Застосування невласних інтегралів та рядів в теорії теплового випромінювання

Анастасія Бєлан, Володимир Листопад
Національний університет харчових технологій
Володимир Шоха
Коледж технологій та дизайну КНУТД

Вступ. Кількість енергії випромінювання, що переноситься за одиницю часу через довільну поверхню, називається потоком випромінювання**.** Для визначення ефективності теплообмінних процесів необхідно встановити залежність енергії випромінювання чорного тіла від абсолютної температури.

Матеріали і методи. Теплообмінні процеси описані фізичними формулами. Наша робота показує застосування математичного апарату для визначення залежності густини енергії випромінювання від однієї змінної величини – температури. Доведення цього твердження проведемо з допомогою інтегрування, а саме, обчислення невласного інтегралу з переходом до рядів Тейлора.

Результати. Густина енергії випромінювання чорного тіла визначається формулою

$$u = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(h\nu/kT\right)-1},$$

де $h-$ стала Планка, $\nu-$ частота світлового випромінювання, $c-$ швидкість світла, $k-$ стала Больцмана, $T-$ температура абсолютно чорного тіла.

Виконаємо перетворення:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(h\nu/kT\right)-1} = \left| \begin{array}{c} x = h\nu/kT \\ \nu = kTx/h \\ d\nu = kTdx/h \end{array} \right| = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{k^3T^3x^3}{h^3}\cdot\frac{1}{e^x-1}\cdot\frac{kT}{h}dx =$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3}\cdot\frac{k^4T^4}{h^4}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1}.$$

Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \int_0^\infty x^3e^{-x}\left(1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots\right)dx = 6\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right).$$

Оскільки сума ряду $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$, то $\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = 6\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$.

Таким чином,

$$u = \frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\cdot\frac{\pi^4}{15} = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}T^4.$$

Висновок. Отримана формула показує, що густина енергії випромінювання абсолютно чорного тіла залежить тільки від абсолютної температури. Ці результати можуть бути використані у практичних задачах теорії теплопровідності.