УДК 519.642

# РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ТЕПЛОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Звьоздочкіна О. А., Толок В. О.

У роботі пропонується алгоритм, заснований на методі крайових елементів й аналітичному методі функцій Гріна, для розв'язку змішаних задач стаціонарної задачі термопружності з заданим нестаціонарним навантаженням у неоднорідній півплощині. Під неоднорідністю тут розуміється багатозв'язність області. Даний алгоритм, побудований для розв'язку задач стаціонарної теплопровідності і пружності, приведений у роботах [1,2]. Однак, при постановці нестаціонарної задачі теплопровідності для тієї ж області і при наявності таких же крайових умов, з'являється початкова умова і похідна за часом у рівнянні. При побудові алгоритму для розв'язку такої задачі можна використовувати той же метод крайових елементів у нестаціонарній постановці [3] або метод скінченних різниць [4]. У даній роботі при побудові алгоритму для розв'язку змішаної нестаціонарної задачі використовувався метод скінченних різниць.

Розглянемо динамічну задачу теплопровідності в півплощині з включенням. Припускаємо, що на частині межі заданий тепловий потік, на включенні температура або потік, є початковий розподіл температури. Треба знайти функцію розподілу температури за часом в півплощині з включенням.

Математично цей процес описується так (рис.1):

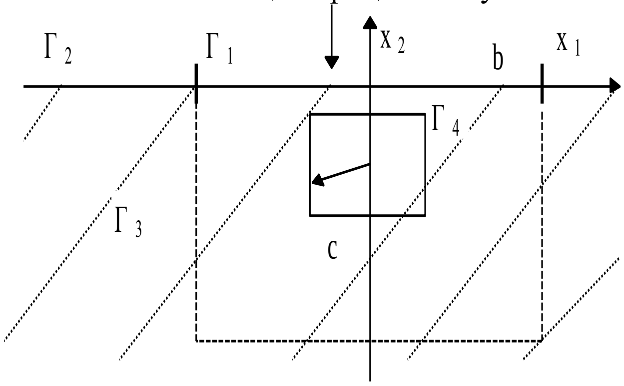


Рис. 1

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = f_1(x,t),$$

$$\left.u\right|_{\Gamma_2} = f_2(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_4} = f_4(x,t),$$

$$u(x,y,0) = \mu_0,$$

де $\Delta$ – оператор Лапласа, $\Gamma_1$ – частина прямої, на якій заданий тепловий потік, $\Gamma_2$ – інша частина прямої, на якій задана температура, $\Gamma_4$ – контур включення, $\mu_0$ – температура, задана в початковий момент часу. Крайові та початкові умови погоджені.

При розв'язанні використовується метод скінченних різниць для розв'язку динамічної задачі теплопровідності в кінцевій області і метод функцій Гріна для статичних задач у необмеженій півплощині.

З цією метою обмежимо прямокутником $\Gamma_3$ нашу півплощину, однією з меж якого буде контур $\Gamma_1$, на якому і заданий тепловий потік. Накладаємо сітку на отриману область. Для розв'язку нової задачі використовуємо явну різницеву схему:

$$U_{m,n}^{k+1} - U_{m,n}^{k} = k\tau\left[\frac{U_{m-1,n}^{k} - 2U_{m,n}^{k} + U_{m+1,n}^{k}}{h_x^2} + \frac{U_{m,n-1}^{k} - 2U_{m,n}^{k} + U_{m,n+1}^{k}}{h_y^2}\right],$$

$$0 \le n \le N;\ 0 \le m \le M;\ k > 0,$$

де $\tau$ – крок за часом, $h_x$, $h_y$ – кроки сітки.

Для цього апроксимуємо задану похідну на межі $\Gamma_1$. Однак, для розв’язання задачі методом скінченних різниць не вистачає крайових умов на трьох сторонах області. Для їхнього знаходження ми використовуємо метод функцій Гріна.

Як відомо, розв’язок задачі Діріхле для півплощини записується так:

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n} d\Gamma, \qquad (1)$$

де $G(x,y)$ - функція Гріна для півплощини.

Це співвідношення зв'язує кожну точку півплощини зі значенням функції на контурі $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Для прямокутної області (рис.2) використовуємо такий шаблон:

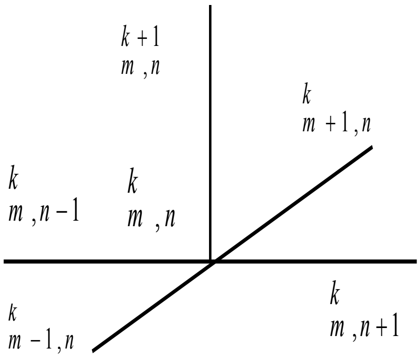


Рис. 2

Для знаходження температури на межі, де заданий потік, використовується метод фіктивних точок:

$$U_{m,0}^{k+1} - U_{m,0}^{k} = k\tau\left( \frac{U_{m-1,0}^{k} - 2U_{m,0}^{k} + U_{m+1,0}^{k}}{h_x^2} + \frac{U_{m,1}^{k} - U_{m,0}^{k} - h_y\mu_0}{h_y^2} \right),$$

$$0 \le m \le M;\ k > 0$$

Температуру на $\Gamma_1$ для кожного моменту часу знаходимо в першу чергу. Для цього крайові умови, що залишилися, не використовуються. Однак, отримавши температуру на $\Gamma_1$, можна знайти невідому крайову температуру на трьох сторонах прямокутника, використовуючи вираз (1). Після цього, застосовуючи явну різницеву схему знайдемо розв’язок для прямокутника. Розв’язок для необмеженої області поза прямокутником знайдемо, використовуючи розв’язок задачі Діріхле для півплощини (1).

Таким чином, отримана функція розподілу температури за часом.

Нижче наведені графіки цієї функції: на рис. 3 без включення; на рис. 4 із включенням, на якому задана одинична температура. На межі півплощини заданий одиничний потік і нульова температура. Початкова температура задана нульовою для узгодження крайових умов. При цьому межа розбивалася по 25 елементів на одиницю довжини. Центр квадратного включення знаходиться в т. (0, 0,5), довжина сторони дорівнює 0,5. Контур, що обмежує, знаходиться на подвійній відстані від контуру включення. Графік розподілу температури в області, коли на включенні заданий потік, не приведений тут, оскільки поведінка функції температури буде аналогічною.

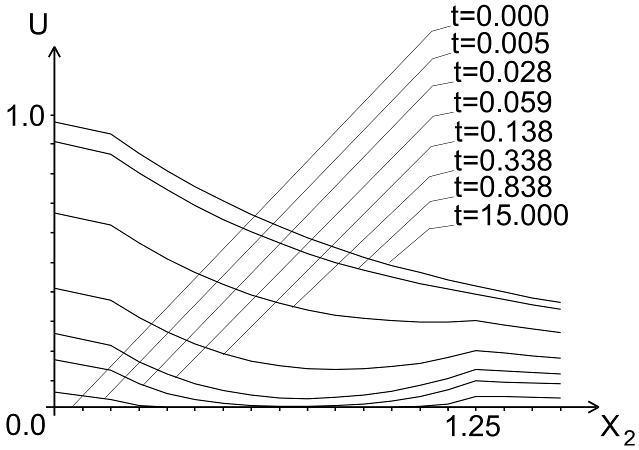


Рис. 3 Розподіл температури в півплощині за часом під дією потоку

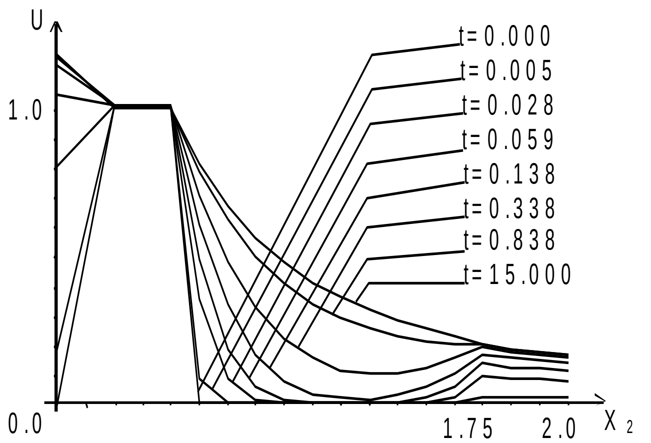


Рис. 4 Розподіл температури за часом у півплощині з квадратним включенням, на якому задана одинична температура

Тут увага звертається на залежність функції від часу. Особливо, якщо при побудові алгоритму використовувалися методи часової скінченно-різницевої схеми й аналітичний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності. Природно, що в деякий початковий інтервал часу функція розподілу показує некоректний результат, який не відповідає дійсності. Однак, починаючи з деякого моменту часу, функція температури згладжується. При цьому температура на межі ще не досягла свого статичного значення. Таким чином, не втрачаючи спільності, можна зневажити тим малим інтервалом часу, коли функція температури не адекватна реальним результатам. Однак, можна простежити динаміку росту температури на межі півплощини, починаючи з нульового моменту часу.

Отримані результати можна використовувати при побудові розв'язку стаціонарної пружної задачі, із заданим в області нестаціонарним тепловим навантаженням. У термінах теорії пружності [5] це буде побудова розв'язку стаціонарної незв'язної задачі термопружності, де як фіктивні масові сили виступають результати, отримані вище в кожний момент часу.

Розглянемо задачу про вдавлювання штампа в пружну півплощину. Ця задача відома як змішана крайова задача, коли на межі задані такі умови.

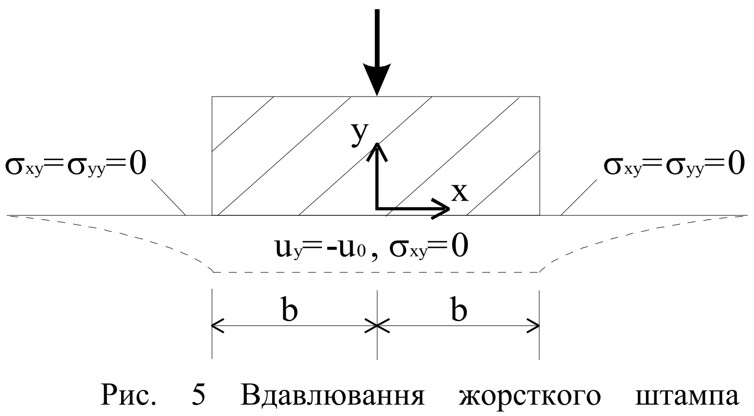


Рис. 5 Вдавлювання жорсткого штампа із мастилом

$$u_y = -u_0, \quad |x| \le b, \quad y=0,$$
$$\sigma_{xy} = 0, \quad |x| < \infty, \quad y=0,$$
$$\sigma_{yy} = 0, \quad |x| > b, \quad y=0.$$

Ці умови вимагають, щоб зміщення $u_y$ безпосередньо під штампом, $|x| \le b$, y=0, були постійними і дорівнювали $-u_0$($u_0$>0). Крім того, дотичні напруження $\sigma_{xy}$ дорівнюють нулю на всій межі, включаючи область $|x| \le b$ під штампом (передбачається, що мастило забезпечує умови, при яких на контакті штампа з півплощиною не виникають дотичні зусилля). І нормальні напруження $\sigma_{yy}$ дорівнюють нулю при y=0 для $|x| > b$, тобто в точках, де не задані зміщення $u_y$. Під штампом ($|x| \le b$, *y=0*) нормальні напруження невідомі. Розв'язок цієї пружної задачі поданий в [2]: алгоритм будувався на основі методу крайових елементів і розв'язку задачі Фламана. Однак, присутність температурних навантажень як фіктивних сил приводить до деякої модифікації закону Гука [5]. Тобто додається права частина в інтегральне рівняння:

$$c_{ij}(\xi)u_i(\xi)+\int_\Gamma p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)=$$

$$=\int_\Gamma u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x)+2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\int_\Omega u^*_{ik,k}(\xi,x)Td\Omega,$$

де інтеграл у лівій частині розуміється в змісті головного значення, $T$ – температура задана в області $\Omega$, $G$ – модуль зрушення, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона, $\alpha$ – коефіцієнт теплопровідності. При цьому, тому що з розв'язку попередньої задачі розподіл температури в кожний момент часу відомо на всій півплощині, то $\Omega$ охоплює всю область, на яку впливають задані теплові крайові умови.

Застосовуючи побудований алгоритм, одержуємо розв'язок пружної задачі в півплощині з включенням, із заданим нестаціонарним тепловим навантаженням.

На рис. 6 приведений графік нормальних напружень на межі під штампом, пунктиром виділені напруження у випадку, коли не задане теплове навантаження. Сама верхня лінія відповідає напруженням, отриманим при розв'язанні пружної задачі, коли теплове навантаження не залежить від часу. На рис. 7 приведений графік нормальних напружень на межі під штампом, але в півплощині є присутнім включення з заданим нульовим напруженням. Типи ліній відповідають описаним на рис. 6

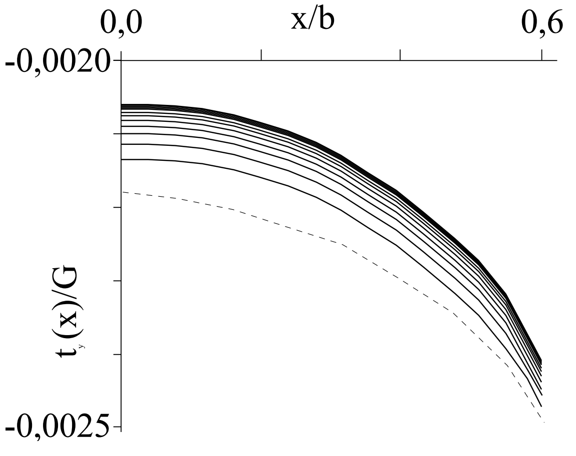


Рис. 6 Розподіл нормальних напружень на межі півплощини під дією штампа з кроком за часом 0,1

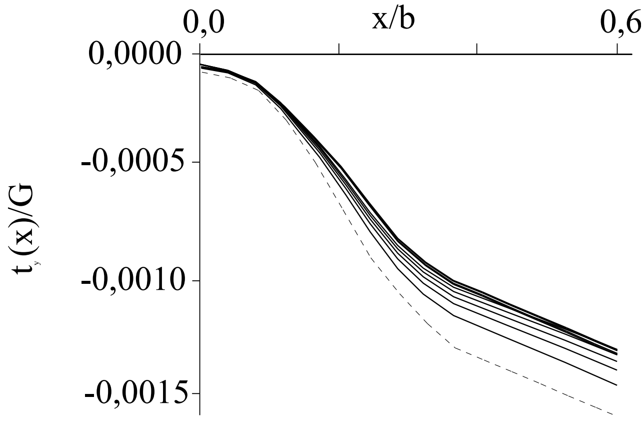


Рис. 7 Розподіл нормальних напружень на межі півплощини з включенням під дією штампа з кроком за часом 0,1

Таким чином, під дією нестаціонарного теплового навантаження відбувається поступове зменшення напружень на межі під штампом і вони прагнуть до статичних. Як уже відзначалося, функція розподілу температури в півплощині згладжується, починаючи з кроку за часом, рівного 0,8, то розглядати розподіл напружень і переміщень у півплощині можна, починаючи з цієї часової точки. Однак, якщо подивитися на функцію розподілу температури в півплощині, то починаючи з цього моменту зміни настільки малі і настільки близькі до статичних, що різниця в їхньому впливі на розподіл напружень і зміщень у півплощині майже непомітні.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Звьоздочкіна О. А., Толок В. О. Про один спосіб розв’язку змішаної задачі теплопровідності для півплощини з включеннями // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – №1. – С. 36-38.
2. Звьоздочкіна О. А., Толок В. О. Про один метод розв’язування задачі статики для пружної неоднорідної півплощини // Вісник Державного університету “Львівська політехніка”, с. Прикладна математика. – 1998. – №337. – С. 172-175.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987.–524 с.
4. Бахвалов Н. Численные методы. - М.: Наука, 1987. - С. 327.
5. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

Звездочкина Е. А., Толок В. А.

РЕШЕНИЕ УПРУГОЙ ЗАДАЧИ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКОЙ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ.

В работе представлен алгоритм решения нестационарной задачи теплопроводности для полуплоскости с включением. Построение алгоритма основано на методе конечных разностей и методе функций Грина. Проведен анализ полученных решений и обоснованность применения такого алгоритма для нестационарных задач. Решение стационарной термоупругой задачи для неоднородной области строится на полученном ранее решении задачи теплопроводности в каждый момент времени. Проведен численный анализ полученных решений термоупругой задачи.

Zvyozdochkina E. A., Tolok V. A.

SOLUTION OF THE ELASTIC TASK WITH A NON-STATIONARY THERMAL LOAD FOR A HALF-PLANE WITH INCLUSION.

In work the algorithm of a solution of the non-stationary task of a thermoconductivity for a half-plane with inclusion is represented. The construction of algorithm is based on a method of a finite difference and method of Green functions. The analysis of obtained solutions and validity of application of such algorithm for the non-stationary tasks is carried out. The solution of the stationary thermoelastic task for inhomogeneous area is created on an obtained earlier solution of the task of a thermoconductivity in each instant. The numerical analysis of obtained solutions thermoelastic task is carried out.

СВЕДЕНИЯ

Об авторах статьи

РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ ЗАДАЧІ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ТЕПЛОВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ.

Звездочкина Елена Анатольевна– Запорожский государственный университет, аспирантка третьего года обучения, по совместительству ассистент кафедры математического моделирования и информационных технологий

Телефон (0612) 69-98-98

Толок Вячеслав Александрович – Запорожский государственный университет, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и информационных технологий

Телефон / Факс (0612) 64-45-46
E-mail Tolok@zsu.zaporizhzhe.ua.