УДК 517.5

О. В. Островська (Український держ. ун-т харчових технологій, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИМИ СУМАМИ ЗИГМУНДА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$

Нехай L_p, $p \geq 1$, — простір 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$ із скінченною нормою $\|f\|_p$, де при $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)^p\, dt\right)^{1/p},$$

при $p = \infty$ $\quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f(t)|$, C — множина 2π-періодичних неперервних функцій $f(\cdot)$ з нормою

$$\|f\|_C = \max |f(t)|,$$

$\omega(f, \delta)$, $0 < \delta \leq \pi$, — модуль неперервності функцій $f \in C$, а H_ω — клас 2π-періодичних неперервних функцій, що задовольняють умову $|f(t) - f(t')| \leq \omega(|t - t'|)$, де $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Нехай

$$S[f] = \frac{a_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x) \qquad (1)$$

— ряд Фур'є функції $f \in L$, $S_n = S_n(f, x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$ — її суми Фур'є.

А. Зигмунд [1] ввів у розгляд лінійний метод підсумовування рядів Фур'є. Цей метод визначається за допомогою трикутної матриці чисел

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\} = \left\{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s\right\}, \quad k = \overline{1, n-1}, \; s > 0, \; \lambda_0^{(n)} = 1. \quad (2)$$

При цьому кожній функції $f \in L$ на основі її розкладу в ряд Фур'є (1) ставиться у відповідність послідовність тригонометричних поліномів вигляду

$$Z_n(f,\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f,x), \quad n = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Такі поліноми називаються сумами Зигмунда.

У випадку $f \in C$ послідовність $Z_n(f,\Lambda)$ рівномірно збігається. Апроксимативні властивості сум Зигмунда вивчались багатьма математиками (див., наприклад, [1–6]). В роботах [7–9] розглянуто аналог сум Зигмунда, в якому

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{\phi(n)}{\phi(k)}, \tag{4}$$

де $\phi(k)$ — значення в точках $k \in N$ деякої неперервної спадної функції $\phi(x)$. Такі узагальнені суми Зигмунда позначаються $Z_n^{\phi}(f,x)$.

Нехай $\psi(x)$, $x \geq 1$, — неперервна опукла вниз функція, що прямує до нуля при $x \to \infty$. Множину таких функцій позначимо $\mathfrak{M}$.

О.І. Степанець [10, 11] запропонував класифікацію функцій на основі їх перетворення Фур'є і позначив через L_β^ψ клас сумовних 2π-періодичних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \quad \beta \in R,$$

є рядом Фур'є деякої функції з L, яку він позначив f_β^ψ і назвав (ψ,β)-похідною функції $f(x)$. Якщо $f \in C$, а $f_\beta^\psi \in L_\infty$ і при цьому $\|f\|_\infty \leq 1$, то клас таких функцій позначимо $C_{\beta,\infty}^\psi$. Якщо ж $f_\beta^\psi \in H_\omega$, то позначимо його $C_\beta^\psi H_\omega$.

В роботі [10] за допомогою функції $\mu(\psi,x) = \frac{x}{\eta(x)-x}$, $\eta(x) = \psi^{-1}\left[\frac{1}{2}\psi(x)\right]$ (ψ^{-1} — функція, обернена до ψ) з множини $\mathfrak{M}$ виділено три класи функцій $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$, $\mathfrak{M}_\infty$: $\psi \in \mathfrak{M}_0$, якщо $0 < \mu(x) \leq k_1$; $\psi \in \mathfrak{M}_C$, якщо $k_2 < \mu(x) \leq k_3$, $k_1, k_2, k_3 = \mathrm{const}$; $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, якщо $\mu(x)$ монотонно зростає і необмежена зверху.

У випадку $\lambda_k = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^s$ поведінка відхилень верхніх меж

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,\infty}} |f - Z^\psi_n(f)|$$

достатньо повно вивчена в роботі [6]. У випадку сум Зигмунда, побудованих за допомогою матриці $\Lambda = \{\lambda^{(n)}_k\} = 1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}$, в [7, 8] встановлено, що при $\psi \in \mathfrak{M}_C$ порядок наближення сумами Зигмунда на класах $C_{0,\infty}$ співпадає з порядком найкращого наближення. У випадку $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ показано, що

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{0,\infty}, Z^\psi_n) = \sup_{f \in C^\psi_{0,\infty}} |\rho_n(f,x)| = O(1)\,\psi(n) \ln(\min(\mu(n), n)).$$

В роботі [9] вивчено поведінку $\mathcal{E}_n(C^\psi_{0,\infty}, Z^\psi_n)$ при виконанні умов опуклості (вгору, вниз) функції $\psi(x)/\phi(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} (\psi(x)/\phi(x)) = C$ або ∞ та $\psi \in \mathfrak{M}_C$. Зокрема, при виконанні умов $\lim\limits_{x\to\infty} (\psi(x)/\phi(x)) = C, \phi \in \mathfrak{M}_C$,

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \phi(n) \int\limits_1^n \frac{\psi(x)}{\phi(x)\,x}\,dx + O(1)\,\psi(n).$$

Таким чином, при $\phi(x) = \psi(x)$

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_n) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \psi(n) \ln n + O(1)\,\psi(n). \tag{5}$$

Якщо $\psi(t) = t^{-r}$, $t \geq 1$, $r > 0$, таку рівність отримано в [4].

В даній роботі вивчається поведінка величини $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n)$ у випадку $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Нехай $\lambda_n(v)$, $0 \le v \le 1$, $n = 1,\ldots,$ — послідовність функцій таких, що

$$\begin{aligned} \lambda_n\Big(\frac{k}{n}\Big) &= 1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}, \qquad k = 1,\ldots,n-1, \\ \lambda_n(v) &= \begin{cases} 1 - \dfrac{\psi(n)}{\psi(k)}, & \dfrac{1}{n} \le v \le 1, \\ 0, & v \ge 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

та

$$\tau_n(v,\psi) = \tau_g n(v) = \begin{cases} nv\,\psi(n), & 0 \le v \le \dfrac{1}{n}, \\ (1-\lambda_n(v))\psi(nv), & \dfrac{1}{n} \le v \le 1, \\ \psi(nv), & v \ge 1. \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки перетворення Фур'є

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau_n(v)\cos\Big(vt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv \tag{8}$$

функції $\tau_n(v)$ є сумовною функцією на числовій прямій (див. [6, 9, 11, 12]) то, як показано в [10], відхилення $\rho_n(f,x)$, $f \in C^\psi_\beta$, можна подати у вигляді

$$\rho_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta\Big(x + \frac{t}{n}\Big)\,\hat{\tau}_n(t)\,dt. \tag{9}$$

Крім того, у цьому випадку [11, с. 52]

$$\tau_n(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t)\cos\Big(vt + \frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dt. \tag{10}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\psi=\phi$. *Якщо* $\int\limits_{\pi/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\le K$, *то при* $n\to\infty$ $\quad\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n)=O(1)\,\psi(n)$; *якщо*

$$\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln\min(\mu(n),n)=o\Big(\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{t}\,dt\Big),$$

то

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n)=\frac{\theta}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\,\psi(n)\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{t}\,dt+$$

$$+O(1)\,\psi(n)\Big[1+\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln(\min(\mu(n),n))\Big],\quad \frac{1}{3}\le\theta\le 1.$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n)$ не залежить від x [11, с. 78], то $\rho_n(f,x,Z^\psi_n)$ розглядаємо в точці $x=0$.

Запишемо

$$\rho_n(f,0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big[\int\limits_{0}^{1/n}nv\,\psi(n)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv+$$

$$+\psi(n)\int\limits_{1/n}^{1}\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv+\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nv)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big]\,dt,\qquad(11)$$

де $\Phi\big(\frac{t}{n}\big)=f^\psi_\beta\big(\frac{t}{n}\big)-f^\psi_\beta(0)$.

Надалі будемо використовувати оцінки, одержані в [11, с. 98, 99, 106, 108].

З (11), використовуючи оцінку

$$\Big|\int\limits_{0}^{\mu}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nv)\cos vt\,dv\,dt\Big|=O(1)\,\psi(n)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

одержуємо

$$\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{0\le|t|\le\pi}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\hat{r}(t)\,dt\Big| = 2\psi(n)\,\omega\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \qquad (12)$$

Проінтегрувавши частинами, маємо

$$\frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\hat{r}_n(t)\,dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Big(\frac{n\,\psi(n)}{t^2}\Big(\cos\Big(\frac{t}{n}+\frac{\beta\pi}{2}\Big)-\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+\psi(n)\,\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}+\int\limits_1^\infty\psi(nv)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big)\,dt\Big| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big(-\frac{n\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\,2\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2}-$$

$$-\frac{\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}\,n\,\psi(n)}{t^2}+\psi(n)\,\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}+$$

$$+\int\limits_1^\infty\psi(nv)\cos\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Big)\,dt\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big(-\frac{n\,\psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}\,2\sin^2\frac{t}{2n}}{t^2}-$$

$$-\frac{\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}\,n\,\psi(n)}{t^2}+\psi(n)\,\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}\Big)\,dt\Big|+$$

$$+K_1\,\psi(n)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big); \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\pi}\Bigg|\int\limits_{|t|\geq\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\hat{r}(t)\,dt\Bigg|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Bigg|\int\limits_{|t|\geq\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\Bigg(n\,\psi(n)\,\frac{-\cos\frac{\beta\pi}{2}2\sin^2\frac{t}{2n}-\sin\frac{\beta\pi}{2}\sin\frac{t}{n}}{t^2}-$$

$$-\frac{n}{t}\int\limits_1^{\infty}\psi'(nv)\sin\Big(vt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\,dv\Bigg)\,dt\Bigg|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Bigg|\int\limits_{|t|\geq\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\Bigg(\frac{n\,\psi(n)}{t^2}\Big(-\cos\frac{\beta\pi}{2}\,2\sin^2\frac{t}{2n}-$$

$$-\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big)\Bigg)\Bigg|\,dt+O(1)\,\psi(n)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big).\qquad(14)$$

Отже,

$$\rho_n(f,0)=\frac{1}{\pi}\Bigg(\int\limits_{|t|>\pi}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\Bigg(\frac{n\psi(n)}{t^2}\Big(-2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{t}{2n}-\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big)+$$

$$+\psi(n)\int\limits_{\pi\leq|t|\leq\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}\,dt\Bigg)+O(1)\,\psi(n)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,n\,\psi(n)\int\limits_{\pi\leq|t|\leq\frac{\pi n}{2}}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\frac{-2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{t}{2n}-\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{n\psi(n)}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\frac{\pi n}{2}}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{-2\cos\frac{\beta\pi}{2}\sin^2\frac{t}{2n}-\sin\frac{t}{n}\sin\frac{\beta\pi}{2}}{t^2}\,dt+$$

$$+\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\pi\leq|t|\leq\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}\,dt+O(1)\,\psi(n)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big);\qquad(15)$$

$$\frac{n\,\psi(n)}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\frac{\pi n}{2}}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\sin^2\frac{t}{2n}\,dt\Big| = \frac{\psi(n)}{\pi}\Big(\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\,dt\Big| \le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\,\frac{\psi(n)}{\pi}\,\omega\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = O(1)\,\psi(n); \tag{16}$$

$$\frac{n\psi(n)}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\frac{\pi n}{2}}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}\,dt\Big| = \frac{\psi(n)}{\pi}\Big|\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,\frac{\sin t - t}{t^2}\,dt\Big| +$$

$$+\frac{\psi(n)}{\pi}\Big|\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,\frac{1}{t^2}\,dt\Big| =$$

$$= O(1)\,\psi(n) + \frac{\psi(n)}{\pi}\Big|\int_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,\frac{1}{t}\,dt\Big|. \tag{17}$$

В результаті одержимо

$$\rho_(f,0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi\le|t|\le\mu(n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\frac{\sin\Big(t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)}{t}\,t-$$

$$-\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}\,\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\frac{\Phi(t)}{t}\,dt + O(1)\,\psi(n). \tag{18}$$

Розглянемо два випадки: $\mu(n)\le n$ і $\mu(n)>n$.

Якщо $\mu(n)>n$, то в роботі О.І. Степанця [11, с. 111], у випадку періодичних функцій показано, що

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\ge n}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}\,dt\Big| = O(1)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{19}$$

Отже, із співвідношень (12)–(18) одержуємо

$$\rho_n(f,0)=\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{\pi\le|t|\le\min(\mu(n),n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}\,dt-$$

$$-\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\,\psi(n)\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\,\frac{1}{t}\,dt+O(1)\,\psi(n);\qquad(20)$$

Таким чином,

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega},Z^{\psi}_n)\le\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}}\frac{\psi(n)}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\min(\mu(n),n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}dt\Big|+$$

$$+\psi(n)\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}}\Big|\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\Big|\Big|\int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}}\frac{\Phi(t)}{t}\,dt\Big|+O(1)\,\psi(n).\qquad(21)$$

В роботі [11] показано, що

$$\sup\frac{\psi(n)}{\pi}\Big|\int\limits_{\pi\le|t|\le\min(\mu(n),n)}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\sin\big(t+\frac{\beta\pi}{2}\big)}{t}\,dt\Big|=\qquad(22)$$

$$=\frac{2\theta\,\psi(n)}{\pi^2}\ln(\min(\mu(n),n))\int\limits_0^{\pi/2}\omega\Big(\frac{2t}{n}\Big)\sin t\,dt+O(1)\,\psi(n)\,\omega\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Далі маємо

$$\Big|\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/n}\frac{\Phi(t)}{t}\,dt+\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\Phi(t)}{t}\,dt\Big|=\Big|\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\Phi(t)-\Phi(-t)}{t}\,dt\Big|\le\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{t}\,dt.$$

Як відомо [11, с. 57, 58, 84, 85], якщо $\omega(t)$ є опуклою функцією, то

$$\phi_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\omega(2t), & 0\le t\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\,\omega(2(\pi-t)), & \frac{1}{2}\le t\le\pi,\\ \phi_1(-t)=-\phi_1(t), & \\ \phi_1(t+2\pi)=\phi_1(t) & \end{cases}$$

належить класу H_ω.

Якщо ж $\omega(t)$ є загальним модулем неперервності, то $\phi_2(t) = = \frac{2}{3}\phi_1(t) \in H_\omega$. Тому

$$\frac{1}{3}\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt \le \sup_{\substack{\Phi\in H_\omega\\ \Phi(-t)=-\Phi(t)}} \Bigg| \int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(t)}{t}\,dt\Bigg| \le \int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt.$$

Таким чином,

$$\sup_{\Phi(t)\in H_\omega}\Bigg| \int\limits_{\frac{\pi}{n}\le|t|\le\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(t)}{t}\,dt\Bigg| = \theta\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt, \qquad \frac{1}{3}\le\theta\le 1.$$

Якщо $\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt \le K$, то $\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n \le K$. Дійсно,

$$\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt \ge \omega\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{1}{t}\,dt = \omega\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)\,\ln n - \omega\Big(\frac{2\pi}{n}\Big)\ln 2.$$

В цьому випадку з співвідношень (21), (22) випливає $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n) = O(1)\,\psi(n)$.

Якщо ж

$$\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln(\min(\mu(n),n)) = o\Big(\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt\Big),$$

то

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n) = \frac{\theta}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\,\psi(n)\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\,dt +$$

$$+\,O(1)\,\psi(n)\,\Big[1+\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\ln(\min(\mu(n),n))\Big].$$

що і доводить теорему.

1. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke math. J. — 1945. — **12**, N 4. — P. 695–704.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1945.— **15**.— С. 1–76.
3. *Nagy B.* Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Furierschen Reihen // Mat. es Fis. Japok. — 1942. — **19**. — P. 123–138.
4. *Теляковский С.А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближений дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **62**. — С. 61–97.
5. *Степанец А.И.* Асимптотические представления уклонений средних Зигмунда от дифференцируемых периодических функций // Методы теории приближений и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1962. — С. 96–116.
6. *Бушев Д.Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. — Киев, 1984. — 62 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
7. *Гаврилюк В.Т.* О характеристике класа насыщения $C_0^{\psi} L_{\infty}$ // Укр. мат. журн. — 1986. — **38**, № 4. — С. 421–427.
8. *Гаврилюк В.Т.* О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье // Там же. — 1988. — **38**, № 5. — С. 569–576.
9. *Ковальская И.Б.* Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C. — Киев, 1988. — 28 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.14).
10. *Степанец А.И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. — Киев, 1983. — 57 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
11. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987. — 287 с.
12. *Рукасов В.И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье. — Киев, 1983. — 54 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
13. *Островская О.В.* Приближение классов непрерывных периодических функций обобщенными суммами Зигмунда // Исследования по теории приближения функций. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. — С. 57–71.
14. *Корнійчук М.П.* Про екстремальні властивості періодичних функцій // Доп. АН УРСР. — 1962. — № 8. — С. 993–997.
15. *Островская О.В.* Приближение классов периодических функций обобщенными суммами Зигмунда в метрике C // Ряды Фурье: теория и приложения. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 69–87.