КЛАСИФІКАЦІЯ МАКСИМАЛЬНИХ ПІДАЛГЕБР РАНГУ n КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ $AC(1, n)$

We obtain the complete classification of I-maximal subalgebras of rank n of the conformal algebra $AC(1, n)$.

Одержана повна класифікація I-максимальних підалгебр рангу n конформної алгебри $AC(1, n)$.

Вступ. Відомо, що існує багато нелінійних рівнянь теоретичної і математичної фізики, інваріантних відносно групи $C(1, n)$ конформних перетворень простору Мінковського $R_{1,n}$. Тому питання редукції і класифікації інваріантних розв'язків таких рівнянь тісно пов'язані з задачею дослідження підгрупової структури групи $C(1, n)$. Оскільки вивчення зв'язних підгруп групи Лі $C(1, n)$ зводиться до вивчення підалгебр відповідної алгебри Лі $A\,C(1, n)$, то приходимо до задачі класифікації підалгебр алгебри $A\,C(1, n)$. Підалгебри алгебри $A\,C(1, n)$ для невеликих розмірностей n вивчалися в ряді робіт (див. [1] і цитовану там літературу), в яких класифікація підалебр проводилась з точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів. На основі цієї класифікації неважко зробити класифікацію підалгебр за рангами.

В даній роботі запропоновано принципово новий метод класифікації підалгебр алгебри $A\,C(1, n)$ довільної розмірності n за рангами, який не вимагає при цьому повної класифікації підалгебр алгебри $A\,C(1, n)$.

1. Реалізація конформної алгебри $AC(1, n)$. Нехай $R_{1,n}$ $(n \geq 2)$ — простір Мінковського з метрикою $g_{\alpha\beta}$, де $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n)$; $g_{00} = -g_{11} = \ldots = -g_{nn} = 1$. Відображення $x_i = x_i(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ області $U \subset R_{1,n}$ називається конформним, якщо

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} g^{ki} \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} = \lambda(x) g_{\alpha\beta},$$

де $\lambda(x) \neq 0$; $x = (x_0, \ldots, x_n)$. Згідно з теоремою Ліувілля конформне перетворення є композицією руху, дилатації і інверсії або композицією руху і дилатації. Під рухами розуміють елементи псевдоортогональної групи $O(1, n)$ і зсуви (трансляції) T_a; $x \to x + a$, а під дилатаціями (розтягами) — відображення $\lambda \to \lambda x$ $(\lambda \in R;\ \lambda > 0)$, а інверсіями називають відображення

$$\hat{S} : x \to \left(\frac{x_0}{x^2}, \frac{x_1}{x^2}, \ldots, \frac{x_n}{x^2} \right) \quad \text{або} \quad \hat{S} T_a,$$

де $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$.

Алгебра Лі $A\,C(1, n)$ групи $C(1, n)$ конформних перетворень простору $R_{1,n}$ породжується векторними полями [1]:

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$
\begin{aligned}
J_{0a} &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad J_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b}, \\
D &= -x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad K_\alpha = 2 g_\alpha^\beta x_\beta x_\upsilon \frac{\partial}{\partial x_\upsilon} g^{\beta^\upsilon} x_\beta x_\upsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha},
\end{aligned} \tag{1}
$$

де $\alpha = 0, 1, \ldots, n$; $a, b = 0, 1, \ldots, n$. Ці генератори задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$
\begin{gathered}
[J_{\alpha\beta}, J_{\upsilon\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\upsilon} - g_{\alpha\upsilon} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\upsilon} + g_{\beta\upsilon} J_{\alpha\delta}; \\
[P_\alpha, J_{\beta\upsilon}] = g_{\alpha\beta} P_\upsilon - g_{\alpha\upsilon} P_\beta; \qquad [P_\alpha, P_\beta] = 0; \\
[K_\alpha, J_{\beta\upsilon}] = g_{\alpha\beta} K_\upsilon - g_{\alpha\upsilon} K_\beta; \\
[K_\alpha, K_\beta] = 0; \qquad [D, P_\alpha] = P_\alpha; \qquad [D, K_\alpha] = -K_\alpha; \\
[D, J_{\alpha\beta}] = 0; \qquad [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta} D - J_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta, \upsilon, \delta = 0, 1, \ldots, n).
\end{gathered}
$$

Нехай $O(2, n+1)$ — група ізометрій псевдоевклідового простору $R_{2,n+1}$ з метрикою ρ_{ab} $(a, b = 1, 2, \ldots, n+3)$, де $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \ldots = -\rho_{n+3,n+3} = 1$, $\rho_{ab} = 0$ при $a \neq b$. Позначимо через I_{ab} матрицю порядку $n+3$, яка має одиницю на перетині a-го рядку і b-го стовпця, і нулі на всіх решта місцях $(a, b = 1, \ldots, n+3)$. Базис алгебри $AO(2, n+1)$ утворюють матриці

$$
\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}, \qquad \Omega_{ab} = -I_{ab} - I_{ba} \ (a < b;\ a, b = 3, \ldots, n+3),
$$

$$
\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai} \ (i = 1, 2;\ a = 3, \ldots, n+3).
$$

Вони пов'язані між собою такими комутаційними співвідношеннями:

$$
[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac},
$$

де $a, b, c, d = 1, \ldots, n+3$. Алгебра $AO(2, n+1)$ діє в псевдоевклідовому просторі $R_{2,n+1}$, який складається з $(n+3)$-мірних стовпців, способом множення стовпця $X \in R_{2,n+1}$ зліва на матрицю $A \in AO(2, n+1)$. Базис $R_{2,n+1}$, елементи якого є одиничні стовпці, позначимо через $\{Q_1, \ldots, Q_{n+3}\}$. Відображення $f\colon AO(2, n+1) \to AC(1, n)$ алгебри Лі $AO(2, n+1)$ на алгебру Лі $AC(1, n)$, яке задається за допомогою співвідношень

$$
\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} &= f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}), \qquad P_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,n+3}), \\
K_\alpha &= f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,n+3}), \qquad D = -f(\Omega_{1,n+3}),
\end{aligned} \tag{2}
$$

є ізоморфізмом. Тому $AO(2, n+1)$ і $AC(1, n)$ можна ототожнювати. В результаті одержуємо два набори позначень для одного і того ж базиса:

$$
\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta}, \qquad \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha),
$$

$$
\Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha), \qquad \Omega_{1,n+3} = -D \quad (\alpha < \beta;\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n). \tag{3}
$$

Задача класифікації підалгебр алгебри $AC(1, n)$ з точністю до $C(1, n)$-спряженості рівносильна задачі класифікації підалгебр алгебри $AO(2, n+1)$ з точністю до $O(2, n+1)$-спряженості. Це означає, що якщо Φ_1 — повний список $C(1, n)$-неспряжених підалгебр алгебри $AC(1, n)$, то, замінивши генератори в кожній підалгебрі $L \in \Phi_1$ відповідними генераторами алгебри

$AO(2, n+1)$ згідно із співвідношенням (3), одержимо повний список Φ_2 $O(2, n+1)$-неспряжених підалгебр алгебри $AO(2, n+1)$, і навпаки.

Група $O(2, n+1)$ породжує дію алгебри $AO(2, n+1)$ на просторі $R_{2,n+1}$. Це дозволяє множину всіх підалгебр алгебри $AO(2, n+1)$ розбити на три класи:

1) **перший клас** складається із всіх підалебр, які не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів;

2) **другий клас** складається із підалебр, які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності одиниця. Це підалгебри, які спряжені з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$, що породжена генераторами P_α, $J_{\alpha\beta}$, D, де $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n$. Прикладом підалгебри алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ є класична алгебра Галілея $A\tilde{G}(1, n)$, породжена генераторами P_a, $\tilde{G}_a$, M, T, J_{ab}, де

$$G_a = J_{oa} - J_{an}, \quad M = P_0 - P_n,$$

$$T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n) \quad (a < b;\ a, b = 1, \ldots, n-1);$$

3) **третій клас** складають підалебри, які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності два і не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів розмірності одиниця. Нехай $AOpt(1, n)$ — підалгебра алгебри $AC(1, n)$, породжена генераторами M, P_a, G_a, J_{ab}, C, S, T, Z $(a < b$ і $a, b = 1, \ldots, n-1)$ де

$$G_a = J_{oa} - J_{an}, \quad C = -(J_{on} + D),$$

$$Z = J_{on} - D, \quad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n).$$

Цей клас складають ті підалгебри алгебри $AOpt(1, n)$, які не спряжені з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1, n)$.

В даній роботі будемо використовувати такі позначення:

$$AO[r, s] = \langle J_{ab},\ a, b = r, \ldots, s \rangle;$$

$$AE[r, s] = \langle P_r, \ldots, P_s \rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO[r, s];$$

$$AE_1[r, s] = \langle G_r, \ldots, G_s \rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO[r, s];$$

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \ldots, G_s + \gamma P_s \rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} AO[r, s],$$

де $r \le s$, $\gamma \in R$. Позначимо через $d_1 \ldots d_t$ натуральні числа, які задовольняють співвідношення $0 = d_1 < \ldots < d_t = m \le n$.

2. І-максимальні підалгебри алгебри конформної алгебри $AC(1, n)$. Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних порядку s

$$F(u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0, \tag{4}$$

де $u = u(x)$, $x \in R_{1,n}$; $\underset{m}{u}$ — сукупність частинних похідних m-го порядку.

Нехай AG — алгебра Лі групи Лі G, яка є алгеброю інваріантності рівняння (4). Будемо передбачати також, що рівняння (4) інваріантне відносно групи G. Якщо H — довільна s-параметрична підгрупа групи G і $u = u(x)$ — H-інваріантний розв'язок рівняння (4), то під дією перетворення $g \in G$ розв'язок $u =$

$= u(x)$ переходить в gHg^{-1}-інваріантний розв'язок рівняння (4). Таким чином, задача класифікації H-інваріантних розв'язків рівняння (4) зводиться до задачі класифікації s-параметричних підгруп групи G з точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів.

Відношення спряженості є відношенням еквівалентності на множині всіх s-параметричних підгруп групи G, тому воно розбиває множини всіх таких підгруп на класи. До одного класу належать ті і тільки ті підгрупи групи G, які спряжені між собою відносно групи внутрішніх автоморфізмів. Взявши по одному представнику з кожного класу еквівалентності, одержимо систему підгруп, попарно не спряжених між собою. Така система підгруп називається оптимальною системою s-параметричних підгруп групи G. Внаслідок відповідності між зв'язними підгрупами групи G і підгрупами алгебри Лі AG системі s-параметричних підгруп відповідає система s-мірних підалгебр алгебри AG і позначається θ_s [2]. Для алгебр Лі невеликих розмірностей побудувати оптимальну систему підалгебр порівняно неважко. Але, на жаль, скласти список всіх G-неспряжених підалгебр алгебри Лі AG великої розмірності практично неможливо.

Подолати це можна таким чином. Відомо, що важливою числовою характеристикою H-інваріантного розв'язку $u = u(x)$ є його ранг $n - r*$, де $r*$ — ранг підгрупи H. Ранг $n - r*$ може приймати значення $0, 1, \ldots, n-1$. Тому класифікацію підалгебр алгебри AG зручно проводити за рангами $r* = 1, 2, \ldots, n$. Дві підалгебри L_1 і L_2 алгебри AG, які мають один і той же ранг, можуть визначати несуттєво різні множини S_1 і S_2 розв'язків рівняння (4), тобто такі, які переводяться одна в одну деякими перетвореннями з групи G. Це буде, наприклад, в тому випадку, коли множина інваріантів підалгебри L_1 переводиться в множину інваріантів підалгебри L_2 деяким перетворенням з групи G. Тому дві підалгебри $L_1, L_2 \subset AG$ доцільно назвати еквівалентними, якщо існує такий елемент $g \in G$, що gL_1g^{-1} і L_2 мають одні і ті ж інваріанти. Відношення еквівалентності є більш сильним, ніж відношення спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів. Воно розбиває множини всіх підалгебр алгебри AG на класи еквівалентних між собою підалгебр. В множині всіх підалгебр, які мають одні і ті ж інваріанти, існує одна (максимальна) підалгебра, яка містить всю решту підалгебр з цією властивістю. Таку підалгебру будемо називати I-максимальною підалгеброю алгебри AG. Дві I-максимальні підалгебри алгебри AG еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони спряжені. Таким чином, основною метою класифікації підалгебр алгебри AG інваріантності диференціального рівняння є задача перерахування всіх I-максимальних підалгебр даного рангу з точністю до спряженості. I-максимальні підалгебри мають порівняно просту структуру, їх кількість значно менша, ніж кількість неспряжених підалгебр. Дійсно, розглянемо такі підалгебри конформної алгебри $AC(1, n)$:

$$L_1 = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[1, n];$$

$$L_2 = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ F,$$

де F — довільна підалгебра алгебри $AO[1, n]$. Оскільки L_1 і L_2 мають одні і ті ж інваріанти, то вони еквівалентні. Підалгебра L_1 є I-максимальною в алгебрі $AC(1, n)$ і її структура значно простіша від структури підалгебри L_2. В той же час опис всіх неспряжених підалгебр вигляду $\langle P_1, \ldots, P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ F$, де $F \subset AO[1, n]$, викликає вже значні труднощі.

При дослідженні I-максимальних підалгебр конформної алгебри $AC(1, n)$ використаємо метод [3 – 5], який дозволяє описати I-максимальні підалгебри

алгебри Лі групи перетворень псевдоевклідового простору $R_{1,n}$. За допомогою цього методу була проведена, зокрема, класифікація I-максимальних підалгебр рангу n і $n-1$ алгебри Пуанкаре $AP(1, n)$ [3, 6], а також класифікація I-максимальних підалгебр рангу n і $n-1$ розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1, n)$ [3, 4]. Цей метод придатний для описання I-максимальних підалгебр конформної алгебри $AC(1, n)$ і не залежить від реалізації цієї алгебри інфінітезимальними операторами першого порядку.

3. Підалгебри першого класу. Підалгебри різних класів неспряжені відносно групи $C(1, n)$-автоморфізмів і кожен з них інваріантний при дії будь-якого автоморфізма. Тому доцільно класифікувати підалгебри кожного класу окремо. При цьому виключимо з розгляду ті підалгебри алгебри $AC(1, n)$, які з точністю до спряженості містять $P_0 + P_n$ або P_0.

Теорема 1. *Нехай* L — *максимальна підалгебра рангу* n *алгебри* $AC(1, n)$ *першого класу і* $L \cap V \subset \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. *Тоді* L $C(1, n)$-*спряжена з однією з наступних алгебр*:

1) $L_1 = \langle K_1 - P_1 \rangle$, *якщо* $n = 1$;

2) $L_2 = \langle K_1 - P_1, \dots, K_n - P_n \rangle \subset\!\!\!\!+ AO[1, n]$, *якщо* $n > 1$;

3) $L_3 = \langle P_0 + K_0 \rangle$, *якщо* $n = 1$;

4) $L_4 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n]$, *якщо* $n \geq 2$;

5) $L_5 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n-1] \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$;

6) $L_6 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, t-2] \oplus$

$\oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \subset\!\!\!\!+ AO[t-1, n])$, $t = 4, \dots, n$; $n \geq 4$;

7) $L_7 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \subset\!\!\!\!+ AO[1, t-2]) \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = 0, t-1, \dots, n \rangle$, $t = 4, \dots, n+1$, $n \geq 4$;

8) $L_8 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \subset\!\!\!\!+ AO[1, t-2]) \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = 0, t-1, \dots, n-1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $t = 4, \dots, n-1$, $n \geq 5$;

9) $L_9 = (\langle P_1 + K_1, \dots, P_{t-2} + K_{t-2} \rangle \subset\!\!\!\!+ AO[1, t-2]) \oplus$

$\oplus \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = 0, t-1, \dots, t+s-2 \rangle \oplus$

$\oplus (\langle K_{t+s-1} - P_{t+s-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \subset\!\!\!\!+$

$\subset\!\!\!\!+ \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = n+s-1, \dots, n \rangle)$, $t = 4, \dots, n-2$, $s = 2, \dots, n-t$, $n \geq 6$;

10) $L_{10} = \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$;

11) $L_{11} = \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = 0, 1, \dots, t-2 \rangle \oplus$

$\oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1}, \dots, K_n - P_n \rangle \subset\!\!\!\!+ \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha < \beta;\ \alpha, \beta = t-1, \dots, n \rangle)$,

$t = 4, \dots, n$, $n \geq 4$;

12) $L_{12} = \langle P_0 + K_0 + \alpha(K_1 - P_1) \rangle$, $0 < \alpha < 1$, $n = 1$;

13) $L \oplus AO(2, k_1)$, *де* L *— незвідна I-максимальна підалгебра рангу* $k_2 - 2$ *алгебри* $AO(k_2)$, $k_1 + k_2 = n + 1$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 3$;

14) $\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle$.

Доведення. Позначимо через $Q_1, \ldots, Q_{n+3}$ ортогональний базис псевдоевклідового простору $R_{2,n+1}$, який задовольняє умови: $(Q_1, Q_1) = 1$, $(Q_2, Q_2) = 1$, $(Q_3, Q_3) = -1, \ldots, (Q_{n+3}, Q_{n+3}) = -1$. Тут (Q_i, Q_j) — скалярний добуток векторів Q_i і Q_j $(i, j = 1, \ldots, n+3)$. Нехай L — деяка підалгебра рангу n алгебри $AO(2, n+1)$ з першого класу і

$$R_{2,n+1} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$$

є розкладом простору $R_{2,n+1}$ в пряму ортогональну суму незвідних L-підпросторів. Якщо $s = 1$, то L є незвідною підалгеброю алгебри $AO(2, n+1)$. У випадку, коли $n + 1$ — непарне число і $n + 1 > 3$, незвідна підалгебра L алгебри $AO(2, n+1)$ збігається з $AO(2, n+1)$ [7]. Оскільки ранг алгебри $AO(2, n + 1)$ дорівнює $n + 2$, а ранг підалгебри L дорівнює n, то розглянутий випадок неможливий. Якщо $n + 1 = 3$, то незвідна підалгебра L алгебри $AO(2, 3)$ спряжена з підалгеброю [7]

$$\left\langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45} \right\rangle,$$

а значить, ранг підалгебри L дорівнює 3, що також неможливо. Якщо $n + 1 = 2k$ — парне число, то L спряжена з одною з таких алгебр [7]: 1) $AO(2, n+1)$; 2) $ASU(1, k)$; 3) $AS(1, k) \oplus \langle Z \rangle$. У всіх трьох випадках ранг підалгебри L відмінний від n. Тому в (5) $s \geq 2$. Припустимо, що в розкладі (5) існують два одномірні підпростори V_1 і V_2, які мають різні сигнатури. Можна припустити при цьому, що $V_1 = \langle Q_1 \rangle$ і $V_2 = \langle Q_3 \rangle$. Але тоді $V_1 \oplus V_2$ містить L-інваріантний ізотропний підпростір $\langle Q_1 + Q_3 \rangle$ або $\langle Q_1 - Q_3 \rangle$, а це неможливо.

Припустимо, що $V_1 = \langle Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_t \rangle$, де $t \geq 3$, і $L = L_1 + \ldots + L_s$ — розклад алгебри L в пряму суму незвідних підалгебр $L_1, \ldots, L_s$. В цьому випадку L_1, як незвідна підалгебра алгебри $AO(V_1)$, виділяється прямим доданком в алгебрі L [1]. Отже, L містить підалгебру $\langle \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23} \rangle$, яка спряжена з $\langle \Omega_{12}, \Omega_{1,n+3}, \Omega_{2,n+3} \rangle$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle P_0, K_0, D \rangle$, а це неможливо, оскільки за умовою $P_0 \notin L$.

Нехай в розкладі (5) $s = 3$. З наведених вище досліджень і на основі теореми Віта можна вважати, що розклад (5) простору $R_{2,n+1}$ є одним з наступних:

1) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \ldots, Q_{n+3} \rangle$;

2) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3 \rangle \oplus \langle Q_4 \rangle$, $n = 1$;

3) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \ldots, Q_{n+2} \rangle \oplus \langle Q_{n+3} \rangle$, $n \geq 2$;

4) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \ldots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle$, $n \geq 3$;

5) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3, \ldots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_{t+1}, \ldots, Q_{n+3} \rangle$, $t = 4, \ldots, n$; $n \geq 4$;

6) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \ldots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \ldots, Q_{n+2} \rangle \oplus \langle Q_{n+3} \rangle$,

$t = 4, \ldots, n+1$; $n \geq 4$;

7) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \ldots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \ldots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle,$

$t = 4, \ldots, n-1;\ n \geq 5;$

8) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \ldots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \ldots, Q_{t+s} \rangle \oplus \langle Q_{t+s+1}, \ldots, Q_{n+3} \rangle,$

$t = 4, \ldots, n-2;\ s = 2, \ldots, n-t;\ n \geq 6;$

9) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2, Q_3, \ldots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle,\ n \geq 3;$

10) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2, Q_3, Q_4, \ldots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_{t+1}, \ldots, Q_{n+3} \rangle,$

$t = 4, \ldots, n;\ n \geq 4.$

У випадку 1 $L = \langle \Omega_{34}, \ldots, \Omega_{n+2,n+3} \rangle = AO[3, n+3]$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle K_1 - P_1 \rangle$, якщо $n = 1$, і $\langle K_1 - P_1, \ldots$ $\ldots, K_n - P_n \rangle \supset\!\!\!+ AO[1, n]$, якщо $n > 1$. У випадку 2 $L = \langle K_0 - P_0 \rangle$. Якщо маємо розклад 3, то одержуємо підалгебру $L = \langle \Omega_{12} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \ldots, \Omega_{n+1,n+2} \rangle$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO(1, n)$, $n \geq 2$. У випадку 4 $L = \langle \Omega_{12} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \ldots, \Omega_{n,n+1} \rangle \oplus \langle \Omega_{n+2,n+3} \rangle$, а значить, їй відповідає підалгебра $\langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1, n-1] \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$. Якщо маємо розклад 5, то алгебра L належить до виду 6 теореми 1. У випадку 6 одержуємо таку підалгебру алгебри $AO(2, n+1)$:

$$L = \langle \Omega_{13}, \ldots, \Omega_{1t}, \Omega_{34}, \ldots, \Omega_{t-1,t} \rangle \oplus \langle \Omega_{2,t+1}, \ldots, \Omega_{2,n+2}, \ldots, \Omega_{n+1,n+2} \rangle.$$

Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра виду 4 теореми 1. Решту випадків 7 – 10 розглядають аналогічно.

Нехай далі в розкладі 5 маємо $s = 2$. Підалгебра L є підпрямою сумою двох незвідних підалгебр L_1 і L_2, де $L_1 \subset AO(V_1)$, $L_2 \subset AO(V_2)$. Якщо $n = 1$, то $L = \langle P_0 + K_0 + \alpha(K_1 - P_1) \rangle$, $0 < \alpha < 1$. Якщо $n > 1$ і підалгебри L_1 і L_2 — неізоморфні, то $L = L_1 \oplus L_2$. При цьому можна вважати, що ранг підалгебри L_1 дорівнює $\dim V_1 - 2$, а ранг підалгбери L_2 дорівнює $\dim V_2 - 1$. Таким чином, підалгебра L відноситься до виду 13 теореми 1. Якщо підалгебри L_1 і L_2 ізоморфні, то $L \neq L_1 \oplus L_2$. В цьому випадку $L_1 = AO(V_1) \cong AO(V_2) = L_2$. Можна припустити, що $V_1 = \langle Q_1, Q_3, \ldots, Q_t \rangle$, $V_2 = \langle Q_2, Q_{t+1}, \ldots, Q_{n+3} \rangle$. Оскільки ранг підалгебри L дорівнює $t-1$, то $t = 1 + n$. Отже, $n = 3$, а тому $L = \langle \Omega_{13} + \Omega_{25}, \Omega_{14} + \Omega_{16}, \Omega_{34} + \Omega_{56} \rangle$. Відповідною підалгеброю алгебри $AC(1, n)$ є підалгебра $\langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle$. Теорему доведено.

4. Підалгебри другого класу. Максимальні підалгебри рангу n алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ з точністю до $\tilde{P}(1, n)$-спряженості класифіковані в [4]. Оскільки конформна спряженість більш сильна спряженість, то тут виникає задача класифікації підалгебр алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ з точністю до $C(1, n)$-спряженості. Дослідження підалгебр алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ на спряженість відносно групи $C(1, n)$-автоморфізмів було проведено в [8]. З цих результатів, зокрема, випливає: якщо L_1 і L_2 — дві довільні підалгебри алгебри $A\tilde{P}(1, n)$ спряжені відносно групи $C(1, n)$-автоморфізмів, то $L_1 = \varphi(L_2)$, де $\varphi = \varphi_h \varphi_1$, φ_1 є $\tilde{P}(1, n)$-автоморфізмом, а φ_h є $C(1, n)$-автоморфізмом, визначеним елементом

$$h = \exp\frac{\pi}{4}(K_0 + P_0 + K_n - P_n).$$

Автоморфізм φ_h є автоморфізмом алгебри $\langle P_0 + P_n, P_a, G_a, J_{ab}, J_{on}, D \rangle$ $(a < b;$ $a, b = 1, 2, \ldots, n-1)$ і діє на її елементи таким чином:

$$hG_a h^{-1} = P_a, \quad hP_a h^{-1} = -G_a, \quad hJ_{on}h^{-1} = D,$$

$$hDh^{-1} = -J_{on}, \quad hMh^{-1} = M, \quad hJ_{ab}h^{-1} = J_{ab}.$$

Застосовуючи його, наприклад, до алгебри $AE_1[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$, одержуємо, що розглядувана підалгебра спряжена з $AE[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{on} \rangle$. Це дозволяє скоротити перелік підалгебр рангу n алгебри $AC(1, n)$, які розглядаються з точністю до $\tilde{P}(1, n)$-спряженості.

Теорема 2. *Нехай* L *— максимальна підалгебра рангу* n *алгебри* $A\tilde{P}(1, n)$ *другого класу і* $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. *Тоді* L *є* $C(1, n)$*-спряженою з однією з наступних алгебр*:

I. *Підалгебрами алгебри* $AP(1, n)$:

1) $AE[1, n]$ $(n \geq 1)$;

2) $\langle J_{01} \rangle$ $(n = 1)$;

3) $AE[1, n-1] + \langle J_{0n} \rangle$ $(n > 1)$;

4) $AO[0, n]$ $(n \geq 2)$;

5) $AO[0, k] \oplus AE[k+1, n]$ $(k = 2, \ldots, n-1;\ n \geq 3)$.

II. *Підалгебрами алгебри* $A\tilde{P}(1, n)$ *з ненульовою проекцією на* $\langle D \rangle$:

1) $AE[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n \geq 2)$;

2) $AE[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$ $(\alpha \neq 0;\ n \geq 2)$;

3) $AE[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + D + M \rangle$ $(n \geq 2)$;

4) $AO[1, n] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$;

5) $(AO[1, m] \oplus AE[m+1, n]) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(m = 2, \ldots, n-1;\ n \geq 3)$;

6) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(m = 1, \ldots, n-2;\ n \geq 3)$;

7) $AE_1[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n \geq 2)$;

8) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$
$(m = 1, \ldots, n-2;\ n \geq 3;\ \alpha \neq 0)$;

9) $AE_1[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$ $(n \geq 2;\ \alpha \neq 0)$;

10) $(AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + D + M \rangle$
$(m = 1, \ldots, n-2;\ n \geq 3)$;

11) $AE_1[1, n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + D + M \rangle$ $(n \geq 2)$;

12) $(AO[1, m] \oplus AE[m+1, n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(m = 1, \ldots, n-2;\ n \geq 3)$;

13) $(AO[1, n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n \geq 2)$;

14) $(AO[0, m] \oplus AE[m+1, n-1]) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(m = 2, \ldots, n-2;\ n \geq 4)$;

15) $AO[0, n-1] \supset\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n \geq 3)$;

16) $(\langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2, n-1]) \supset\!\!\!+ \langle J_{0n} - 2D \rangle$ $(n \geq 3)$;

17) $(\langle G_1 + P_0 - P_2 \rangle \supset\!\!\!+ \langle J_{02} - 2D \rangle$ $(n = 2)$;

18) $(AO[0, m] \oplus AO[m+1, q] \oplus AE[q+1, n]) \supset\!\!\!+ \langle D \rangle$
$(m = 2, \ldots, n-2;\ q = m+1, \ldots, n;\ n \geq 4)$.

5. Підалгебри третього класу. Нехай $A\tilde{G}_0(1, n-1) = \langle M, P_1, G_a, J_{ab} \rangle$ $(a < b;\ a, b = 1, \ldots, n-1)$ — ізохронна алгебра Галілея і L — деяка підалгебра третього класу. Якщо $L \cap A\tilde{G}_0(1, n-1) = 0$, то проекція $\tau(L)$ підалгебри L на алгебру $AGL(2, R) = \langle C, S, T, Z \rangle$ збігається з однією з алгебр: $\langle S + T \rangle$, $\langle S + T + \lambda Z \rangle$ $(\lambda > 0)$, $\langle S + T, Z \rangle$. Дійсно, якщо $\tau(L) = \langle C, S, T \rangle$, то за теоремою Уайтхеда [9] $L = \langle C, S, T \rangle$. Отже, L містить підалгебру $\langle T \rangle$, спряжену з підалгеброю $\langle M \rangle$, а це протирічить припущенню. Якщо $\tau(L) = \langle C, S, T, Z \rangle$, то $\langle C, S, T \rangle \subset L$ і знову приходимо до протиріччя.

Припустимо, що $\tau(L) = \langle S + T \rangle$, тоді ранг підалгебри L дорівнює одиниці, а значить, $n = 1$. В розглянутому випадку L спряжена з однією з таких підалгебр: $\langle S + T \rangle$, $\langle S + T \pm M \rangle$. Якщо $\tau(L) = \langle S + T + \lambda Z \rangle$ $(\lambda > 0)$, то знову $n = 1$ і L спряжена з підалгеброю $\langle S + T + \lambda Z \rangle$ $(\lambda > 0)$. У випадку $\tau(L) = \langle S + T, Z \rangle$ маємо $n = 2$, а значить, L спряжена з підалгеброю $\langle S + T, Z \rangle$.

Нехай $L_1 = L \cap A\tilde{G}_0(1, n-1) \neq 0$. Оскільки L є I-максимальною підалгеброю рангу n, то L_1 є I-максимальною підалеброю рангу $n-1$ або $n-2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n-1)$. Якщо L_1 є I-максимальною підалгеброю рангу $n-1$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n-1)$, то L є розширенням підалгебри L_1 з допомогою одновимірної підалгебри виду $\langle S + T + X \rangle$, або $\langle S + T + \lambda Z + X \rangle$ $(\lambda > 0)$, де $X \in A\tilde{G}_0(1, n-1)$. Алгебра $A\tilde{G}_0(1, n-1)$ містить тільки такі I-максимальні підалгебри рангу $n-1$:

1) $AE[1, n-1]$ $(n \geq 2)$;

2) $AE_1[1, n-1]$ $(n \geq 2)$;

3) $AE_1[1, m] \oplus AE[m+1, n-1]$ $(m = 1, \ldots, n-2;\ n \geq 3)$;

4) $\Phi(d_0 + 1, d_1, \gamma_1) \oplus \ldots \oplus \Phi(d_{t-1}, m, \gamma_t) \oplus AE[m+1, n-1]$
$(m = 1, \ldots, n-1;\ n \geq 2)$.

Розглянемо, наприклад, підалгебру $L_1 = AE[1, n-1]$. Її нормалізатор в алгебрі $AOpt(1, n)$ збігається з підалгеброю $L_1 \supset\!\!\!+ K$, де $K = \langle M, Z, T, C \rangle$. Звідси випливає, що алгебра L_1 не має потрібного розширення в алгебрі $AC(1, n)$.

Нехай далі L_1 є I-максимальною підалгеброю рангу $n-2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n-1)$. I-максимальна алгебра L рангу n є розширенням підалгебри L_1 з допомогою підалгебри виду $\langle S + T + X_1, Z + X_2 \rangle$, де $X_1, X_2 \in A\tilde{G}_0(1, n-1)$. Повна класифікація I-максимальних підалгебр рангу $n-2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n-1)$ проведена в [6]. Використовуючи опис цих підалгебр, можна одержати повний опис I-максимальних підалгебр рангу n алгебри $AOpt(1, n)$, проекції яких на $\langle C, S, T, Z \rangle$ збігаються з $\langle S + T, Z \rangle$. Розглянемо, наприклад, I-максимальну підалгебру $L_1 = AO[1, n-1]$ рангу $n-2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n-1)$. Її нормалізатор в алгебрі $AOpt(1, n)$ збігається з підалгеброю $L_1 \supset\!\!\!+ K$, де $K = \langle S, T, Z, C,$

$M\rangle$. З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів алгебра K має тільки одну підалгебру, проекція якої на $\langle C, S, T, Z\rangle$ дорівнює $\langle S+T, Z\rangle$. Ця підалгебра збігається з $\langle S+T, Z\rangle$. Отже, для підалгебри $L_1 = AO[1, n-1]$ існує тільки одне розширення рангу n в алгебрі $AOpt(1, n)$, яке збігається з $AO[1, n-1] \oplus$ $\oplus \langle S+T, Z\rangle$.

Оскільки для довільної I-максимальної підалгебри L_1 рангу $n-2$ алгебри $A\tilde{G}_0(1, n-1)$ відповідні генератори X_1 і X_2 мають громіздкий вигляд, то обмежимось лише тими підалгебрами L_1, у яких проекція $\omega(L_1)$ на підалгебру $AO[1, n-1]$ є нульовою, або примарною алгеброю [1], яка розкладається в підпряму суму не більше трьох незвідних підалгебр.

Теорема 3. *Нехай L — максимальна підалгебра рангу n алгебри $AC(1, n)$ третього класу. Якщо $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n\rangle$ і $\omega(L) = 0$, або $\omega(L)$ є примарною алгеброю, яка розкладається в підпряму суму трьох незвідних підалгебр, то L є $C(1, n)$-спряженою з однією з наступних алгебр*:

1) $\langle S+T\rangle$, *якщо* $n = 1$;

2) $\langle S+T \pm M\rangle$, *якщо* $n = 1$;

3) $\langle S+T+\lambda Z\rangle$, *якщо* $\lambda > 0$; $n = 1$;

4) $\langle S+T, Z\rangle$, *якщо* $n = 2$;

5) $AO[1, n-1] \oplus \langle S+T, Z\rangle$, *якщо* $n > 2$;

6) $\langle G_1 + P_{d+1}, G_2 + P_{d+2}, \ldots, G_d + P_{2d}\rangle \supset\!\!\!\!+ (K \oplus \langle J, Z\rangle)$; *де* K — *діагональ в* $AO[1, d] \oplus AO[d+1, 2d]$, *а* $J = S + T + \sum_{a=1}^{d} J_{a, a+d}$ $(n-1 = 2d;\ d > 1)$;

7) $$\left\langle G_a + \frac{1}{\sqrt{3}} P_a + \frac{2}{\sqrt{3}} P_{2d+a}, G_{d+a} - \frac{1}{\sqrt{3}} P_{d+a} + \frac{2}{\sqrt{3}} P_{2d+a} \mid a = 1, \ldots, d \right\rangle \supset\!\!\!\!+$$
$$\supset\!\!\!\!+ (K \oplus \langle J, Z\rangle),$$

де K — *діагональ в* $AO[1, d] \oplus AO[d+1, 2d] \oplus AO[2d+1, 3d]$, *а* $J = S + T +$ $+ \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{a=1}^{d} (J_{a, d+a} + J_{a, 2d+a} J_{d+a, 2d+a})$ $(n-1 = 3d;\ d > 1)$.

6. І-максимальні підалгебри рангу 2 алгебри $AC(1, 2)$

A. Підалгебри першого класу:

$$L_1 = \langle P_0 + K_0, J_{12}\rangle, \quad L_2 = \langle K_1 - P_1, K_2 - P_2, J_{12}\rangle.$$

B. Підалгебри другого класу:

$$L_3 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle, \quad L_4 = \langle P_1, P_2, J_{12}\rangle,$$
$$L_5 = \langle J_{02}, P_1\rangle, \quad L_6 = \langle J_{12}, D\rangle,$$
$$L_7 = \langle P_1, J_{02} + \alpha D\rangle \ (\alpha > 0),$$
$$L_8 = \langle G_1 + P_0 - P_2; J_{02} - 2D\rangle, \quad L_9 = \langle J_{02}, D\rangle,$$
$$L_{10} = \langle P_1, J_{02} + D + M\rangle.$$

C. Підалгебри третього класу:

$$L_{11} = \langle S+T, Z\rangle.$$

7. І-максимальні підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,3)$

A. Підалгебри першого класу:

$$L_1 = \langle P_1 + K_1 + 2J_{03}, P_2 + K_2 + K_0 - P_0, 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle,$$

$$L_2 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, K_3 - P_3 \rangle, \quad L_3 = \langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle,$$

$$L_4 = \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12}, K_3 - P_3 \rangle,$$

$$L_5 = \left\langle P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + K_0 - P_0, D + J_{02} - \sqrt{3}J_{01}, P_0 + K_0 - 2(K_2 - P_2) \right\rangle,$$

$$L_6 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3 \rangle.$$

B. Підалгебри другого класу:

$$L_7 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, \quad L_8 = \langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle,$$

$$L_9 = \langle P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{03} \rangle, \quad L_{10} = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, P_3 \rangle,$$

$$L_{11} = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D \rangle, \quad L_{12} = \langle G_1 + P_0 - P_3, P_2, J_{03} - D \rangle,$$

$$L_{13} = \langle G_1, P_2, D \rangle, \quad L_{14} = \langle G_1, P_2, J_{03} + \alpha D \rangle \ (\alpha \neq 0),$$

$$L_{15} = \langle P_2, P_3, J_{23}, D \rangle, \quad L_{16} = \langle P_1, P_2, J_{12}, J_{03} + \alpha D \rangle \ (\alpha > 0),$$

$$L_{17} = \langle P_1, P_2, J_{12}, J_{03} + D + M \rangle, \quad L_{18} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, D \rangle,$$

$$L_{19} = \langle J_{12}, P_3, D \rangle,$$

$$L_{20} = \langle J_{03}, P_3, D \rangle, \quad L_{21} = \langle J_{03}, J_{12}, D \rangle,$$

$$L_{22} = \langle G_1, J_{03} + D + P_0 + P_3, P_2 \rangle.$$

C. Підалгебри третього класу:

$$L_{23} = \langle S + T + J_{12}, Z, G_1 + P_2 \rangle, \quad L_{24} = \langle J_{12}, S + T, Z \rangle.$$

8. І-максимальні підалгебри рангу 4 алгебри $AC(1,4)$

A. Підалгебри першого класу:

$$L_1 = \langle P_0 + K_0 - 2J_{12} - 2J_{34}, P_1 + K_1 + 2J_{02}, P_3 + K_3 + 2J_{04}, J_{13} + J_{24} \rangle,$$

$$L_2 =$$

$$\langle P_0 + K_0 - 4J_{23}, P_2 + K_2 + \sqrt{3}(P_1 + K_1) + 2J_{03}, -P_3 - K_3 + 2J_{02} - 2\sqrt{3}J_{01}, -K_4 - P_4 \rangle,$$

$$L_3 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO(3) \oplus \langle K_4 + P_4 \rangle,$$

$$L_4 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus$$

$$\oplus \left\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}(K_4 - P_4), J_{23} - J_{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}(K_3 - P_3) \right\rangle,$$

$$L_5 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO(4),$$

$$L_6 = \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle J_{03}, J_{04}, J_{34} \rangle,$$

$$L_7 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, K_1 - P_1, K_2 - P_2, K_3 - P_3, K_4 - P_4 \rangle,$$

$$L_8 = \langle P_1 + K_1, P_2 + K_2, J_{12} \rangle \oplus \langle K_3 - P_3, K_4 - P_4, J_{34} \rangle.$$

B. Підалгебри другого класу:

$$L_9 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle,$$

$$L_{10} = \langle J_{04}, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, \quad L_{11} = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, P_1, P_2, J_{12} \rangle,$$

$$L_{12} = \langle J_{01}, J_{02}, J_{04}, J_{12}, J_{14}, J_{24}, P_3 \rangle, \quad L_{13} = AO(1,4),$$

$$L_{14} = \langle J_{12}, D, P_3, P_4, J_{34} \rangle, \quad L_{15} = \langle J_{04}, D, P_1, P_2, J_{12} \rangle,$$

$$L_{16} = \langle J_{04} + \alpha D, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \ (\alpha > 0),$$

$$L_{17} = \langle J_{04}, J_{12}, D, P_3 \rangle, \quad L_{18} = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D, P_1 \rangle,$$

$$L_{19} = \langle G_3, J_{04} + \alpha D, P_1, P_2, J_{12} \rangle \ (\alpha \neq 0),$$

$$L_{20} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, D, P_3 \rangle, \quad L_{21} = AO(4) \oplus \langle D \rangle,$$

$$L_{22} = \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, D \rangle, \quad L_{23} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, D \rangle,$$

$$L_{24} = \langle J_{01}, J_{02}, J_{04}, J_{12}, J_{14}, J_{24}, D \rangle,$$

$$L_{25} = \langle J_{04} - D + 2T, P_1, P_2, P_3, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle,$$

$$L_{26} = \langle J_{04} - 2D, G + 2T, P_1, P_2, J_{12} \rangle,$$

$$L_{27} = \langle J_{04} + D + M, G_3, P_1, P_2, J_{12} \rangle.$$

C. Підалгебри третього класу:

$$L_{28} = \left\langle Z, S + T + 2J_{12}, G_1 + P_2 + \sqrt{2} P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2} G_3 \right\rangle,$$

$$L_{29} = \langle Z, S + T \rangle \oplus AO(3).$$

Таким чином, нами повністю класифіковані підалгебри рангу n алгебри $AC(1, n)$. Одержана класифікація дозволяє здійснити симетрійну редукцію багатовимірних хвильових рівнянь, інваріантних відносно групи $C(1, n)$, до звичайних диференціальних рівнянь. Така редукція в багатьох випадках дозволяє знаходити багатопараметричні сімейства точних розв'язків інваріантних рівнянь.

1. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. *Фущич В. И., Баранник А. Ф.* Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1250–1256.
4. *Фущич В. И., Баранник А. Ф.* Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1, n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II // Там же. – 1990. – **42**, № 12. – С. 1693–1700.
5. *Баранник А. Ф., Марченко В. А., Фущич В. И.* О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера // Теорет. и мат. физика. – 1991. – **87**, № 2. – С. 220–234.
6. *Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* Редукция общего волнового уравнения к двумерным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1311–1323.
7. *Тауфик М. С.* О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. – Ярославль: Ярославл. ун-т, 1980. – С. 86–115.
8. *Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* Связные подгруппы конформной группы $C(1, 4)$ // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7–8. – С. 870–884.
9. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. – 356 с.

Одержано 04.03.97