УДК 371.13

Листопад Володимир Васильович
кандидат фізико-математичних наук, доцент
доцент кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.
Національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна
ORCID 0000000209741775
vlystopad@ukr.net

Розв'язування систем лінійних рівнянь з комп'ютерною підтримкою

Анотація. У статті показано можливість застосування електронних таблиць Microsoft Office Excel для розв'язування деяких задач з курсів алгебри та теорії чисел, електротехніки; презентовано спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь (СЛР) за допомогою методу Жордана-Гауса (повного виключення) з використанням Ms Excel; визначено переваги застосування даного методу над традиційними. Наведено приклади застосування теореми Кронекера-Капеллі, яка дає відповідь на питання про сумісність системи лінійних рівнянь будь-якої розмірності та її розв'язок при позитивній відповіді на питання сумісності. Розкрито можливості, які містить програма Ms Excel для розв'язування СЛР методами Крамера, Гауса, перетворень (Жордана-Гауса), що виявляються в опосередкованому формуванню навичок програмування та у суттєвій економії часу на виконання цих завдань.

З огляду на те, що у сучасній освіті простежується тенденція скорочення годин на вивчення математичних дисциплін, актуальним є впровадження інформаційних технологій у процес вивчення окремих тем курсу вищої математики, що дозволить урізноманітнити форми та способи оволодіння новим змістом; підвищить мотивацію навчальної діяльності студентів; дасть змогу студентам в короткий термін самостійно опрацьовувати матеріал та отримати нові знання та досвід застосування для їх подальшого використання у фаховій

діяльності. Застосування комп'ютера на занятті в 4-5 разів збільшить обсяг опрацьованого матеріалу, сприятиме формуванню у студентів навичок елементів програмування, самоконтролю та перевірки правильності результатів. У роботі зазначено, що застосування комп'ютерних технологій допомагає економити час викладача на підготовку самостійних робіт та їх перевірку; наведено зразки завдань для самостійного виконання.

Цей спосіб розв'язування СЛР можна застосувати до деяких задач матричного аналізу, векторної алгебри, задач оптимізації у математичному програмуванні та до розв'язування систем лінійних нерівностей тощо, що потребує подальших наукових розвідок.

Ключові слова: система лінійних рівнянь, метод Жордана-Гауса, метод Крамера.

В багатьох задачах практичного змісту (із різноманітних напрямів та галузей діяльності) розв'язок зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (нерівностей). Це можуть бути задачі економічного, фізичного, хімічного, біологічного, механічного, технологічного (технічного), соціального змісту тощо. Для розв'язування таких систем використовуються відомі в лінійній алгебрі методи – Гауса, Крамера, матричний, Жордана-Гауса – та їх модифікації. Серед них найбільш громіздким для розв'язання «вручну» є метод Жордана-Гауса. Але він є і найефективніший для отримання результатів. Цей метод дає змогу досліджувати на сумісність системи алгебраїчних рівнянь будь-якої розмірності та розв'язувати їх, знаходити ранг матриці, обернену матрицю, реалізовувати симплекс-метод та його модифікації у процесі розв'язування задач на екстремум.

Постановка проблеми. У Національній доктрині розвитку освіти зазначено, що головним завданням вищої школи є професійна підготовка студентів, формування фахівців із вищою освітою, здатних до прийняття оптимальних рішень, оволодівати навичками самоосвіти й самовиховання, вміння узгоджувати свої дії з діями інших учасників спільної діяльності.

Дисципліна «Вища математика» для студентів технологічних вишів є з одного боку фундаментальною, що формує наукове зображення світу, з іншого – прикладною, оскільки є інструментом для розв'язування професійних задач. Така двоїстість є джерелом суперечок у відповіді на запитання, чи є математика ціллю чи інструментом навчання, що впливає на вибір методів навчання та формування комплексу задач.

Аналіз актуальних досліджень.

Аналіз доробку науковців М.І. Жалдака, Ю.С. Рамського, В.І. Клочка, Ю.В. Горошка, С.А. Ракова, О.І. Скафи, Ю.В. Триуса та інших дозволив зробити висновок, що найбільш популярними програмними продуктами для навчання вищої математики у ЗВО України є GRAN, MathCAD, MathLab, Maple, Mathematica, STATISTICA; офісні додатки Microsoft Office Word, Excel, Power Point.

Мета статті полягає у розкритті можливостей, які містить програма Ms Excel і ефективності їх використання в процесі вивчення вищої математики у ЗВО.

Виклад основного матеріалу. Під час розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛР) довільної розмірності доцільно спочатку дослідити її на сумісність. Відповідь на це дає теорема Кронекера-Капеллі та її наслідки.

Теорема 1 (Кронекера-Капеллі). Для сумісності СЛР необхідно і достатньо щоб ранг її матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Наслідок 1.1. Якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Наслідок 1.2. Якщо ранг матриці сумісної системи менше числа невідомих, то СЛР має безліч розв'язків.

Нагадаємо, що рангом матриці називають найбільший із порядків її мінорів, відмінний від нуля або кількість лінійно-незалежних рядків (стовпців).

Для реалізації методу Жордана-Гауса потрібно послідовно зробити декілька кроків перетворення за певним правилом переходу від однієї розрахункової таблиці до іншої. Сутність цього методу полягає у покроковому виключенні невідомих (за правилом прямокутника) із системи рівнянь. Оскільки кроки переходу є алгоритмічними процедурами, то метод Жордана-Гауса є простим у застосуванні та легко реалізується з допомогою Ms Excel. Цей метод дає відповідь на питання сумісності системи та її розв'язки, якщо вони є. Реалізація цього методу з допомогою Ms Excel детально розглянуто у попередніх публікаціях [1]. Розрахункову таблицю заповнюємо відповідними значеннями коефіцієнтів із СЛР:

Таблиця 1

X_1	X_2	…	X_l	…	X_j	…	X_n	b_i
a_{11}	a_{12}	…	a_{1l}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	…	a_{2l}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{k1}	a_{k2}	…	a_{kl}	…	a_{kj}	…	a_{kn}	b_k
…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{i1}	a_{i2}		a_{il}	…	$\boxed{a_{ij}}$	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_{m1}	a_{m2}		a_{ml}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m

Алгоритм переходу до нової таблиці такий:

1. Обираємо розв'язний елемент $a_{lj} \neq 0$ (найкраще вибирати 1, якщо такий елемент є в таблиці);
2. Елементи і-го рядка (розв'язного рядка) ділимо на a_{lj} і результат записуємо в і - тий рядок нової таблиці;
3. В розв'язному j-му стовпці нової таблиці замість a_{lj} пишемо одиницю, а замість інших елементів цього стовпця пишемо нулі;
4. Усі інші елементи нової розрахункової таблиці, обчислюємо за формулою:

$$a_{kl}^{(1)} = \frac{a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{ij}}, \; k=1,2,...,m; l=1,2,...,n; k \neq i, j \neq l. \qquad (2)$$

Обчислення елементів нової таблиці за формулою (2) доцільно виконувати з використанням схеми прямокутника (рис. 1) із фіксацією у новій формулі елементів розв'язного стовпця (a_{kj}, a_{ij}).

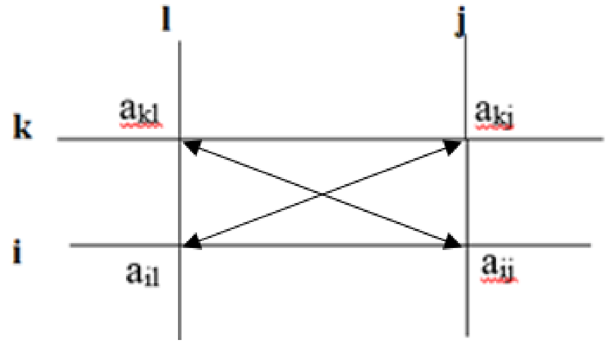


Рис. 1

В даній статті розкриємо сутність застосування електронних таблиць Ms Excel для розв'язання деяких задач з курсів алгебри та теорії чисел, електротехніки та визначимо переваги реалізації даного методу над традиційними.

Розглянемо приклад 1, розв'язання якого подано у посібнику з алгебри і теорії чисел [2, с. 41].

Приклад 1. Знайти загальний опір електричного кола R_0 та сили струму I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 на кожній ділянці кола (рис.2).

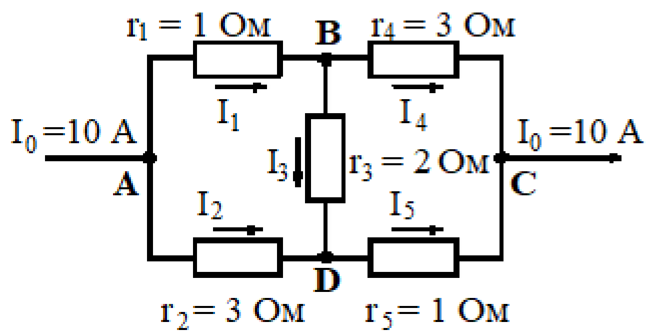


Рис. 2

Розв'язування. Пригадаємо закони Кірхгофа та Ома:

1) Алгебраїчна сума сил струмів у довільному вузлі дорівнює нулю;

2) Алгебраїчна сума напруг на кожному контурі дорівнює нулю.

Застосовуючи закони Кірхгофа та закон Ома для ділянки кола, в якому діють сторонні сили, складаємо систему лінійних рівнянь (1):

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - 10 = 0, & (вузол A) \\ -I_1 + I_3 + I_4 = 0, & (вузол\ B) \\ I_2 + I_3 - I_5 = 0, & (вузол\ D) \\ I_4 + I_5 - 10 = 0, & (вузол\ C) \\ I_1 + 3I_4 - 10R_0 = 0, & (контур\ ABC) \\ 3I_2 + I_5 - 10R_0 = 0, & (контур\ ADC) \\ I_2 + 2I_3 + I_5 - 10R_0 = 0, & (контур\ ABCD) \\ 3I_2 - 2I_3 + 3I_4 - 10R_0 = 0. & (контур\ ADBC) \end{cases} \qquad (1)$$

Отримана система містить 8 рівнянь та 6 невідомих. Розв'яжемо її методом Жордана-Гауса.

Результати обчислень за методом Жордана-Гауса.

Таблиця 2

	A	B	C	D	E	F	G
1	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	R	Bi
2	1	0	0	0	0	0	6,25
3	0	1	0	0	0	0	3,75
4	0	0	1	0	0	0	2,5
5	0	0	0	1	0	0	3,75
6	0	0	0	0	1	0	6,25
7	0	0	0	0	0	1	1,75

Зауваження 1. Із таблиці 2 бачимо, що ранг основної та розширеної матриць рівні. Отже, система має єдиний розв'язок.

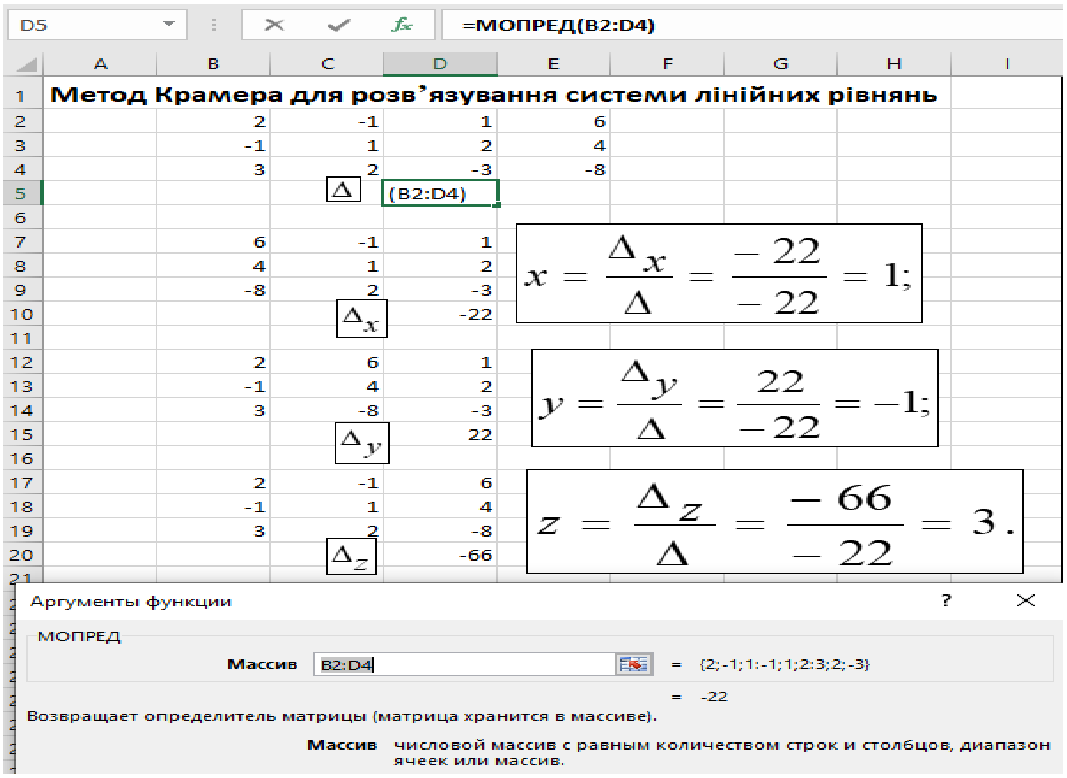
Відповідь. $I_1 = I_5 = 6{,}25A, I_2 = I_4 = 3{,}75\,A, I_3 = 2{,}5\,A, R_0 = 1{,}75\,Ом.$

Приклад 2. Розв'язати СЛР у полі R

$$\begin{cases} 2x - y + z = 6, \\ -x + y + 2z = 4, \\ 3x + 2y - 3z = -8. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’яжемо систему користуючись методом Крамера (метод визначників) з допомогою функції МОПРЕД із Ms Excel.

Таблиця 3



Відповідь. $x = 1, y = -1, z = 3.$

<u>Зауваження 2</u>. Маючи шаблон для методу Крамера в Ms Excel (Таблиця 3) можна набирати розширену матрицю системи та отримувати відповіді. Зауважимо, що числові значення вільних членів (правої частини) вносяться в комірки E2-E4 за допомогою комбінації клавіш CTRL+SHIFT+ENTER.

<u>Приклад 3.</u>

Розв’язати СЛР у полі R :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язування. Користуючись методом Жордана-Гауса отримаємо (в зафарбованих клітинках містяться розв’язні елементи, які фіксуються у формулах переходу до наступної таблиці).

Таблиця 4

	A	B	C	D	E	F	G
55	Приклад 3		X1	X2	X3	X4	bi
56		Крок 1	1	-1	1	0	1
57			2	-2	0	1	1
58			-1	1	1	1	0
59			3	-3	1	1	2
60			2	-2	2	0	2
61		крок 2	X1	X2	X3	X4	bi
62			1	-1	1	0	1
63			0	0	-2	1	-1
64			0	0	2	1	1
65			0	0	-2	1	-1
66			0	0	0	0	0
67		крок 3	X1	X2	X3	X4	bi
68			1	-1	0	-0,5	0,5
69			0	0	0	2	0
70			0	0	1	0,5	0,5
71			0	0	0	2	0
72			0	0	0	0	0
73		Результати	X1	X2	X3	X4	bi
74			1	-1	0	0	0,5
75			0	0	0	0	0
76			0	0	1	0	0,5
77			0	0	0	1	0
78			0	0	0	0	0

Проаналізуємо результати останнього 3 кроку. Маємо три лінійно-незалежні рядки (перший, третій та четвертий), а це означає, що ранг основної матриці співпадає з рангом розширеної матриці та дорівнює 3. Отримане число менше кількості невідомих. Отже, система має безліч розв’язків. Користуючись результатами останнього кроку напишемо три кінцевих рівняння, а змінну x_2 вважатимемо будь-яким дійсним числом:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0{,}5; \\ x_2 \in R; \\ x_3 = 0{,}5; \\ x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + 0{,}5; \\ x_2 \in R; \\ x_3 = 0{,}5; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. $x_1 = x_2 + 0{,}5, x_2 \in R, x_3 = 0{,}5, x_4 = 0.$

<u>Приклад 4.</u> Розв’язати СЛР у полі R

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 4. \end{cases}$$

Розв’язування. Виконавши два кроки за методом Жордана –Гауса, отримаємо

Таблиця 5

J	K	L	M	N	O	P	Q
Приклад 4		X1	X2	X3	X4	X5	bi
	Крок 1	2	-1	3	-2	4	-1
		4	-2	5	1	3	2
		2	-1	1	8	-6	4
		X1	X2	X3	X4	X5	bi
	Крок 2	1	-0,5	1,5	-1	2	-0,5
		0	0	-1	5	-5	4
		0	0	-2	10	-10	5
		X1	X2	X3	X4	X5	bi
		1	-0,5	0	6,5	-5,5	5,5
		0	0	1	-5	5	-4
		0	0	0	0	0	-3

Результат другого кроку показує, що ранг основної матриці рівний 2, а ранг розширеної – 3. Тому система несумісна. Це добре видно з останнього рівняння $0 \cdot x_5 = -3$ не має розв’язків.

Відповідь. Система немає розв’язків.

<u>Приклад 5.</u> Розв’язати однорідну СЛР

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв’язування. Зауважимо, що однорідна система завжди має тривіальний (нульовий) розв’язок, а ненульовий лише тоді, коли головний визначник системи $\Delta = 0$. (Пропонуємо читачам пересвідчитися в цьому самостійно). Виконавши три кроки за методом Жордана –Гауса, отримаємо:

Таблиця 6

I	J	K	L	M	N	O
Приклад 5		X1	X2	X3	X4	bi
	Крок 1	1	-1	1	-1	0
		2	1	-1	1	0
		1	0	-1	2	0
		4	0	-1	2	0
	Крок 2	1	-1	1	-1	0
		0	3	-3	3	0
		0	-1	2	-3	0
		0	4	-5	6	0
	Крок 3	1	0	0	0	0
		0	1	-1	1	0
		0	0	1	-2	0
		0	0	-1	2	0
		X1	X2	X3	X4	bi
Результати		1	0	0	0	0
		0	1	0	-1	0
		0	0	1	-2	0
		0	0	0	0	0

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Отже система має безліч роз в'язків.

Відповідь. $x_1 = 0, x_2 = x_4\; x_3 = 2x_4, x_4 \in R.$

Використання програми Ms Excel дозволяє викладачу провести на практичному занятті експрес-контроль засвоєння студентами методу Крамера. Групі студентів пропонується одна система рівнянь (головний визначник цієї системи однаковий і не залежить від значення N). Наприклад,

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2N + 1, \\ x + 2y - z = N - 1, \\ -3x - 5y + Nz = -3N. \end{cases}$$

де N – це номер студента у списку. Тобто студенти мають різні варіанти цієї системи. Викладач, користуючись побудованою таблицею 7 для цієї системи, вносить у відповідну комірку (C1) значення N миттєво отримує проміжні обчислення та відповідь. Тобто, перевірка виконаних робіт займає незначний проміжок часу.

Таблиця 7

	A	B	C	D
1		N=	12	
2	**Метод Крамера розв'язування СЛР**			
3	2	4	1	25
4	1	2	-1	11
5	-3	-5	12	-36
6		x=	3	
7				
8	25	4	1	
9	11	2	-1	
10	-36	-5	12	
11			108	
12		y=	36	
13				
14	2	25	1	
15	1	11	-1	
16	-3	-36	12	
17			-36	
18			-12	
19				
20	2	4	25	
21	1	2	11	
22	-3	-5	-36	
23		z=	3	
24			1	

Пропонуємо читачам пересвідчитися у ефективності запропонованого підходу до розв'язання СЛР методом Жордана-Гауса .

Дослідить на сумісність системи лінійних рівнянь та у випадку позитивної відповіді знайти їх розв'язки.

а) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y+z=3, \\ x-y+2z=5, \\ 3x-6y+5z=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+x_3+x_4=-3, \\ x_3+x_4+x_5=2, \\ x_4+x_5=-1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4-9x_5=1. \end{cases}$

Висновки та перспективи подальших наукових досліджень.

В статті розглянуто розв'язання СЛР будь-якої розмірності з допомогою методу Жордана-Гауса та використання електронних таблиць Microsoft Office Excel.

Використання ІКТ для розв'язання математичних завдань забезпечує:

1) підвищення рівня підготовки студентів ЗВО з дисципліни «Вища математика»;

2) ознайомлення студентів із окремими інноваційними методами розв'язування систем лінійних рівнянь;

3) підвищення мотивації студентів до вивчення дисципліни;

4) формування вмінь і навичок розв'язувати навчально-тренувальні і професійноорієнтовані задачі;

5) навчання основам розв'язання задач з вищої математики в умовах інформатизації освіти;

6) підвищення обізнаності з питань застосування методів інформаційних технологій для вирішення широкого кола прикладних задач;

7) можливості самоконтролю, об'єктивного оперативного, поточного та підсумкового контролю навчальних досягнень;

8) забезпечення диференційованого та індивідуалізованого підходу;

9) підвищення ефективності організації самостійної роботи студентів.

Напрацьовану методику можна розповсюдити на деякі задачі матричного аналізу, задачі векторної алгебри, оптимізаційні задачі математичного програмування, до розв'язування систем лінійних нерівностей тощо.

Список використаних джерел

[1] Листопад В.В. Реалізація методу Жордана-Гауса з допомогою Ms Excel. Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Комп'ютерно-орієнтовні системи навчання. Київ, 2012. Вип.12 (19). С. 91 – 102.

[2] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І. А. Алгебра і теорія чисел: практикум: в 2-х частинах. Київ : Вища школа. Головне вид-тво, 1983. Ч. 1. 232 с.

References

[1] Lystopad V.V. Implementation of the Jordan-Gauss method using Ms Excel. Naukovyi chasopys NPU im. M.P. Drahomanova. Kompiuterno-oriientovni system navchannia. Kyiv, 2012. Vyp.12 (19). S. 91 – 102.

[2] Zavalo S.T., Levishchenko S.S., Pylaiev V.V., Rokytskyi I.A. Алгебра і теорія чисел : практикум : в 2-х частинах. Київ : Vyshcha shkola. Holovne vyd-tvo, 1983. Ch. 1. 232 s.

HOW TO USE MICROSOFT OFFICE EXCEL TO SOLVE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

Lystopad V.V.

Resume: The article shows how to use Microsoft Office Excel table tools to solve some problems in algebra and number theory. In particular, it presents the method of solving of system of linear equations using Gaussian (complete exclusion) elimination in Microsoft Office Excel table tools and presents advantages that this method has over traditional one. Author gives an example of Kronecker–Capelli theorem that answers the question about compatibly of the system of linear equations of any rank and gives the solution in case if the system is compatible. Author shows that Ms Excel is suitable for using Cramer's, Gaussian and elimination methods to solve a system of linear equations that helps to develop programming skills and to save a considerable amount of time.

Given the fact that the hours dedicated to the study of mathematics is being reduced, the importance of using IT is increasing in the process of learning of particular topics in high mathematics permit to diversify the way of studying, to rise student motivation, to give students a possibility to study new material by themselves in the short terms and an experience to be used in the work environment. The use of the computer during a lesson will multiply 4-5 times the amount of studied material and will

help dtudents to develop the capacities of programming, self-control and self-evaluation. The article admit that the use of computer technology helps to reduce the time teacher spent to prepare exercises and to grade student papers. The examples of such exercises are also given in the article.

This method of solving of systems of linear equations can also be used to some problem of matrix analysis, of vector algebra, of the problem of optimization in mathematical programming etc. It needs to be studied further.

Key Words: system of linear equations, Gaussian elimination, Cramer's rule

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЬЮТЕРНОЙ ПОДДЕРЖКОЙ

Листопад В.В.

Аннотация. В статье показана возможность применения электронных таблиц Microsoft Office Excel для решения некоторых задач из курсов алгебры и теории чисел, электротехники; представлен способ решения системы линейных уравнений (СЛР) с помощью метода Жордана-Гаусса (полного исключения) с использованием Ms Excel; определены преимущества применения данного метода над традиционными. Приведены примеры применения теоремы Кронекера-Капелли, которая дает ответ на вопрос о совместимости системы линейных уравнений любой размерности и ее решение при положительном ответе на вопрос совместимости. Раскрыты возможности, которые содержит программа Ms Excel для решения СЛР методами Крамера, Гаусса, преобразований (Жордана-Гаусса), которые проявляются в опосредованном формировании навыков программирования и в существенной экономии времени на выполнение этих задач.

Учитывая то, что в современном образовании прослеживается тенденция сокращения часов на изучение математических дисциплин, актуальным является внедрение информационных технологий в процесс изучения отдельных тем курса высшей математики, что позволит разнообразить формы и способы овладения новым содержанием; повысит мотивацию учебной деятельности студентов; позволит студентам в короткий срок самостоятельно обрабатывать материал и получить новые знания и опыт их применения для их дальнейшего использования в профессиональной деятельности. Применение компьютера на занятии в 4-5 раз увеличит объем изучаемого материала, будет способствовать формированию у студентов навыков элементов программирования, самоконтроля и проверки правильности результатов. В работе отмечено, что применение компьютерных технологий помогает экономить время преподавателя на подготовку самостоятельных работ и на их проверку; приведены образцы задач для самостоятельного выполнения.

Этот способ решения СЛР можно применить к некоторым задачам матричного анализа, векторной алгебры, задач оптимизации в математическом программировании и к решению систем линейных неравенств и др., что требует дальнейших научных исследований.

Ключевые слова: система линейных уравнений, метод Жордана-Гаусса, метод Крамера.