УДК 681.513.5

Мінімаксний синтез оптимального робастного керування

Б.М.Гончаренко, О.П. Лобок

Національний Університет Харчових Технологій

Розглядається задача побудови оптимального робастного керування у вигляді зворотного зв'язку від стану лінійної динамічної системи, яке мінімізує інтегрально-квадратичний функціонал при найбільш несприятливих збуреннях системи. Більшість реальних систем або об'єктів керування функціонує [1] в умовах невизначеності, пов'язаної з недостатньою інформацією про об'єкт керування, неточністю його математичної моделі, вихідних даних і т.д. Тому завданням керування об'єктами, що функціонують в умовах невизначеності, приділялася і продовжує приділятися велика увага [2]. У даній роботі розглядається і пропонується розв'язок задачі побудови гарантованого керування лінійною системою, що знаходиться під впливом збурень невідомої природи, які належать до обмеженої області у вигляді заданого еліпсоїда [3].

Розглянемо динаміку стану об'єкта $x(t)$ при керуванні $u(t)$ і зовнішніх збуреннях $f_0, f(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f(t), \qquad 0 < t \le T, \\ x(0) = Lf_0, \end{cases} \tag{1}$$

де $x(t) \in \mathrm{R}^n$ – вектор стану, $u(t) \in \mathrm{R}^m$ – вектор керування, $f(t) \in \mathrm{R}^r$ – невідомий вектор зовнішніх збурень, що діють на систему, $f_0 \in \mathrm{R}^l$ – також невідомий вектор, що збурює систему (1) в початковий момент часу, $A(t) \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $K(t) \in \mathrm{R}^{n\times r}$, $L \in \mathrm{R}^{n\times l}$ – задані матриці.

Передбачається, що область допустимих збурень задається у вигляді гіпереліпсоїда [3]

$$S_f = \left\{ f : f = (f_0, f(\cdot)),\ (F_0 f_0, f_0) + \int_0^T (F(t)f(t), f(t))\, dt \le 1 \right\}, \tag{2}$$

де $F_0 = F_0^T > 0$, $F(t) = F^T(t) > 0$ – відомі вагові матриці.

Постає задача пошуку оптимального керування u^*, що задовільняє умову

$$J(u^*) = \inf_{u \in U} \left\{ \sup_{f \in S_f} I(u, f) \right\}, \tag{3}$$

де $I(u, f)$ – інтегрально - квадратичний критерій оптимальності $I(u, f) = (Hx(T), x(T)) + \int_0^T \left[(G(t)x(t), x(t)) + (D(t)u(t), u(t)) \right] dt$,

де $H = H^T \ge 0$, $G(t) = G^T(t) \ge 0$, $D(t) = D^T(t) > 0$ – задані матриці.

Якщо ввести позначення для вектора збурення та для вектора керувальної дії

$$w_0 = F_0^{1/2} f_0,\ w(t) = F^{1/2}(t) f(t), \tag{4}$$

$$v(t) = D^{1/2}(t)u(t),\ B_v(t) = B(t)D^{-1/2}(t),\ K_w(t) = K(t)F^{-1/2}(t),\ L_w = LF_0^{-1/2}, \tag{5}$$

то у підсумку вихідна оптимізаційна задача (3) зводиться до еквівалентної

$$J(v) = \sup_{w \in S_w} I(v,w) = \|R_v\|^2 \to \inf_{v \in V} . \tag{6}$$

Для її розв'язання за мінімаксним принципом Понтрягіна побудована функція Гамільтона $H(x,v,w,\lambda)$, з умови мінімізації (максимізації) якої за v (w) отримане матричне диференціальне рівняння типу Ріккаті, розв'язок [4] якого дає оптимальні значення для функцій $v(t)$ і $w(t)$

$$v^*(t) = -B_v^T(t)P(t)x(t), \;\; w^*(t) = \frac{1}{\gamma^2} K_w^T(t)P(t)x(t). \tag{7}$$

При цьому мінімальне значення функціоналу, що обмежує критерій якості функціонування об'єкта, визначається за формулою

$$L_c^{\min}(R,G) = \lambda^2(T)\,\mathrm{tr}\;S(T)V \;+ \int_{t_0}^{T} \lambda^2(t)\,\mathrm{tr}\;S(t)H(t) \;+ \mathrm{tr}\Big[S(t)\Psi(t)S(t)C^T(t)P_2(t)C(t)\Big]\,dt$$

Оскільки керування побудовано у вигляді зворотного зв'язку від оцінки стану, то певний інтерес становить похибка оцінювання мінімаксного фільтра . Можна показати, що мінімальне значення верхньої межі функціоналу похибки оцінювання вектора стану об'єкта визначається за наступною формулою

$$L_e^{\min}(R,G) = \int_{t_0}^{T} \lambda^2(t)\,\mathrm{tr}\;S(t)W(t)\,dt, \tag{8}$$

де $S(t)$– розв'язок матричного рівняння.

Конструктивний розв'язок задачі синтезу оптимального мінімаксного керування об'єктами, що функціонують в умовах зовнішніх збурень, які належать заданій обмеженій області у вигляді еліпсоїда в n– вимірному просторі, знайдено у вигляді зворотного зв'язку від оцінки вектора стану, який є розв'язком мінімаксного фільтра, подібного до фільтра Калмана-Бьюсі.

Література

1. *Поляк Б. Т.*Вероятностныйподход к робастнойустойчивости систем с запаздыванием/ Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // Автом. телемех – М.: Наука. – 1996. – Вып. 12, с. 97 – 108.

2. *Понтрягин Л. С.*Математическаятеорияоптимальныхпроцессов/ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, – М.: Наука. – 1961. с. 124 – 125 .

3. *Гончаренко Б.М.* Аналітичне подання збурень при розв'язуванні задачі оптимізації керування багатовимірним об'єктом / Б.М. Гончаренко, А.О. Повзик // – К.: НУХТ, «Наукові праці», – №49. – 2013. с. 8 – 13.

4. *Лобок О.П.* Синтез оптимального мінімаксного керування лінійними багатовимірними об'єктами за умови неточного і неповного їх вимірювання / О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, Л.Г. Віхрова // – Кіровоград: КНТУ, Збірник наукових праць, – Вип.26. – 2013, с.247 – 253.