УДК 517:539.3

О.І. Жупанська
М.А. Мартиненко, д-р фіз.-мат. наук

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ РІВНЯНЬ КОШІ – РІМАНА В ТОРОЇДАЛЬНИХ КООРДИНАТАХ

Роль класичних рівнянь Коші – Рімана в проблемах аналізу і математичної фізики важко переоцінити. Наприклад, рівнянням Коші – Рімана задовольняють дійсна та уявна частини аналітичної функції комплексної змінної; в задачах гідродинаміки ідеальної рідини розв'язками рівнянь Коші – Рімана є функція току та потенціал [5]. В прикладних задачах часто виникає потреба у поновленні уявної частини аналітичної функції через відоме значення дійсної і навпаки. Розв'язком такої задачі є формули Гільберта [2].

У векторних задачах математичної фізики виникають рівняння, які є узагальненням класичних рівнянь Коші – Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial d}{dr}(r\Psi), \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{cases} \tag{1}$$

Наприклад, рівняння (1) пов'язують вихор та об'ємне розширення в осесиметричних задачах теорії пружності. Дійсно, рівняння Ламе

$$2\frac{m-1}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}u - \operatorname{rot}\operatorname{rot}u = 0 \tag{2}$$

зводиться до двох систем фундаментальних рівнянь векторного поля [4]

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\omega = -\operatorname{grad}\theta, \\ \operatorname{div}\omega = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}u = \omega, \\ \operatorname{div}u = -\dfrac{m-2}{2(m-1)}\theta. \end{cases} \tag{3}$$

В осесиметричному випадку, коли $|\omega| = \omega(r, z)$ і $\theta = \theta(r, z)$, перша з систем (3) перетворюється на узагальнені рівняння Коші – Рімана

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega) = -\frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial r}. \tag{4}$$

Рівняння (1) є частинним випадком рівнянь для p-аналітичних функцій [3]. Але побудована Г. Положієм теорія p-аналітичних функцій є досить складною у разі застосування її до задач у криволінійних координатах.

Потреба дослідження рівнянь типу (1) в тороїдальних координатах виникає при розв'язанні векторних задач математичної фізики для лінзоподібних областей.

Відшукання розв'язку системи (1) полягає в проблемі спряження, тобто в поновленні функції Φ через Ψ і навпаки. Метою даної роботи є побудова аналогів формул Гільберта в тороїдальних координатах для лінзоподібних областей.

Легко бачити, що функції Φ та Ψ, які входять до системи (1), мають задовольняти рівнянням

$$\Delta\Phi=0, \ \Delta_1\Psi=0, \tag{5}$$

де оператори Δ і Δ_1 мають вигляд:

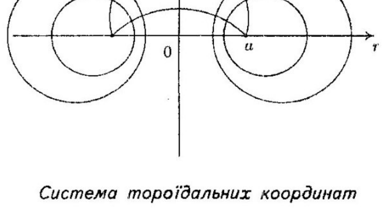
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{6}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}. \tag{7}$$

Тороїдальні координати введемо так:

$$r = a\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \quad z = a\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \ 0 \le \alpha < \infty, \ |\beta| \le \pi. \tag{8}$$

Значення координат $\beta=0$ і $\beta=\pi$ відповідають середині й зовнішній частині кругової області $r \le a$, $z = 0$ (див. рисунок).



Система тороїдальних координат

Гармонічна функція Φ і 1-гармонічна функція Ψ в тороїдальних координатах у лінзоподібних областях подаються у вигляді комплексних інтегралів Мелера – Фока за функціями Лежандра $Q_{-1/2+\mu}(ch\alpha)$ і $Q^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha)$ [4]:

$$\Phi(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi i}\sqrt{ch\,\alpha+\cos\beta}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[a(\mu)\cos\mu\beta+b(\mu)\sin\mu\beta\right]\times$$
$$\times Q_{-1/2+\mu}(ch\,\alpha)d\mu, \tag{9}$$

$$\Psi(\alpha,\beta)=\frac{1}{\pi i}\sqrt{ch\,\alpha+\cos\beta}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left[c(\mu)\cos\mu\beta+d(\mu)\sin\mu\beta\right]\times$$
$$\times Q^1_{-1/2+\mu}(ch\,\alpha)d\mu, \tag{10}$$

де $a(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$, $d(\mu)$ вважаються голоморфними функціями в смузі $|\operatorname{Re}\mu|<a$. Отже, поставлена задача зводиться до визначення залежностей між підінтегральними густинами гармонічної функції Φ та 1-гармонічної функції Ψ.

Знайдемо похідні, що входять у систему (1). Перехід від диференціювання в циліндричних координатах до диференціювання в тороїдальних координатах здійснюється за формулами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{1}{a}\left((1+ch\,\alpha\cos\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\, sh\,\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\right),\\ \frac{\partial}{\partial zz}&=\frac{1}{a}\left(-\sin\beta\, sh\,\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+(1+ch\,\alpha\cos\beta)\frac{\partial}{\partial\beta}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

Використовуючи відомі рекурентні співвідношення для функцій Лежандра [1]

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{2}+\mu)Q_{1/2+\mu}(ch\alpha)-(\frac{1}{2}+\mu)ch\alpha Q_{-1/2+\mu}(ch\alpha)=\\&\quad=sh\alpha Q^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha),\\&2\mu ch\alpha Q_{-1/2+\mu}(ch\alpha)=(\frac{1}{2}+\mu)Q_{1/2+\mu}(ch\alpha)+\\&\quad+(-\frac{1}{2}+\mu)Q_{-3/2+\mu}(ch\alpha),\\&sh\alpha\frac{dQ^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha)}{d\alpha}=-(\frac{1}{4}-\mu^2)Q_{-1/2+\mu}(ch\alpha)-\\&\quad-ch\alpha Q^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha),\\&2\mu ch\alpha Q^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha)=(-\frac{1}{2}+\mu)Q^1_{1/2+\mu}(ch\alpha)+\\&\quad+(\frac{1}{2}+\mu)Q^1_{-3/2+\mu}(ch\alpha),\\&sh\alpha\frac{dQ^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha)}{d\alpha}=(-\frac{1}{2}+\mu)ch\alpha Q^1_{-1/2+\mu}(ch\alpha)-\\&\quad-(\frac{1}{2}+\mu)Q^1_{-3/2+\mu}(ch\alpha),\end{aligned}\tag{12}$$

будемо мати:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial z}&=\frac{\sqrt{ch\,\alpha+\cos\beta}}{a\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big\{[-\tfrac{1}{2}(\mu-\tfrac{1}{2})a(\mu-1)-\\&-\mu a(\mu)-\tfrac{1}{2}(\mu+\tfrac{1}{2})a(\mu+1)]\times\\&\times\sin\mu\beta+[\tfrac{1}{2}(\mu-\tfrac{1}{2})b(\mu-1)+\mu b(\mu)+\\&+\tfrac{1}{2}(\mu+\tfrac{1}{2})b(\mu+1)]\cos\mu\beta\Big\}Q_{-1/2+\mu}(ch\,\alpha)d\mu,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial r}&=\frac{\sqrt{ch\,\alpha+\cos\beta}}{a\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big\{[\tfrac{1}{2}a(\mu-1)+a(\mu)+\\&+\tfrac{1}{2}a(\mu+1)]\cos\mu\beta+\\&+[\tfrac{1}{2}b(\mu-1)+b(\mu)+\tfrac{1}{2}b(\mu+1)]\sin\mu\beta\Big\}\times\\&\times Q^1_{-1/2+\mu}(ch\,\alpha)d\mu,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi)&=\frac{\sqrt{ch\alpha+\cos\beta}}{a\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big\{[-\tfrac{1}{2}((\mu-1)^2-\\&-\tfrac{1}{4})c(\mu-1)-(\mu^2-\tfrac{1}{4})\times\\&\times c(\mu)-\tfrac{1}{2}((\mu+1)^2-\tfrac{1}{4})c(\mu+1)\cos\mu\beta+\\&+[-\tfrac{1}{2}((\mu-1)^2-\tfrac{1}{4})d(\mu-1)-(\mu^2-\tfrac{1}{4})d(\mu)-\\&-\tfrac{1}{2}((\mu+1)^2-\tfrac{1}{4})d(\mu+1)\sin\mu\beta\Big\}\times\\&\times Q_{-1/2+\mu}(ch\alpha)d\mu,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\Psi}{\partial z}&=\frac{\sqrt{ch\,\alpha+\cos\beta}}{a\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big\{[\tfrac{1}{2}(\mu-\tfrac{3}{2})c(\mu-1)+\mu c(\mu)+\\&+\tfrac{1}{2}(\mu+\tfrac{3}{2})c(\mu+1)]\times\\&\times\sin\mu\beta+[-\tfrac{1}{2}(\mu-\tfrac{3}{2})d(\mu-1)-\mu d(\mu)-\\&-\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2}+\mu)d(\mu+1)]\times\\&\times\cos\mu\beta\Big\}Q^1_{-1/2+\mu}(ch\,\alpha)d\mu.\end{aligned}\tag{16}$$

Прирівнюючи відповідні похідні в системі (1), дістанемо такі функціональні рівняння для підінтегральних густин:

$$\begin{aligned}&(\mu-\frac{1}{2})a(\mu-1)+2\mu a(\mu)+(\mu+\frac{1}{2})a(\mu+1)=\\&=((\mu-1)^2-\frac{1}{4})d(\mu-1)-2(\mu^2-\frac{1}{4})d(\mu)-\\&\quad-((\mu+1)^2-\frac{1}{4})d(\mu+1),\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&(\mu-\frac{1}{2})b(\mu-1)+2\mu b(\mu)+(\mu+\frac{1}{2})b(\mu+1)=\\&=-((\mu-1)^2-\frac{1}{4})c(\mu-1)-2(\mu^2-\frac{1}{4})c(\mu)-\\&\quad-((\mu+1)^2-\frac{1}{4})c(\mu+1),\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&a(\mu-1)+2a(\mu)+a(\mu+1)=\\&-(\mu-\frac{3}{2})d(\mu-1)-2\mu d(\mu)-(\mu+\frac{3}{2})d(\mu+1),\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&b(\mu-1)+2b(\mu)+b(\mu+1)=\\&-(\mu-\frac{3}{2})c(\mu-1)-2\mu c(\mu)-(\mu+\frac{3}{2})c(\mu+1).\end{aligned}\tag{20}$$

Функціональні рівняння (17)–(20) розв'язуються за допомогою прямого й оберненого комплексного перетворення Фур'є:

$$F(\alpha)=\int_{-i\infty}^{i\infty}f(x)e^{-\alpha x}dx\ ,\tag{21}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha . \qquad (22)$$

При цьому треба покласти ширину смуги регулярності, що простирається вздовж уявної осі площини $\mu = \sigma + i\tau$, не ширше обмеженої лініями $\sigma = \pm 1$. Тобто функції $a(\mu)$, $b(\mu)$, $c(\mu)$, $d(\mu)$ є голоморфними функціями в смузі $|\operatorname{Re}\mu| < a$.

Застосувавши перетворення Фур'є до лівої і правої частин рівняння (17), будемо мати інтегральне співвідношення

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} a(\mu)[2\mu(1+\cos\alpha) - \operatorname{sh}\alpha] e^{-\alpha\mu} d\mu =$$

$$= 2(1+\operatorname{ch}\alpha) \int_{-i\infty}^{i\infty} (\mu^2 - \frac{1}{4}) d(\mu) e^{-\alpha\mu} d\mu , \qquad (23)$$

обернувши яке, дістанемо

$$(\mu^2 - \frac{1}{4}) d(\mu) = \mu a(\mu) - \frac{i}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{a(\nu)}{\sin\pi(\mu-\nu)} d\nu . \qquad (24)$$

Аналогічно з рівнянь (18), (19), (20) визначимо:

$$(\mu^2 - \frac{1}{4}) d(\mu) = \mu a(\mu) - \frac{i}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{a(\nu)}{\sin\pi(\mu-\nu)} d\nu , \qquad (25)$$

$$(\mu^2 - \frac{1}{4}) c(\mu) = -\mu b(\mu) + \frac{i}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{b(\nu)}{\sin\pi(\mu-\nu)} d\nu , \qquad (26)$$

$$a(\mu) = -\mu d(\mu) - \frac{i}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d(\nu)}{\sin\pi(\mu-\nu)} d\nu , \qquad (27)$$

$$b(\mu) = \mu c(\mu) + \frac{i}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{c(\nu)}{\sin\pi(\mu-\nu)} d\nu . \qquad (28)$$

Отже, розв'язано задачу спряження функцій, що задовольняють системі узагальнених рівнянь Коші – Рімана (1) в тороїдальній системі координат для лінзоподібних областей.

Висновки. Побудовано аналоги формул Гільберта для χ-аналітичних функцій, що задовольняють системі узагальнених рівнянь Коші – Рімана в лінзоподібних областях.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука,1977.
3. *Положий Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q) -аналитических функций. – К.: Наук. думка, 1973.
4. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 1979.
5. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976.

Надійшла до редколегії 22.12.98 р.