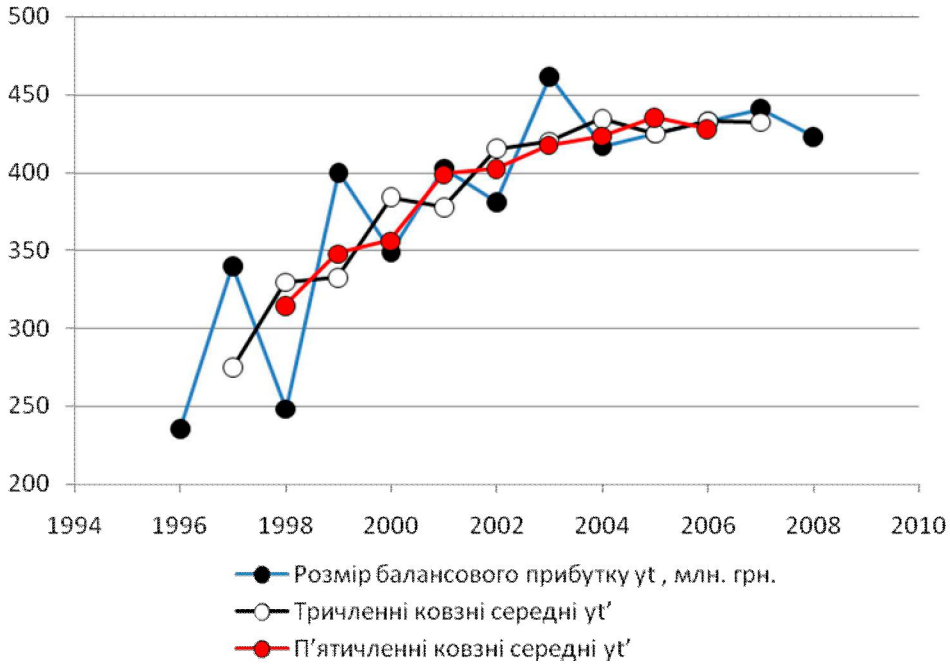


Рис. 7.3. Вхідна крива й ковзні середні

Аналіз підсумків обчислень дозволяє сформулювати наступні висновки:

• чим більший період усереднення, тим більш плавний характер здобуває лінія ковзної середньої;

• у міру збільшення інтервалу згладжування кількість елементів у ряді ковзних середніх скорочується (на два рівні при тричленному згладжуванні, на чотири рівні при чотирьох- і п'ятичленному вирівнюванні);

• значення ковзних середніх, розраховані по різних методиках, як правило, не збігаються.

Лабораторна робота № 14
«Перевірка наявності тенденції середнього рівня. Згладжування емпіричних кривих (метод ковзної середньої)»

Згідно варіанту з табл. 14.1 записати постановку задачі.

Дослідити часовий ряд на наявність тренду (тенденції).

Провести вирівнювання за методом трьох- чотирьох- та п'ятичленної ковзної середньої.

Нанести вихідні дані на графік.

Всі варіанти мають часовий ряд (t). Для постановки задачі використати величину часового ряду згідно варіанту та верхню строчку таблиці 14.1.

Таблиця 14.1.

t (час)	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Обєм реалізації. тис. грн.	*Прибуток фірми, тис. грн.*	*Витрати на рекла-му, грн.*	*Попит на продукцію ,т*	*Витрати на податки, тис. грн.*	*Попит на олію, тис. л*	*Попит на молоко , тис. л*	*Середній дохід на душу населення, тис. грн.*	*Собівартість 1 т продукції, тис. грн.*	*Чисельність працюючих, чол.*
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
1	1251	23,52	1251	500,0	1109,1	29,244	16,9	3,9	5,6	24
2	1053,1	34,1	1053,1	979,5	979,5	29,54	14,1	3,8	5	26
3	1023,2	36,3	1023,2	896,8	896,8	25,58	14,8	4	5,6	25
4	862,3	27,1	862,3	650,0	824,0	21,16	15,8	4,8	6,4	28
5	804,9	25,2	804,9	723,1	723,1	18,04	15,8	4	6,8	27
6	804,9	25	804,9	652,2	652,2	25	15,5	4,5	6,8	29
7	559,5	14,3	559,5	578,3	856,0	17,16	12,5	4,2	6,8	28
8	592,3	14,2	592,3	669,2	669,2	23,2	18,1	4,5	7,4	29
9	583,1	11,5	583,1	755,6	755,6	27,18	19,1	4,6	6,6	27
10	832,1	24,3	832,1	1026,3	1026,3	30,52	18,8	5	6,2	27
11	851,7	21,5	851,7	605,0	811,0	16	16,4	4,8	7	26
12	1395,1	44,5	1395,1	800,0	1094,5	29,94	18,1	5	6,8	27
13	1086,3	34,1	1086,3	894,5	894,5	23,84	19,9	5,1	6,6	26
14	802,1	28,2	802,1	780,8	780,8	20,92	17,3	5,4	8	27
15	795,1	22,7	795,1	738,9	1000,0	19,26	19,5	5,4	8,4	28
16	745,3	20,2	745,3	671,0	671,0	32			7,8	33
17	676,3	14	676,3	559,7	559,7	15,48				35
18	591,5	19,5	591,5	451,3	650,0	14,64				32
19	411,4	19,9	411,4	354,6	354,6	12,68				34
20	351,1	13,9	351,1	285,8	285,8	12,48				33
21	301,3	10,1	301,3	219,4	219,4					35
22	205,1	9,8	205,1	172,9	600,0					33
23	151,9	9,7	151,9	319,4	319,4					34
24	161,7	18,9	161,7							32
25	644,5	35,2	644,5							32
26										29
27										31
28										29
29										30
30										30

Контрольні запитання

1. Що розуміється під часовим рядом?
2. Дайте визначення «тренд». Які основні види трендів?
3. Як визначають параметри ковзних середніх?
4. Етапи перевірки наявності тренда.
5. Назвіть основні аналітичні функції, які застосовують для опису динамічних рядів.
6. Суть методу ковзної середньої.
7. Застосування ковзних середніх.
8. Як впливає період усереднення на лінію ковзної середньої?
9. Охарактеризуйте процедуру прогнозування тренду.
10. Опишіть процедуру кореляційного аналізу часових рядів.
11. В чому суть методу згладжування?
12. Призначення методів згладжування та фільтрації, їх основні характеристики.

Література: [5, с. 538-598; 10, с. 138-154; 11, с. 399-440].

Тема 8. МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ

Множинна регресія являє собою узагальнення простої регресійної моделі для випадку, коли змінна Y залежить не від одного, а від кількох факторів (від n факторів).

Специфікація моделі множинної регресії:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_n X_n \qquad (8.1)$$

У якості незалежних змінних можуть застосовуватись різні техніко-економічні показники роботи підприємства.

У рівнянні (8.1) Y – залежна змінна, якою може бути будь-який з результуючих показників діяльності підприємства.

До вигляду (8.1) без особливих зусиль можна звести більшість рівнянь, що практично застосовуються в якості виробничих функцій.

У загальному матричному вигляді економетрична модель для фактичних даних записується так:

$$Y=AX+u, \qquad (8.2)$$

де A – матриця параметрів моделі розміром m×n (m – кількість незалежних змінних, n – число спостережень);

Y – матриця значень залежної змінної;

X – матриця незалежних змінних;

u – матриця випадкової складової.

Випадкові складові u називають ще помилками або залишками. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

Теоретичні (розрахункові) значення залежних змінних Y для моделі (8.2)

будуть представлені у вигляді:

$$Y = AX \tag{8.3}$$

де A – оцінка параметрів теоретичної моделі.

Сукупність виразів (8.2) і (8.3) для фактичних і теоретичних значень залежних змінних визначає економетричну модель загального виду:

$$(X'X)A = X'Y \tag{8.4}$$

Це система нормальних рівнянь.

Розв'язок системи нормальних рівнянь в матричному записі буде мати вигляд:

$$A = (X'X)^{-1} X'Y \tag{8.5}$$

де A – вектор параметрів лінійної моделі,

X′ – матриця транспонована до матриці X.

Лабораторна робота № 15
«Множинна лінійна кореляційна модель»

Задача.

Маємо вибірку даних за 15 років, які характеризують обсяг виробленої продукції (Y), тис. т в залежності від вартості основних засобів (X_1), тис. грн. та чисельності працюючих (X_2), чол.

Побудувати лінійну регресійну модель виду $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$.

Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів; зробити економічний висновок.

Розрахунки виконуються на ПК.

Номер варіанту завдання з табл. 15.2 визначається за варіантом з табл.15.1. Перша цифра – номер стовпця для показника Y, друга – номер стовпця для показника X_1 , а третя – номер стовпця для показника X_2.

Таблиця 15.1

Варіант	Номери варіантів за завданням
1	1; 5; 9
2	2; 8; 9
3	3; 8; 11
4	4; 5; 9
5	1; 6; 9
6	2; 5; 10
7	3; 8; 9
8	4; 7; 12
9	1; 6; 10
10	1; 8; 11

Варіант	Номери варіантів за завданням
11	1; 7; 9
12	2; 5; 9
13	3; 8; 12
14	4; 6; 10
15	1; 7; 10
16	2; 6; 10
17	3; 7; 11
18	4; 6; 9
19	1; 5; 11
20	2; 7; 9

Варіант	Номери варіантів за завданням
21	1; 5; 10
22	2; 8; 12
23	3; 5; 9
24	4; 7; 11
25	1; 8; 12
26	2; 7; 11
27	3; 5; 10
28	4; 8; 9
29	1; 5; 12
30	3; 6; 10

Таблиця 15.2

Кіль-кість спосте-режень	Варіанти											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Y	Y	Y	Y	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_2	x_2
1	**38,9**	31,1	31,7	23,8	**5,2**	4,8	5,4	4,7	**15**	15	23	15
2	**39,8**	32,2	31,8	25	**5,3**	5,6	6,0	5,7	**16**	15	24	20
3	**40,2**	32,3	31,9	25	**4,8**	5,9	6,3	5,7	**17**	17	24	24
4	**41,4**	32,4	32,1	25,2	**5,6**	4,9	5,5	5,2	**18**	17	26	22
5	**41,7**	32,5	32,5	25,3	**5,6**	5,1	5,6	5,0	**18**	18	26	27
6	**43,4**	32,7	32,7	25,6	**5,6**	4,9	5,5	5,2	**19**	18	27	31
7	**44,3**	32,8	33,0	25,6	**4,9**	5,8	6,3	5,2	**20**	19	28	29
8	**46,7**	33,4	41,7	25,9	**6**	6,5	6,9	5,3	**20**	19	28	33
9	**47,3**	33,6	41,9	26,1	**6,1**	6,5	7,0	5,7	**20**	19	29	29
10	**49**	33,6	42,0	26,1	**6**	5,9	6,7	5,9	**21**	20	30	26
11	**49,3**	33,9	42,1	26,3	**6,1**	6,3	7,0	6,0	**21**	20	30	26
12	**51,2**	34,4	52,5	26,8	**6,5**	6,0	6,8	6,6	**21**	20	30	27
13	**51,3**	34,9	53,6	26,8	**6,6**	6,4	7,1	7,6	**21**	21	30	28
14	**51,6**	35,1	54,6	27,3	**6,9**	6,7	7,4	7,2	**22**	21	32	38
15	**51,7**	36,2	55,6	27,8	**6,4**	6,8	7,5	7,3	**23**	22	32	40

Приклад дослідження багатофакторної моделі

У моделях множинної регресії розглядають множину даних по кожному зі змінних як вектор-стовпчик, а вільному членові відповідає вектор, що складається лише з одиниць.

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X_1 = \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \\ \vdots \\ X_{n2} \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \\ \vdots \\ X_{n3} \end{pmatrix}; \quad X_k = \begin{pmatrix} X_{1k} \\ X_{2k} \\ X_{3k} \\ \dots \\ X_{nk} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$$ – вектор-стовпець залежної змінної.

β^* – вектор параметрів.

Векторну оцінку параметрів теоретичної моделі (β*) знаходять за методом найменших квадратів. Для цього треба виконати обчислення за формулою (15.1), яка в нашому випадку буде мати вигляд:

$$\beta^*=(X'X)^{-1} \cdot X'Y \qquad (15.1)$$

Порядок виконання завдання

1. Знайти векторну оцінку β* за методом найменших квадратів, для цього треба виконати обчислення за формулою (15.1):

$$\beta^*=(X'X)^{-1} \cdot X'Y$$

2. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Для аналізу необхідно розрахувати:

- коефіцієнт детермінації;
- скоригований коефіцієнт детермінації;
- множинний коефіцієнт кореляції R;
- парні коефіцієнти кореляції;
- частинні коефіцієнти кореляції;
- стандартні похибки оцінок параметрів моделі (порівняти з величиною оцінок);
- перевірити значущість кожної зі змінних за t-критерієм Ст'юдента;
- знайти інтервали надійності для оцінок параметрів моделі.

3. Відобразити модель на графіку.

4. Зробити економічний висновок.

Спостереження	Обсяг виробленої продукції, тис. т	Вартість основних засобів, тис. грн.	Чисельність працюючих, чол.
	Y	**X_1**	**X_2**
1	33	4,2	13
2	36	5,3	18
3	37	6,5	24
4	38,2	5,8	22
5	38,5	6,9	22
6	40,2	5,9	24
7	41,1	7,2	25
8	48,5	14,2	28
Середнє значення	**39,06**	**7,00**	**22**

Ми занесли дані у відповідні стовпчики таблиці. Останні клітинки стовпчиків містять середні значення Y, X_1 та X_2.

Рішення.

1. Складемо матрицю X. Перший її стовпчик містить лише одиниці (він відповідає незалежній змінній X_0 – вільному членові); інші стовпчики є відповідно векторами X_1, X_2.

Матриця X

$$\mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & 4,2 & 13 \\ 1 & 5,3 & 18 \\ 1 & 6,5 & 24 \\ 1 & 5,8 & 22 \\ 1 & 6,9 & 22 \\ 1 & 5,9 & 24 \\ 1 & 7,2 & 25 \\ 1 & 14,2 & 28 \end{vmatrix}$$

Матриця Y

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} 33 \\ 36 \\ 37 \\ 38,2 \\ 38,5 \\ 40,2 \\ 41,1 \\ 48,5 \end{vmatrix}$$

2. Далі виконуємо операції над матрицями відповідно формули (15.1).

=ТРАНСП(C29:E36)

$$\mathbf{X}' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4,2 & 5,3 & 6,5 & 5,8 & 6,9 & 5,9 & 7,2 & 14,2 \\ 13 & 18 & 24 & 22 & 22 & 24 & 25 & 28 \end{vmatrix}$$

Транспонування матриці просто реалізувати за допомогою “майстра функцій f” (операція ТРАНСП(.) у категорії “Ссылки и массивы“). Звернення до математичних та статистичних функцій Excel.

=МУМНОЖ(B41:I43;C29:E36)

$$\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 8,0 & 56,00 & 176 \\ 56,00 & 457,52 & 1304,60 \\ 176 & 1304,60 & 4022,00 \end{vmatrix}$$

Функція Microsoft Excel МУМНОЖ(. , .) – знаходить добуток матриць. Для цього треба:

1) відмітити поле, де буде знаходитись результат добутку матриць;
2) ввійти у "майстер функцій f". У категоріях вибираємо "математичні", а в функціях – МУМНОЖ. Вводимо адреси матриць, добуток яких знаходимо;
3) для того, щоб отримати на екрані значення добутку матриць, натискаємо спершу клавішу **F2**, а потім Ctrl+Shift+Enter.

=МОБР(D46:F48)

Матриця похибок

$$(\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X})^{-1} = \begin{vmatrix} 3{,}78969 & 0{,}1200727 & -0{,}20478 \\ 0{,}12007 & 0{,}0329147 & -0{,}01593 \\ -0{,}20478 & -0{,}0159307 & 0{,}01438 \end{vmatrix}$$

Функція Microsoft Excel МОБР(.) – знаходить матрицю, обернену до квадратної матриці. Процедура знаходження оберненої матриці аналогічна процедурі МУМНОЖ.

=МУМНОЖ(B41:I43;H29:H36)

$$\mathbf{X}' \cdot \mathbf{Y} = \begin{vmatrix} 312{,}5 \\ 2278{,}91 \\ 7002{,}7 \end{vmatrix}$$

=МУМНОЖ(D51:F53;D56: D58)

$$\beta^* = \begin{vmatrix} 23{,}89 \\ 0{,}97 \\ 0{,}38 \end{vmatrix}$$

Отже, наша регресійна модель має вигляд:

$$Y_{розр} = 23{,}89 \quad +0{,}97X_1 \quad +0{,}38X_2$$

3. Далі знаходяться відповідні значення $Y_{розр}$ за формулою $Y = X \cdot \beta^*$ і заносяться до стовпчику "1" .

=МУМНОЖ(C29:E36;D61:D63)

$Y_{розр}$	$Y_{факт} - Y_{розр}$	$Y_{факт} - Y_{сер}$	$Y_{розр} - Y_{сер}$	
1	**2**	**3**	**4**	
32,92	0,08	–6,06	–6,146	
35,89	0,11	–3,06	–3,175	
39,33	–2,33	–2,06	0,272	
37,89	0,31	–0,86	–1,169	
38,97	–0,47	–0,56	–0,097	
38,75	1,45	1,14	–0,312	
40,40	0,70	2,04	1,334	
48,36	0,14	9,44	9,294	
	8,399	**145,96**	**138**	**=СУММКВ(.)**

4. Стовпчик "2" містить залишки регресії, обчислені за формулою $Y_{факт} - Y_{розр}$.

5. Стовпчик "3" складається з елементів, що знаходяться як $Y_{факт} - Y_{сер}$.

6. Елементи стовпчика "4" знаходяться як $Y_{розр} - Y_{сер}$.

7. Реалізуємо обчислення суми квадратів елементів кожного з цих стовпчиків за допомогою процедури "майстра функцій f" СУММКВ(.), знаходимо значення суми квадратів відхилень.

8. Проаналізуємо достовірність моделі та її параметрів:

Коефіцієнт детермінації моделі обчислюється за формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{розр} - Y_{сер})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_{факт} - Y_{сер})^2} = \frac{138}{145,6} = 0,94246$$

В економічних розрахунках вважається прийнятним такий зв'язок між факторами, при якому $r^2 > 0,7$.

Скоригований коефіцієнт детермінації:

$$R^2_{скор} = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-m-1} = 1 - (1 - 0,94246) \cdot \frac{8-1}{8-2-1} = 0,93287$$

Скоригований коефіцієнт детермінації не перевищує одиниці

$$R^2_{скор} \le 1$$

Справедлива нерівність:

$$R^2_{скор} \le R^2$$

$$0,93287 < 0,94246$$

9. **Множинний коефіцієнт кореляції R** розраховується за формулою:

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,94246} = 0,971 .$$

що свідчить про вельми високий зв'язок між показниками Y та X_1, X_2.

Парні коефіцієнти кореляції розраховують за формулою матриці коефіцієнтів парної регресії між змінними:

$$r_{xx} = X^{*'} X^*$$

Елементи нормалізованих векторів розраховують за формулами:

$$y^* = \frac{y - \overline{y}}{\sqrt{n\sigma_y^2}},$$

$$x_k^* = \frac{x_k - \overline{x_k}}{\sqrt{n\sigma_{x_k}^2}},$$

$$x_j^* = \frac{x_j - \overline{x_j}}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}},$$

Дисперсії змінних мають такі значення:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n} = \frac{145{,}96}{8} = 18{,}24,$$

$$\sigma_{x_k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ik} - \overline{x_k}\right)^2}{n} = \frac{65{,}52}{8} = 8{,}19;$$

$$\sigma_{x_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x_j}\right)^2}{n} = \frac{150}{8} = 18{,}75.$$

Тоді знаменники для нормалізації кожної змінної будуть такими:

y^* : $\sqrt{n\sigma_y^2} = \sqrt{8 \cdot 18{,}24} = 12{,}08;$

x_k^* : $\sqrt{n\sigma_{x_k}^2} = \sqrt{8 \cdot 8{,}19} = 8{,}09;$

x_j^* : $\sqrt{n\sigma_{x_j}^2} = \sqrt{8 \cdot 18{,}75} = 12{,}25.$

$y - \overline{y}$	$x_k - \overline{x_k}$	$x_j - \overline{x_j}$	$(y - \overline{y})^2$	$(x_k - \overline{x_k})^2$	$(x_j - \overline{x_j})^2$	y^*	x_k^*	x_j^*
-6,06	-2,80	-9,00	36,75	7,84	81	-0,5801	-0,3687	-1,0835
-3,06	-1,70	-4,00	9,38	2,89	16	-0,2931	-0,2238	-0,4815
-2,06	-0,50	2,00	4,25	0,25	4	-0,1974	-0,0658	0,2408
-0,86	-1,20	0,00	0,74	1,44	0	-0,0825	-0,1580	0,0000
-0,56	-0,10	0,00	0,32	0,01	0,0	-0,0538	-0,0132	0,0000
1,14	-1,10	2,00	1,29	1,21	4,0	0,1089	-0,1448	0,2408
2,04	0,20	3,00	4,15	0,04	9	0,1950	0,0263	0,3612
9,44	7,20	6,00	89,07	51,84	36	0,9031	0,9480	0,7223
Усього			145,96	65,52	150			

Матриця нормалізованих змінних:

$$X^* = \begin{vmatrix} -0,5018 & -0,3459 & -0,7348 \\ -0,2535 & -0,2100 & -0,3266 \\ -0,1707 & -0,0618 & 0,1633 \\ -0,0714 & -0,1482 & 0,0000 \\ -0,0466 & -0,0124 & 0,0000 \\ 0,0942 & -0,1359 & 0,1633 \\ 0,1686 & 0,0247 & 0,2449 \\ 0,7812 & 0,8895 & 0,4899 \end{vmatrix}$$

Матриця, транспонована до X^*:

$$\mathbf{X^{*\prime}} = \begin{vmatrix} -0,5018 & -0,2535 & -0,1707 & -0,0714 & -0,0466 & 0,0942 & 0,1686 & 0,7812 \\ -0,3459 & -0,2100 & -0,0618 & -0,1482 & -0,0124 & -0,1359 & 0,0247 & 0,8895 \\ -0,7348 & -0,3266 & 0,1633 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1633 & 0,2449 & 0,4899 \end{vmatrix}$$

Запишемо шукану кореляційну матрицю:

$$r_{xx} = \begin{vmatrix} 1 & 0,9347 & 0,8630 \\ 0,9347 & 1 & 0,7323 \\ 0,8630 & 0,7323 & 1 \end{vmatrix}$$

Кожний елемент цієї матриці характеризує тісноту зв'язку однієї змінної з іншою.

Оскільки діагональні елементи характеризують тісноту зв'язку кожної змінної з цією самою змінною, то вони дорівнюють одиниці. Решта елементів матриці r_{xx} такі:

$$r_{yx_k} = 0,9347 \ ;$$

$$r_{yx_j} = 0,8630 ;$$

$$r_{x_k x_j} = 0,7323 \ .$$

Вони є парними коефіцієнтами кореляції між змінними.

Користуючись цими коефіцієнтами, можна зробити висновок, що між змінними y та x_j – високий зв'язок; між змінними y та x_k існує досить високий кореляційний зв'язок

Частинні коефіцієнти кореляції, як і парні, характеризують тісноту зв'язку між двома змінними, але за умови, що решта змінних сталі.

Розрахунок частинних коефіцієнтів кореляції базується на обернений матриці до матриці r_{xx} (матриця С):

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} \cdot c_{jj}}},$$

де c_{kj} – елемент матриці С, що міститься в k-му рядку і j-му стовпці;
c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці С.

Розрахуємо матрицю, обернену до матриці r_{xx} :

$$C = \begin{vmatrix} 17{,}379 & -11{,}35 & -6{,}69 \\ -11{,}345 & 9{,}56 & 2{,}79 \\ -6{,}69 & 2{,}79 & 4{,}73 \end{vmatrix}$$

Матриця С – симетрична, і її діагональні елементи завжди мають бути додатними.

Визначимо частинні коефіцієнти кореляції:

$$r_{yx_k} = 0{,}8801$$
$$r_{yx_j} = 0{,}7377$$
$$r_{x_k x_j} = -0{,}4145$$

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують рівень тісноти зв'язку між двома змінними за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає. Частинні коефіцієнти кореляції за модулем нижчі, ніж коефіцієнти парної кореляції, бо на їхній рівень не впливає решта змінних, які мають зв'язок із цими двома.

Коефіцієнт парної кореляції $r_{yx_k} = 0{,}88$, тому можна зробити висновок, що рівень тісноти зв'язку між двома змінними (y *та* x_k;) високий за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає.

Коефіцієнт парної кореляції $r_{yx_j} = 0{,}7377$ – можна зробити висновок, що рівень тісноти зв'язку між двома змінними (y *та* x_j) високий за умови, що решта змінних на цей зв'язок не впливає.

10. Перевіримо **значимість зв'язку** між змінними моделі:

$$F_{розр} = \frac{\sum (Y_{факт} - Y_{сер})^2}{\sum (Y_{факт} - Y_{розр})^2} = 17{,}38$$

З урахуванням ступенів вільності:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{розр} - Y_{сер})^2}{m_1 - 1} \Bigg/ \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{факт} - Y_{розр})^2}{n - m_1} = \frac{138}{3-1} \Big/ \frac{8{,}399}{8-3} = 40{,}947$$

$$F^{0,05}_{табл} = \quad 3{,}97$$

$$F^{0,05}_{табл} < \quad F_{розр}$$

Модель приймаємо – припускаємо присутність лінійного зв'язку для рівня надійності $p = (1 - \alpha) = 0{,}95$.

11. Стандартні похибки оцінок параметрів з урахуванням дисперсії залишків:

$$S_{\beta_j} = \sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}.$$

$$y_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - m_1} = \frac{8{,}399}{8-3} = 1{,}6797$$

З матриці похибок:

$C_{00} = \quad 3{,}78969$

$C_{11} = \quad 0{,}03291$

$C_{22} = \quad 0{,}01438$

$$S_{в_0} = \sqrt{y_u^2 c_{00}} = \sqrt{1{,}6797 \cdot 3{,}78969} = 2{,}523;$$

$$S_{в_1} = \sqrt{y_u^2 c_{11}} = \sqrt{1{,}6797 \cdot 0{,}03297} = 0{,}235;$$

$$S_{в_2} = \sqrt{y_u^2 c_{22}} = \sqrt{1{,}6797 \cdot 0{,}01438} = 0{,}155.$$

Стандартні помилки параметрів $S_{в_j}$ не перевищують абсолютні значення цих параметрів, то це означає, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істотних значень.

12. Перевірка значимості коефіцієнта детермінації, коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії.

Перевірка значимості коефіцієнта детермінації

Висувається нульова гіпотеза H_0: $R^2=0$,
або H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0$.
Альтернативна до неї є H_A: $(\beta_i \neq 0)$

За отриманими в моделі значеннями коефіцієнта детермінації R^2 обчислюємо експериментальне значення F-статистики:

$$F_{експ} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,94246}{1-0,94246} \cdot \frac{8-2-1}{2} = 40,95$$

Визначимо табличне значення F-критерію Фішера:

$F_{табл}$ = 3,9715

==FРАСПОБР(0,05;5;7)

Порівняємо з табличним значенням розподілу Фішера при рівні значущості $\alpha = 0,05$:

$$F_{експ} > F_{табл}$$

Нульова гіпотеза відхиляється.

Відхилення нуль-гіпотези свідчить про значимість коефіцієнта детермінації.

Перевірка значимості коефіцієнта кореляції

Коефіцієнт кореляції, як вибіркова характеристика, перевіряється на значущість за допомогою t-критерію Ст'юдента.

$$t_{експ} = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0,971\sqrt{8-2-1}}{\sqrt{1-0,94246}} = 9,049$$

Задамо рівень значущості α=0,05 та визначимо табличне значення t-критерію Ст'юдента:

$t_{табл}$ = 2,570581835

=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;5)

Величина експериментального значення t-статистики перевищує табличне:

$$|t_{експ}| > t_{табл}$$

$$9,049 > 2,57$$

Тобто можна зробити висновок, що **коефіцієнт кореляції достовірний** (значущий), а зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Перевірка значимості оцінок параметрів моделі множинної регресії

Для оцінки значимості кожного параметра моделі перевіряємо їх за допомогою t-критерію Ст'юдента:

$$t_j = \frac{|в_j|}{\sqrt{y_u^2 \cdot c_{jj}}} = \frac{|в_j|}{S_{в_j}}$$

де c_{jj} – діагональний елемент матриці $(X' X)^{-1}$;

S_{β_j} – стандартна похибка оцінки параметра моделі.

Статистичну значущість кожного параметра моделі можна перевірити за допомогою t-критерію. При цьому нульова гіпотеза має вигляд

$$H_0 : \quad \beta_j = 0,$$

альтернативна

$$H_A : \quad \beta_j \neq 0.$$

Будемо наслідувати відповідний алгоритм. Задамо рівень значущості α=0,05, визначимо табличне значення t-критерію Ст'юдента ($t_{табл}$ =2,5058) і розрахуємо значення t-критерію для кожного параметра.

Перевірка гіпотези H_0: β_0 =0

$t_{спос}$ = 9,4678

Перевірка гіпотези H_0: β_1 =0

$t_{спос}$ = 4,1439

Перевірка гіпотези H_0: β_2 =0

$t_{спос}$ = 2,4435

Якщо $| t_{спос} | < t_{табл}$, то приймаємо гіпотезу H_0.

Якщо $| t_{спос} | > t_{табл}$, то відхиляємо гіпотезу H_0.

Перевіряємо виконання нерівності $| t_{спос} | > t_{табл}$ робимо висновки про стійкість впливу відповідного параметру на залежну змінну Y:

для β_0: |9,4678| > 2,57058 → H_0 (β_0=0) відхиляємо; змінна X_0 (вільний член) є значущою;

для β_1: |4,1439| > 2,57058 → H_0 (β_1=0) відхиляємо; змінна X_1 (вартість основних засобів) є значущою;

для β_2: |2,4435| < 2,57058 → H_0, (β_2=0) приймаємо; змінна X_2, (чисельність працюючих) є незначущою.

13. Знайдемо інтервали надійності для кожного окремого параметра за формулою:

$$P\{в_j^* - t \cdot S_{в_j} \prec в_j \prec в_j^* + t \cdot S_{в_j}\} = 1 - б$$

Оскільки оцінки параметрів моделі β_j*, $t_{спос}$ і стандартні похибки параметрів моделі S_{β_j} обчислені нами у попередніх пунктах, достатньо просто скористатися формулою для знаходження інтервалів:

$$= 23{,}89 - 9{,}4678 * 2{,}523 \leq \beta_0 < 23{,}89 + 9{,}4678 * 2{,}523$$

$$= 0{,}97 - 4{,}1439 * 0{,}235 \leq \beta_1 < 0{,}97 + 4{,}1439 * 0{,}235$$

$$= 0{,}38 - 2{,}4435 * 0{,}155 \leq \beta_2 < 0{,}38 + 2{,}4435 * 0{,}155$$

$$P\ (0 < \beta_0 < 47{,}78) = 0{,}95$$
$$P\ (0 < \beta_1 < 1{,}95) = 0{,}95$$
$$P\ (0 < \beta_2 < 0{,}96) = 0{,}95$$

14. Обчислимо прогнозні значення $Y_{пр}$:

У рівняння $Y_{розр} = 23{,}89 + 0{,}97X_1 + 0{,}38X_2$ підставимо прогнозні значення фактору $X_{пр} = (1,\ 15,\ 35)$, що лежить за межами базового періоду (точковий прогноз):

$$Y_{пр} = 23{,}89 + 0{,}97 \cdot 15 + 0{,}38 \cdot 35 = 51{,}79$$

Тоді $M(Y_{пр})$ можна розглядати як оцінку прогнозного значення математичного сподівання та індивідуального значення обсягу виробленої продукції при відомих параметрах вартості основних засобів (X_1) та чисельності працюючих (X_2).

Визначимо дисперсію прогнозу σ_n^2 з урахуванням матриці похибок, яка для прикладу має вигляд:

$$(X' \cdot X)^{-1} = \begin{vmatrix} 3{,}78969 & 0{,}12007 & -0{,}20478 \\ 0{,}12007 & 0{,}03291 & -0{,}01593 \\ -0{,}20478 & -0{,}01593 & 0{,}01438 \end{vmatrix}$$

Елементи дисперсійно-ковартційної матриці, які розраховуються за формулами і мають значення:

$$y_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n - m_1} = \frac{8{,}399}{8 - 3} = 1{,}6797.$$

$$\sigma^2_{\beta_j} = \sigma^2_u c_{jj}.$$

$\sigma^2_{\beta_2} = \sigma^2_u c_{22} = 1{,}679748 \cdot 0{,}01438 = 0{,}0241$

$\sigma^2_{\beta_1} = \sigma^2_u c_{11} = = 1{,}679748 \cdot 0{,}03291 = 0{,}0553$

$\sigma^2_{\beta_2} = \sigma^2_u c_{22} = 1{,}679748 \cdot 0{,}01438 = 0{,}0241$

$$\sigma_{\beta_j\beta_k} = \sigma^2_u c_{jk}$$

$\sigma_{\beta_0\beta_1} = \sigma^2_u c_{01} = \sigma^2_u c_{10} = 1{,}679748 \cdot 0{,}12007 = 0{,}201692,$

$\sigma_{\beta_0\beta_2} = \sigma^2_u c_{02} = \sigma^2_u c_{20} = 1{,}679748 \cdot (-0{,}20478) = -0{,}343982$

$\sigma_{\beta_1\beta_2} = \sigma^2_u c_{12} = \sigma^2_u c_{21} = 1{,}679748 \cdot (-0{,}01593) = -0{,}02676.$

$$var\ (B) = \begin{vmatrix} 6{,}36573 & 0{,}20169 & -0{,}34398 \\ 0{,}20169 & 0{,}05529 & -0{,}02676 \\ -0{,}34398 & -0{,}02676 & 0{,}02415 \end{vmatrix}$$

$$X_{пр} = \begin{vmatrix} 1 \\ 15 \\ 35 \end{vmatrix}$$

$$X'_{пр} = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

$$X'_{пр} * \text{var}\ (B) = \begin{vmatrix} -2{,}6483 & 0{,}0944 & 0{,}0999 \end{vmatrix}$$

Знайдемо дисперсію прогнозу:

$$\sigma^2_n = X'_{пр}\ \text{var}(B) X_{пр} = 2{,}2638.$$

Середньоквадратична (стандартна) похибка прогнозу:

$$\sigma_n = \sqrt{X'_{пр}\ \text{var}(B) X_{пр}} = 1{,}5046.$$

15. Довірчий інтервал для прогнозних значень:

$$Y_{пр} - t_\alpha \sigma_u \sqrt{X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр}} \le M(Y_{пр}) \le Y_{пр} + t_\alpha \sigma_u \sqrt{X'_{пр}(X'X)^{-1}X_{пр}}$$

$$47{,}9264 \le M(Y_{пр}) \le 55{,}6617$$

16. Інтервальний прогноз математичного сподівання $M(Y_{пр})$ буде в межах:

$$Y_{пр} - t_\alpha \sigma_n \le M(Y_{пр}) \le Y_{пр} + t_\alpha \sigma_n$$

$$51{,}79 - 2{,}57058 \cdot 1{,}5046 \le M(Y_{пр}) \le 51{,}79 + 2{,}57058 \cdot 1{,}5046$$

$$\boxed{47{,}9264 \le M(Y_{пр}) \le 55{,}6617}$$

17. Визначимо інтервальний прогноз індивідуального значення $Y_{пр}$.

Для цього обчислимо дисперсію та стандартну помилку прогнозу індивідуального значення $Y_{пр}$:

$$y^2_{n_{(i)}} = y^2_u + y^2_n = y_u \sqrt{1 + X'_{пр}(X'X)^{-1} X_{пр}} = 1{,}6797 + 2{,}2638 = 3{,}9435$$

$$\sqrt{\sigma^2_{n_{(i)}}} = 1{,}9858$$

$$Y_{пр} - t_\alpha \sigma_{n_{(i)}} \le Y_{пр} \le Y_{пр} + t_\alpha \sigma_{n_{(i)}}$$

$$51{,}79 - 2{,}57058 \cdot 1{,}9858 \le Y_{пр} \le 51{,}79 + 2{,}57058 \cdot 1{,}9858$$

$$\boxed{46{,}6893 \le Y_{пр} \le 56{,}8988}$$

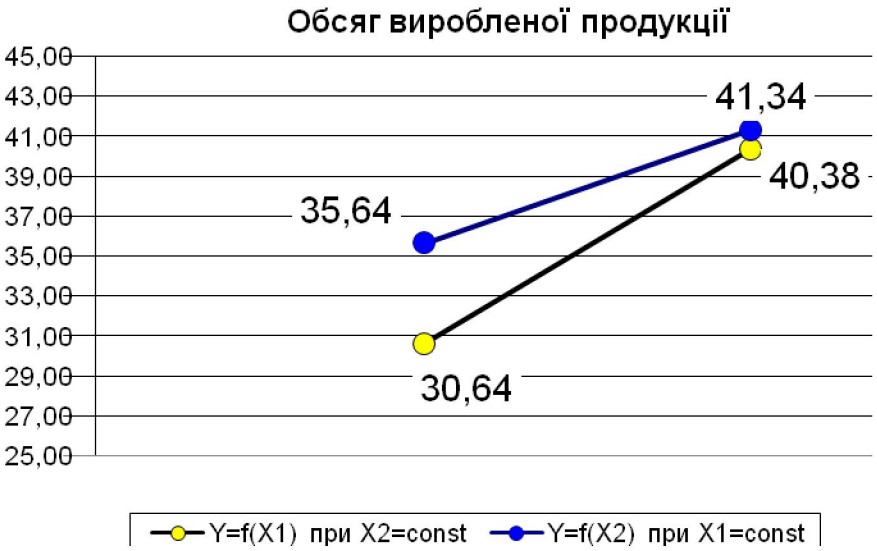
18. Графічне зображення моделі ґрунтується на побудові ліній регресії, в прямокутних координатах $\mathbf{Y - X_1}$ та $\mathbf{Y - X_2}$.

При цьому масштаб треба обрати таким, щоб мінімальні та максимальні значення $\mathbf{X_1}$ та $\mathbf{X_2}$ співпадали між собою.

Лінія регресії $\mathbf{Y=}f\mathbf{(X_1)}$ при X_2=const відображає вплив першого фактора $\mathbf{X_1}$ на продуктивність праці при постійному значенні другого $\mathbf{X_2}$ (середнє значення X_2).

Лінія регресії $\mathbf{Y=}f\mathbf{(X_2)}$ при X_1=const відображає вплив другого фактора $\mathbf{X_2}$ на продуктивність праці при постійному значенні $\mathbf{X_1}$ (середнє значення X_1).

	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$Y=f(X_1)$ при X_2=const	$Y=f(X_2)$ при X_1=const	Середні значення	
min	4,20	13,00	30,64	35,64	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$
max	14,20	28,00	40,38	41,34	7,00	22



$$Y_{розр} = 23,89 \quad +0,97X_1 \quad +0,38X_2$$

19. Висновки.

Згідно з обчисленими характеристиками можна сказати, що обсяг виробленої продукції на 94,2% залежить від вартості основних засобів та чисельності працюючих, а на 5,8% від неврахованих в задачі чинників. Зв'язок між залежною змінною та незалежними (вартістю основних засобів та чисельністю працюючих) досить високий (множинний коефіцієнт кореляції дорівнює 0,971).

Перевірено значимість зв'язку між змінними моделі $F_{розр} > F^{0,05}_{табл}$ (40,947>3,97) для рівня надійності α=0,95. З 5%-ним ризиком помилитися припускаємо присутність лінійного зв'язку.

Стандартні помилки параметрів S_{β_j} не перевищують абсолютні значення цих параметрів:

$$S_{\beta_0} = 2,523 < |23,89|$$

$$S_{\beta_1} = 0,235 < |0,97|$$

$$S_{\beta_2} = 0,155 < |0,38|$$

Це означає, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істотних значень.

Середньоквадратичне відхилення (похибка)

$$S_{yx} = \pm\sqrt{\frac{\sum(Y_{факт} - Y_{розр})^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{8,399}{8-1}} = \pm 0,77$$

свідчить про те, що фактичні значення Y відхиляються від розрахункових його значень на ±0,77 тис. грн.

Відносна похибка $\sigma = \frac{S_{yx}}{Y_{сер}} \cdot 100 = \frac{0,77}{39,06} \cdot 100 = 1,7\%$ – це характеризує модель з хорошої сторони.

Проведена перевірка значущості коефіцієнта детермінації за F-критерієм Фішера. $F_{табл} < F_{експ}$ (2,5705<40,95). Коефіцієнт детермінації значущій.

Перевірена значимість коефіцієнта кореляції за t-критерієм Ст'юдента. $t_{табл} < |t_{експ}|$ (2,57 < 9,049). Коефіцієнт кореляції достовірний (значущий) і зв'язок між залежною змінною та всіма незалежними факторами суттєвий.

Дана оцінка значимості кожного параметра моделі за допомогою t-критерію Ст'юдента: параметри моделі є значущими.

Отже, модель є достовірною та відображає тісний кількісний взаємозв'язок між залежною та незалежними показниками і може бути використана для практичного економічного висновку**.**

На даному підприємстві збільшення виробництва продукції обумовлюється збільшенням вартості основних засобів та збільшенням чисельності працюючих на підприємстві. Так, на кожні 10 тис. грн. збільшення вартості основних засобів, можливе підвищення випуску продукції на 9,7 тис. грн., за умови незмінної дії інших чинників.

При збільшенні чисельності працюючих на підприємстві на 10 чол. можливе підвищення випуску продукції на 3,8 тис. грн., за умови незмінної дії інших чинників.

Були обчислені прогнозні значення $Y_{пр}$ для $X_{пр} = (1, 15, 35)$:

$$Y_{пр} = 23,89 + 0,97 \cdot 15 + 0,38 \cdot 35 = 51,79 \text{ тис. грн.}$$

Так, при ймовірності P=0,95 (α=0,05), прогноз математичного сподівання $M(Y_{пр})$ потрапляє в інтервал [47,9274; 55,6617], а прогноз індивідуального значення $Y_{пр}$ – в інтервал [46,6893; 56,8988].

В економічній інтерпретації це означає, що при прогнозних значеннях вартості основних засобів 15 тис. грн. та чисельності працюючих 35 чол. обсяг виробленої продукції потрапляє в інтервал:

$$47,9274 \leq M(Y_{пр}) \leq 55,6617$$

Водночас окремі *(інтервальні)* значення обсягу виробленої продукції містяться в інтервалі:

$$46,6893 \leq Y_{пр} \leq 56,8988$$

Лабораторна робота № 16
«Виробнича функція Кобба-Дугласа»

Виробнича функція – це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники. Виробнича функція зв'язує кількість ресурсів (X_1 – X_n) з обсягом випуску продукції (Y).

Загальний вигляд виробничої функції такий:

$$Y = a \cdot F^{\alpha} \cdot L^{\beta},$$

де Y – обсяг продукції; F – основний капітал; L – робоча сила; a – параметр, який визначає ефективність виробничого процесу; α, β – параметри, що характеризують ступінь однорідності виробничої функції.

В залежності від кількості змінних (X) виробничі функції поділяються на

- однофакторні $Y = f(X)$;
- двофакторні $Y = f(X_1, X_2)$.

Метод рішення

Регресійні залежності, нелінійні відносно параметрів не допускають безпосереднього застосування методу найменших квадратів. Щоб зробити це можливим, початкові дані спостережень піддають перетворенням з метою лінеаризації залежностей. У випадку, якщо задана функція має вигляд $Y = A_0 \cdot X_1^{A1} \cdot X_2^{A2}$, можна перейти до лінійного шляхом логарифмування:

$$\ln Y = \ln A_0 + A_1 \cdot \ln X_1 + A_2 \cdot \ln X_2 .$$

Застосовуючи заміну $Y' = \ln Y$, $X_1' = \ln X_1$, $X_2' = \ln X_2$, $A'_0 = \ln A_0$, отримуємо лінійну залежність

$$Y' = A'_0 + A_1 \cdot X'_1 + A_2 \cdot X'_2$$

Для одержання коефіцієнтів регресії складемо і вирішимо систему нормальних рівнянь (на базі матриці логарифмів):

$$\begin{cases} \sum Y' = A'_0 \cdot N + A_1 \sum X'_1 + A_2 \sum X'_2 \\ \sum Y' X'_1 = A'_0 \sum X'_1 + A_1 \sum (X'_1)^2 + A_2 \sum X'_1 X'_2 \\ \sum Y' X'_2 = A'_0 \sum X'_2 + A_1 \sum X'_1 X'_2 + A_2 \sum (X'_2)^2 \end{cases}$$

У результаті розрахунку одержуємо коефіцієнти регресії A'_0, A_1, A_2 і будуємо рівняння зв'язку:

$$Y' = A'_0 + A_1 \cdot X'_1 + A_2 \cdot X'_2$$

Наприклад: $A'_0 = 1{,}11$, $A_1 = 0{,}124$, $A_2 = -0{,}365$,

Звідси: $Y' = 1{,}11 + 0{,}124\, X'_1 - 0{,}365\, X'_2$,

Виробнича функція буде мати вигляд:

$$Y = \exp(1{,}11) \cdot X_1^{\,0{,}124} \cdot X_2^{\,-0{,}365}$$

$$Y = 3{,}034 \cdot X_1^{\,0{,}124} \cdot X_2^{\,-0{,}365}$$

Задача.

Маємо вибірку даних, яка характеризує роботу підприємства за останні 10 місяців. У цій вибірці кожному значенню Y – вартість випущеної продукції, тис. грн. відповідають показники X_1 – вартість основних виробничих фондів, тис. грн. і X_2 – витрати праці, люд.-год. Потрібно побудувати множинну кореляційну економічну модель у вигляді функції Кобба-Дугласа; оцінити точність і достовірність моделі; визначити тісноту зв'язку між факторами; побудувати ізокванти взаємозамінності факторів моделі і зробити економічний аналіз отриманих результатів за всіма відомими характеристиками виробничих функцій.

Розрахунки виконуються на ПК.

Номер варіанту завдання з табл. 16.2 визначається за варіантом з табл.16.1. Перша цифра – номер стовпця для показника Y, друга – номер стовпця для показника X_1 , а третя – номер стовпця для показника X_2.

Таблиця 16.1

Варіант	Номери варіантів за завданням
1	1; 5; 9
2	2; 8; 9
3	3; 8; 11
4	4; 5; 9
5	1; 6; 9
6	2; 5; 10
7	3; 8; 9
8	4; 7; 12
9	1; 6; 10
10	1; 8; 11

Варіант	Номери варіантів за завданням
11	1; 7; 9
12	2; 5; 9
13	3; 8; 12
14	4; 6; 10
15	1; 7; 10
16	2; 6; 10
17	3; 7; 11
18	4; 6; 9
19	1; 5; 11
20	2; 7; 9

Варіант	Номери варіантів за завданням
21	1; 5; 10
22	2; 8; 12
23	3; 5; 9
24	4; 7; 11
25	1; 8; 12
26	2; 7; 11
27	3; 5; 10
28	4; 8; 9
29	1; 5; 12
30	3; 6; 10

Таблиця 16.2

Кіль-кість спосте-режень	Варіанти											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Y	Y	Y	Y	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_2	x_2
1	**151**	172	170	17,6	**10,53**	10,84	11,26	11,10	**19,4**	19,6	19,5	19,5
2	**157**	180	182	19,1	**11,80**	11,74	11,83	11,64	**20,1**	20,9	20,2	20,2
3	**163**	191	192	19,5	**11,45**	11,78	11,80	11,17	**20,9**	21,1	20,8	20,8
4	**172**	192	191	19,2	**11,10**	11,54	11,27	11,97	**21,1**	21,3	20,7	20,7
5	**197**	205	199	20,6	**12,31**	12,60	12,94	12,17	**21,5**	21	21,5	21,5
6	**208**	209	214	21,9	**12,86**	12,92	12,35	12,89	**22,6**	22,2	22,2	22,2
7	**213**	222	215	22,5	**13,96**	13,67	13,05	13,44	**23,4**	23,6	23,5	23,5
8	**229**	233	233	23,8	**12,31**	12,70	12,86	12,98	**24,1**	24,5	24,4	24,3
9	**254**	260	263	27	**13,93**	13,69	13,27	13,45	**25,3**	25,4	24,9	24,9
10	**269**	277	273	28,1	**12,69**	12,93	12,97	12,61	**25,9**	26,4	25,9	25,9
11	**307**	312	308	31,0	**13,23**	13,04	13,08	13,38	**27,2**	27	27,6	27,6
12	**308**	312	313	32	**13,26**	13,09	13,93	13,96	**28,4**	28,5	28,3	28,3
13	**319**	324	324	32,7	**14,77**	14,61	14,42	14,65	**30,8**	30,9	30,8	30,8
14	**405**	412	413	41,4	**15,35**	15,62	15,18	15,00	**30,4**	31,3	30,9	30,9
15	**416**	412	414	42,2	**16,20**	16,05	16,44	16,39	**31,1**	30,8	30,9	30,9

Приклад рішення задачі.

Потрібно побудувати виробничу функцію Кобба-Дугласа за статистичними спостереженнями:

Y – вартість випущеної продукції, тис.грн; .

X_1 – вартість основних виробничих фондів, тис.грн;

X_2 – витрати праці, люд-год.

Дані для розрахунків в табл. 16.3.

Виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд:

$$Y=A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2}$$

Проведемо логарифмування для отримання лінійної моделі:

$$lnY = lnA_0 + A_1 \cdot lnX_1 + A_2 \cdot lnX_2.$$

Приймемо такі позначення: $Y^*=\ln Y$; $A_0^*=\ln A_0$; $X_1^*=\ln X_1$; $X_2^*=\ln X_2$.

В результаті підстановки отримаємо: $Y^* = A_0^* + A_1 \cdot X_1^* + A_2 \cdot X_2^*$.

Таблиця 16.3

Вихідні дані для розрахунків

Y	X_1	X_2	lnY	lnX_1	lnX_2
10	28	4	1	1,447	0,602
16	29	8	1,176	1,462	0,903
17	30	10	1,230	1,477	1
21	31	12	1,322	1,491	1,079
24	32	16	1,380	1,505	1,204
25	34	18	1,398	1,531	1,255
27	36	19	1,431	1,556	1,279
29	37	17	1,462	1,568	1,230
33	39	19	1,519	1,591	1,279
37	39	20	1,568	1,591	1,301
238	**335**	**143**			

За допомогою програми множинної кореляції отримаємо таку регресійну модель: $Y = 0{,}052 \cdot X_1^{1{,}387} \cdot X_2^{0{,}458}$

$A_1>1$, тобто збільшення вартості основних виробничих фондів на 1 тис. грн. збільшує вартість випущеної продукції, а $0<A_2<1$, тобто збільшення витрат праці зменшує вартість випущеної продукції.

Коефіцієнт кореляції = 0,98, зв'язок між змінними в моделі дуже тісний. За показниками точності і достовірності модель можна використовувати для аналізу виробничого процесу.

Проведемо аналіз отриманих результатів:

1) Середня продуктивність при фіксованих обсягах становить:
(у формули підставимо середні значення X_1 і X_2)

$$C_2 = \frac{Y}{X_2} = A_0 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2-1} = 0{,}053 \cdot X_1^{1{,}387} \cdot X_2^{-0{,}542} = 1{,}634$$

$$C_1 = \frac{Y}{X_1} = A_0 \cdot X_1^{A_1-1} \cdot X_2^{A_2} = 0{,}053 \cdot X_1^{0{,}387} \cdot X_2^{0{,}458} = 0{,}698$$

C_1 – середня фондовіддача; C_2 – середня продуктивність праці.

2) Гранична продуктивність при фіксованих обсягах інших ресурсів або середня кількість продукції на одиницю X_1 або X_2:

$$\Gamma_2 = A_0 \cdot A_2 \cdot X_1^{A_1} \cdot X_2^{A_2-1} = 0{,}053 \cdot 0{,}458 \cdot X_1^{1{,}387} \cdot X_2^{-0{,}542} = 2{,}282;$$

$$\Gamma_1 = A_0 \cdot A_1 \cdot X_1^{A_1-1} \cdot X_2^{A_2} = 0{,}053 \cdot 1{,}387 \cdot X_1^{0{,}387} \cdot X_2^{0{,}458} = 0{,}974.$$

$Г_1$ показує скільки додаткових одиниць продукції дає 1 тис. грн. витраченим фондів при незмінних витратах праці; $Г_2$ показує скільки додаткових одиниць продукції дає 1 люд-год. при фіксованих основних виробничих фондах.

3) Відносна зміна результатів виробництва на одиницю:

$$E_1 = A_1 = 1{,}387;$$
$$E_2 = A_2 = 0{,}458.$$

E_1 показує, що зміна основних виробничих фондів на 1% при незмінних витратах праці, викликає зміну обсягу продукції на 1,387%. E_2 показує, що зміна витрат праці на 1 % при незмінних витратах основних фондів викликає зміну обсягу продукції на 0,458%.

Витрати основних фондів більше впливають на зміни вартості випущеної продукції ніж витрати праці.

4) Потреба у будь-якому ресурсі за умов що відомі величини випуску і обсягів інших ресурсів:

$$X_2 = \left(\frac{Y}{A_0 \cdot X_1^{A_1}}\right)^{\frac{1}{A_2}} = \left(\frac{Y}{0{,}053 \cdot X_1^{1{,}387}}\right)^{\frac{1}{0{,}458}}$$

$$X_1 = \left(\frac{Y}{A_0 \cdot X_2^{A_2}}\right)^{\frac{1}{A_1}} = \left(\frac{Y}{0{,}053 \cdot X_2^{0{,}458}}\right)^{\frac{1}{1{,}387}}$$

X_1 показує скільки потрібно основних виробничих фондів для того, щоб отримати відомий випуск продукції – Y, якщо відома кількість витрат праці.

X_2 показує скільки потрібно витрат праці для того , щоб отримати відомий випуск продукції – Y, якщо відома кількість витрат основних фондів.

5) Співвідношення заміни та взаємодії ресурсів, а саме фондоозброєність – це взаємодія трудових ресурсів і основних фондів:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\left(\frac{Y}{A_0 \cdot X_2^{A_2}}\right)^{\frac{1}{A_1}}}{X_2} = A_0^{-\frac{1}{A_1}} \cdot Y^{\frac{1}{A_1}} \cdot X_2^{-1-\frac{A_2}{A_1}} = 0{,}053^{\frac{-1}{1{,}387}} \cdot Y^{\frac{1}{1{,}387}} \cdot X_2^{-1-\frac{0{,}458}{1{,}387}} = 2{,}374.$$

X_1/X_2 – середня фондоозброєність, це взаємодія основних фондів і витрат праці.

6) Гранична норма заміни ресурсів, а саме гранична норма заміни витрат праці виробничими фондами (знак мінус означає, що при сталому обсязі виробництва збільшення одного ресурсу відповідає зменшенню другого і навпаки:

$$h_{1,2} = -\frac{A_2 \cdot X_1}{A_1 \cdot X_2} = -\frac{0{,}458 \cdot X_1}{1{,}387 \cdot X_2} = -0{,}33\frac{X_1}{X_2}.$$

При сталому обсязі виробництва збільшення основних виробничих фондів відповідає зменшенню трудових ресурсів, чим вище X_1/X_2, тобто фондоозброєність, тим вища і норма заміни ручної праці фондами.

7) Ефект одночасного пропорційного збільшення обох видів ресурсів обчислюється сумарним коефіцієнтом еластичності:

A=1,387+0,458=1,845>1, тобто збільшення ресурсів у k разів призведе до збільшення випуску продукції більше ніж у k разів, а саме у $k^{1,845}$ разів.

8) Темпи приросту показника виражаються лінійно через темпи приросту факторів:

$$\Delta Y = A_I \Delta X_I + A_2 \Delta X_2 = 1{,}387\Delta X_1 + 0{,}458\Delta X_2.$$

9) Для наочного уявлення взаємозамінюваності факторів побудуємо ізокванту (рис. 16.1), для цього спочатку обчислимо значення параметра *b*.

$$b = \frac{Y_0^{\frac{1}{A_1}}}{A_0^{\frac{1}{A_1}}} = \left(\frac{37}{0{,}053}\right)^{\frac{1}{1{,}387}} = 112{,}3092$$

$$X_1 = \frac{b}{X_2^{\frac{A_2}{A_1}}} = \frac{112{,}3092}{X_2^{0{,}33}}$$

Графік будуємо за точками, обчисленими в табл.16.3.

Таблиця 16.3

Точки для побудови ізокванти взаємодії ресурсів обладнання і праці

Y	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37
X_1	71,08	56,55	52,53	49,46	44,98	43,27	42,50	44,09	42,50	41,79
X_2	4	8	10	12	16	18	19	17	19	20

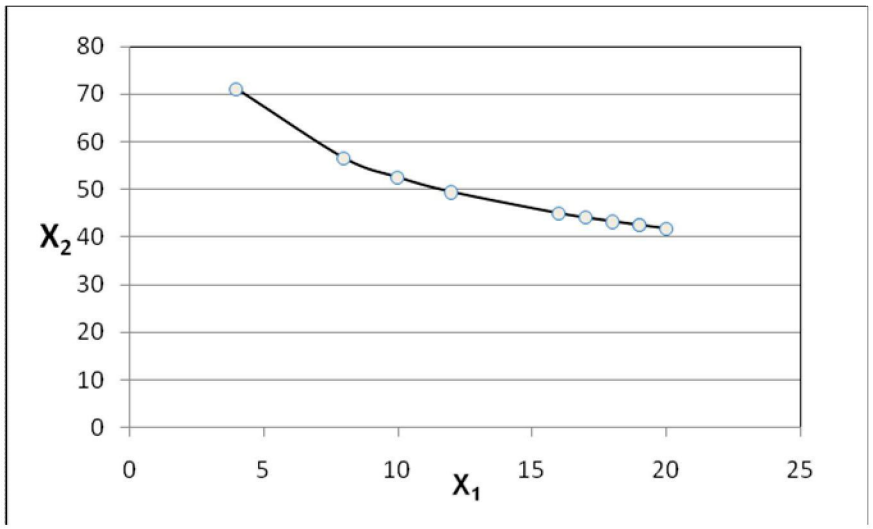


Рис. 16.1. Ізокванта

Контрольні запитання

1. Дати визначення лінійної багатофакторної регресійної моделі.
2. Суть та складові частини лінійної моделі з двома змінними?
3. Основні етапи побудови лінійних моделей?
4. Роль коефіцієнтів еластичності в кількісному аналізі лінійних моделей?
5. Характеристика системи оцінок і критеріїв для перевірки статистичної достовірності моделі?
6. З якою метою розраховуються стандартні похибки оцінок параметрів?
7. Дати визначення нелінійної багатофакторної регерсійної моделі.
8. Суть та складові частини нелінійної економетричної моделі з двома змінними?
9. Основні етапи побудови нелінійних економеричних моделей?
10. Складові частини нелінійної моделі пропозиції продукції?
11. Етапи побудови нелінійної моделі попиту на продукцію?
12. Роль та значення коефіцієнтів еластичності в аналізі моделей попиту і пропозиції продукції
13. Роль коефіцієнтів еластичності в кількісному аналізі нелінійних економетричних моделей?

Література [3 с.257-267; 5, с. 465-534; 8, с. 39-57, 89-100; 9, с. 96-99, 145-150; 10, с. 171-227, 249-272; 11, с. 46-68, 140-149, 46-68, 95-97, 245-265; 12, с. 93-105, 142-154].

Додаток 1

Табличні значення критерію Фішера

Число ступенів вільності f_2	Число ступенів вільності f_1																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
F-розподіл, 5 %-ї точки ($F^{0,95}$)																			
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	9,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,74	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	3,97	3,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,3	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,64	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	3,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,01	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

***F*-розподіл, 1 %-ї точки ($F^{0,99}$)**

1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	31,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	72,1	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,3	26,2	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,6	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	4,64
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,70	4,46	4,28	4,13	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,19	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,19	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,45
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,53	2,45	2,36	2,27	2,17
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Додаток 2

t-розподіл Ст'юдента [критичні значення t(α,*k*)]

Тести	Рівень значущості α (у процентах)							
Двосторонній	**50%**	**20%**	**10%**	**5%**	**2%**	**1%**	**0,2%**	**0,1%**
Односторонній	**25%**	**10%**	**5%**	**2,5%**	**1%**	**0,5%**	**0,1%**	**0,05%**
k								
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,861	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,043
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	3,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2.763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Додаток 3

χ^2- розподіл

(критичні значення χ^2 для рівня значущості α та k ступенів вільності)

k	Рівень значущості α (у процентах)						
	0,1%	1%	2,5%	5%	9,5%	97,5%	99%
1	10,8	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,001	0,0002
2	13,86	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,02
3	16,2	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	18,5	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	20,5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	22,5	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	24,3	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,2
8	26,1	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,7
9	27,9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,1
10	29,6	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,6
11	31,3	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,1
12	32,9	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,6
13	34,5	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,1
14	36,1	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,7
15	37,7	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,2
16	39,3	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,8
17	40,8	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,4
18	42,3	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,0
19	43,8	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,6
20	45,3	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,3
21	46,8	38,9	35,5	32,4	11,6	10,3	8,9
22	48,3	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,5
23	49,7	41 6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	51,2	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	52,6	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	54,1	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	55,5	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	56,9	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	58,3	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	59,7	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Додаток 4

Основні вбудовані функції системи Excel

(знаходяться у **“ майстрі функцій f_x ”**)

1. Математичні функції

КОРЕНЬ(.) – знаходить корінь квадратний із числа.

НАКЛОН(.,.) – знаходить нахил лінії простої лінійної регресії. Вхідними даними є масиви даних Y та X, а вихідним параметром – параметр b* нашої регресійної прямої Y = a* + b*X.

ОТРЕЗОК(. , .) – знаходить відрізок, що відсікає на вісі OY лінія простої лінійної регресії. Вхідними даними є масиви даних Y та X, а вихідним параметром – параметр a* нашої регресійної прямої Y= a* + b*X.

СУММ(.) – знаходить суму всіх чисел указаного масиву (наприклад, стовпчика).

СУММКВ(.) – знаходить суму квадратів усіх чисел указаного масиву.

МУМНОЖ(. , .) – знаходить добуток матриць. Для цього треба:

1) відмітити поле, де буде знаходитись результат добутку матриць;
2) ввійти у "майстер функцій f_x". У категоріях вибираємо "математичні", а в функціях – МУМНОЖ. Вводимо адреси матриць, добуток яких знаходимо;
3) для того, щоб отримати на екрані значення добутку матриць, натискаємо спершу клавішу **F2**, а потім Ctrl+Shift+Enter.

МОБР(.) – знаходить матрицю, обернену до квадратної матриці. Процедура знаходження оберненої матриці аналогічна процедурі МУМНОЖ.

LN(.) – знаходить натуральний логарифм числа.

2. Категорія «Ссылки и массивы»

ТРАНСП (.) – повертає транспоновану матрицю.

3. Статистичні функції

МІН (число1; число2; ...) – повертає найменше значення в списку аргументів. Число1, число2,... – від 1 до 30 чисел, серед яких потрібно знайти найменше.

МАКС (число1; число2; ...) – повертає найбільше значення з набору значень. Число1, число2,... – від 1 до 30 чисел, серед яких потрібно знайти найбільше.

СРЗНАЧ(. ; .; …) – функція обчислення середнього арифметичного.

FРАСПОБР(α, k_1 , k_2) Вхідними параметрами є рівень значущості α і ступені вільності k_1 і k_2 , а вихідним параметром $F_{крит}$ – критичне значення розподілу Фішера–Снедекора з ступенями вільності k_1 і k_2 .

СТЬЮДРАСПОБР(.,.) Вхідними параметрами є рівень значущості α і ступені вільності n–k, а вихідним параметром $t_{крит.}$ – критичне значення розподілу Ст'юдента.

ХИ2ОБР(.;.) Повертає значення, зворотне однобічної ймовірності розподілу χ^2-квадрат. Вхідними параметрами є імовірність α і число ступенів вільності.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. *Бугір М.К.* Математика для економістів: Посібник. – К.: ВЦ «Академія», 2003. – 520 с.
2. *Воронин В.Г.* Экономико-математические методы и модели планирования и управления в пищевой промышленности. – М.: Агропромиздат, 1986. – 303 с.
3. *Воронин В.Г, Денискин В.В., Сирота С.М.* Экономико-математические методы планирования на предприятиях пищевой промышленности. – М.: Лег. и пищ. пром-сть, 1982. – 272с.
4. *Грубер Й.* Эконометрия: Введение в эконометрию: Учеб. пособие. – К.: Астарта, 1996. – 398 с.
5. *Іващук О. Т.* Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник/ За ред. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
6. *Катренко А.В.* Дослідження операцій: Підручник. – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 549 с.
7. *Кутковецький В.Я.* Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с
8. *Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О.* Економетрія: Навч. посіб для студ. вищ. навч. закл. – К.: МАУП, 2003. – 208 с.
9. *Лугінін О.Є, Білоусова С.В., Білоусов О.М.* Економетрія: Навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 254 с.
10. *Лук'яненко І., Краснікова Л.* Економетрика. – К.: Знання, 1998. – 493 с.
11. *Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П.* Економетрія: Підручник. – К.: КНЕУ, 2004. – 520 с.
12. *Толбатов Ю.А.* Економетрика: Підруч. – К.: Четверта Хвиля, 1997. – 319 с.
13. *Чемерис А., Юринець Р., Мищишин О.* Методи оптимізації в економіці: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.

Додаткова

14. *Барковський В., Барковська Н., Лопатін О.* Математика для економістів. – К.: Національна академія управління, 1999.– 400 с. – Т.1,2 (Сер. навч. літ-ри „Економіст").
15. *Винн Р., Холден К.* Введение в прикладной эконометрический анализ. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
16. *Грубер Й.* Економетрія. Том 2. Економічні прогнозні та оптимізаційні моделі: Навчальний посібник. – К.: Нічлава, 1999. – 296 с.

17. *Джонстон Д.* Эконометрические методы: Пер. с англ. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.

18. *Економіко-математичні методи* і моделі в управлінні і плануванні: Метод. Вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни для студентів спеціальності 7.050201 «Менеджмент у виробничій сфері» денної та заочної форм навчання /Укл. В.С.Флон, І.В.Федулова, В.М.Марченко, М.П.Васильчук. – К.:УДУХТ,1997. – 32с.

19. *Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О., Юртин І.І.* Практикум з економетрії. – К.: ДП «Персонал», 2009. – 256 с.

20. *Мазник Л.В.* Моделі і методи прийняття рішень в аналізі та аудиті: Конспект лекцій для студентів спеціальності 7.050106 "Облік і аудит" напряму 0501 "Економіка підприємництва" всіх форм навчання. – К.: НУХТ, 2010. – 115с.

21. *Математическая* экономика на персональном компьютере/ Под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

22. *Математические* методы и модели в планировании и управлении: Метод. указания по курсу /Уклад. В.С.Флон, А.П.Шереметинский. – КТИПП, 1984.

23. *Назаренко О.М.* Основи економетики. Підручник. – К.: Центр навч. Літератури, 2004. – 392 с.

24. *Наконечний С.І., Терещенко Т.О.,* Економетрія: Навч.методичний посібник. Для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2001. – 192 с.

25. *Теория* прогнозирования и принятия решений. /Под ред. С.А Саркисяна. – М.: Высш. шк., 1998. – 351 с.

26. *Тинтнер Г.* Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1984. – 304 с.

27. *Толбатов Ю.А.* Математична статистика та задачі оптимізації в алгоритмах і програмах. – К.: Вища шк., 1994.

Навчальне видання

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
до вивчення дисципліни,
виконання лабораторних та контрольних робіт
для студентів за напрямом підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»
всіх форм навчання

Укладачі: Мазник Ліана Валеріївна,
Скопенко Наталія Степанівна,
Коннова Любов Олександрівна,
Чорноус Людмила Василівна.

Підп. до друку р. Обл. - вид. арк.
Наклад пр. Вид. № . Зам. №

РВЦ НУХТ, 01033, Київ – 33, вул. Володимирська, 68
www. book. nuft. edu. ua
Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № від р.