ПРО ВІДКРИТІ ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИН

Трохимчук Ю.Ю., докт. фіз.-мат. наук.

Інститут математики НАН України

Сафонов В.М., канд. фіз.-мат. наук.

Український державний університет харчових технологій

Розглянемо спочатку множину Q = I x P_0, де I = [0,1] і P_0 канторова досконала множина, відому під назвою «канторів гребінь». Розташуймо її в квадраті $I^2 = [0,1]\times[0,1]$ площини xOy так, щоб P_0 було на осі Оу і візьмемо відображення цього квадрату на квадрат I^2 площини *uOv,* яке має вигляд:

$$\begin{cases} u - x \\ v = F(x, y) \end{cases}$$

де $F(x,y)$ має такі властивості:

1) для кожного фіксованого х вона неспадна функція по у;

2) $F(x,0)=0,\ F(x,1)=1;$

3) образ перетину $Q\cap\{x=const\}$ містить непусту досконалу множину.

Означення: Образ множини Q при цьому відображенні назвемо узагальненим касторовим гребенем.

Має місце така

Теорема: Нехай проекція ніде не щільного в $I^2\subset R^2(x,y)$ компакта К на вісь Ох є цілий відрізок І, причому кожна «вертикаль» $x=const$ перетинає К по незліченній нульвимірній (замкненій) множині K_x. Якщо в К існує щільна в ньому підмножина К', яка відкрито проектується на І, то К' є узагальнений канторів гребінь і співпадає з К.

Доведення: Ми підкреслимо тут основні його моменти. По-перше, ми можемо припустити, що «горизонтальні» межові сторони квадрата I^2 не перетинають К. По-друге, припускаючи, що K' існує, можемо вважати, що перетин $K'=K'\cap\{x=const\}$ є замкнена множина; це випливає з того, що за умовою сімейство $\{K'_x\}$ є напівнеперервне знизу, а ця властивість зберігається при замиканні кожного K'_x.

Візьмемо тепер перші точки знизу на множині К'; ці точки утворюють графік $B(\varphi_0)$ (першої) нижньої функції $\varphi_0(x)$. Виявляється, що ця функція буде напівнеперервна зверху.

Дійсно, нехай в певній точці $x'\in\operatorname{int}I$ маємо: $\varphi_0(x')<\overline{\lim_{x\to x'}}\varphi_0(x);$ тоді

знайдеться послідовність $x_k\to x'$ така, що «довгі» відрізки $[0,\varphi_0(x_k)]$, прямуючи до прямої $x=x',$ не містять точок з K' поблизу точки $[0,\varphi_0(x')]$ графіка $B(\varphi_0)$, що суперечить напівнеперервності знизу сімейства $\{K'_x\}$.

Аналогічно, взявши перші точки з K' зверху, отримаємо графік $B(\Psi_2)$ верхньої функції $\Psi_2(x)$ (індекс буде зрозумілим далі), яка виявляється напівнеперервною знизу; маємо: $\varphi_0(x) < \Psi_2(x)$, бо на кожному відрізку $[\varphi_0(x), \Psi_2(x)]$ міститься незліченна множина K'_x.

В силу відомої теореми [1] між графіками функцій φ_0 і Ψ_2 можна провести графік $B(f_1)$ неперервної функції $y = f_1(x) : \varphi_0 \leq f_1 \leq \Psi_2$.

Рухаючись догори від $B(f_1)$, знаходимо перші точки K' (знизу – відносно $B(f_1)$,) які утворюють графік нижньої функції $\varphi_2(x)$, а рухаючись вниз – творимо верхню функцію $\Psi_0(x)$; отже маємо:

$$\varphi_0 < \Psi_0 \leq f_1 \leq \varphi_2 < \Psi_2.$$

На графіку $B(f_1)$ вже можуть «склеюватись» графіки $B(\Psi_0)$; $B(\varphi_2)$, тому і нерівності нестрогі.

Відомо, що $\{\varphi_0 < \Psi_0\}$ і $\{\varphi_2 < \Psi_2\}$ є відкриті області, а $\{\Psi_0 < f < \varphi_2\}$ є ланцюг відкритих областей вздовж графіка $B(f)$, можливо «склеєних» в деяких його точках. Позначимо перші індексами 0 і 2, а третю — індексом 1.

Аналогічно, в областях 0 і 2 знайдемо області 00, 02, 20, 22 і ланцюги 01, 21, і т.д.

Неважко тепер довести, що кожна з напівнеперервних зверху функцій φ є границя монотонно зростаючої послідовності неперервних функцій f, тобто кожна з функцій φ є просто неперервною; так само і з Ψ.

Якщо позначити сукупність замкнених областей з n індексами, одними нулями і двійками, через Δ_n, то легко бачити, що всі графіки φ і Ψ і їх границі співпадають з K' і $K' = \bigcap_n \Delta_n$.

А це і є конструкція (яка, ясна річ, імітує конструкцію канторової множини) узагальненого канторового гребня.

Дамо одне з застосувань цієї теореми.

Нехай на відрізку $[a,b]$ задана неперервна функція $F(x)$ і замкнена ніде не щільна множина $e \subset [a,b]$ такі, що на кожному інтервалі суміжності до e функція F зростає.

Скажемо, що множина *e* являється особливою для *F,* якщо в кожному околі довільної точки з *e* ця функція не є монотонною. Простий приклад такої функції – це $F(x) = x - \theta(x),\ x \in [0,1],$ де $\theta(x)$ – класичний приклад монотонно неспадної функції, відомої під назвою «канторової дробини». Очевидно, що на кожному інтервалі суміжності до канторової досконалої множини P_0 функція F має вигляд $x - c$ (тобто зростає), але тим не менш монотонною всюди не являється: $F(0) = F(1) = 0.$ Те, що всі точки *Pq* є особливі для *F,* випливає з того, що, як відомо, на щільній в P_0 підмножині похідна $\theta'(x) = +\infty,$ і, отже, $F'(x) = -\infty.$

Нехай тепер в області $D \subset R^2$ дані ніде не щільний компакт *К* і неперервна функція $F(x, y),$ такі, що кожна пряма $x = const$ перетинає *К* по нульвимірній множині K_x, а функція $F(x, y)$ зростає на кожному інтервалі суміжності до K_x. Тоді, якщо *К* не містить в собі узагальненого канторового гребня, функція $F(x, y)$ для кожного фіксованого x зростає по y.

Це випливає з того, що, як легко бачити, сімейство підмножин $K'_x \subset K_x$ (істотно) особливих точок $F(x, y)$ – напівнеперервне знизу.

І ще одне. Ясно, що доведена теорема має місце і для випадку довільної вимірності $I^n = \underbrace{I \times I \times ... \times I}_{n}$, якщо ввести $(n-1)$ – конторів гребінь $P_0 \times I^{n-1}$, а з ним і узагальнений.

Це теж означає, що відповідна теорема про зростання функції $F(x_1, ..., x_{n-1}, y)$ має місце і тут.

Література.

[1] Натансон И.П. - Теория функций вещественной переменной. - М.; Л.; Гостехиздат, 1950.-345с.