

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Ректор \_\_\_\_\_  
(підпис) (Прізвище ініціали)  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

**курс лекцій**

**для студентів напрямків:**

**6.050502 «Інженерна механіка»,**

**6.050601 «Теплоенергетика»,**

**6.050.604 «Енергомашинобудування»,**

**6.050301 «Електротехніка та електротехнології»**

**денної та заочної форм навчання**

Реєстраційний номер  
«Опір матеріалів»  
Курс лекцій у НМУ

---

**СХВАЛЕНО**  
на засіданні кафедри  
теоретичної механіки і опору  
матеріалів  
як курс лекцій  
Протокол № 9  
від 24 квітня 2010р.

**Башта А.В.** Опір матеріалів: Курс лекцій для студ. спец.: **6.050502** «Інженерна механіка», 6.050601 «Теплоенергетика», 6.050.604 «Енергомашинобудування», 6.050301 «Електротехніка та електротехнології» ден. та заоч. форм навч. – К.: НУХТ, 2010.

Рецензент **Є.В.Штефан**, канд. техн. наук

А.В. Башта, канд. техн. наук

© А.В. Башта, 2010  
© НУХТ. 2010

## ЛЕКЦІЯ № 1

### Вступ. Мета і задачі курсу опору матеріалів

План лекції:

1. Основні положення науки про опір матеріалів.
2. Історичний екскурс у формування вчення опору матеріалів як науки.
3. Форми тіл, що вивчаються в даному курсі.
4. Основні гіпотези курсу.
5. Основні види деформацій конструктивних елементів

**Література:** [1] – с. 8 ÷14, [2] – с. 15÷25

**1.Опір матеріалів** – це наука про інженерні методи розрахунків на **міцність, жорсткість і стійкість** деталей машин та елементів конструкцій.

*Міцність* – це здатність конструктивного елемента витримувати задані навантаження не руйнуючись при цьому.

*Жорсткість* – це здатність конструкцій елемента деформуватися під дією зовнішнього навантаження так, щоб величина деформацій не перевищувала визначеної або наперед заданої, допустимої величини.

*Стійкість* – це здатність конструкції або ж її елемента зберігати в процесі експлуатації певну, попередньо задану, форму пружної рівноваги.

**2.** Перші теоретичні і дослідні вивчення міцності конструкцій були знайдені ще в роботах італійського вченого, інженера (а більше відомого як художника) Леонарда да Вінчі (1452 – 1519 рр.).

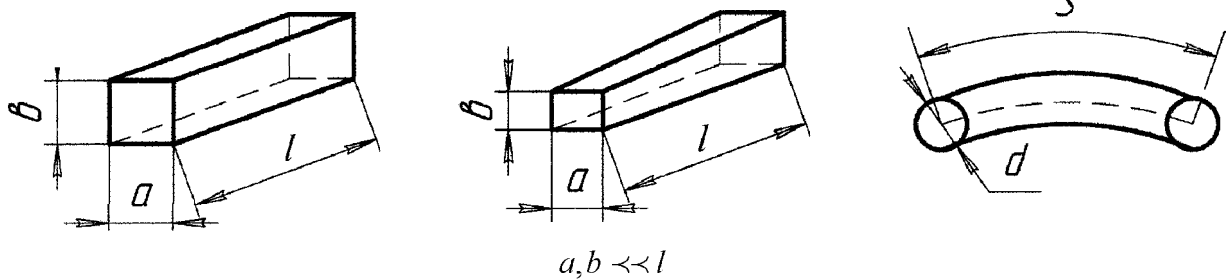
Формування опору матеріалів, як науки, пов'язують з ім'ям другого італійського вченого, в працях якого було **вперше** дано вирішення задачі міцності при згині балок в залежності від їх розмірів і величини діючого навантаження, Галілео Галілей (1564 – 1642 рр.) отримав не тільки теоретичні обґрунтування, але і проводив експериментальні дослідження. В 1678 р. англійський вчений Роберт Гук на основі експериментальних досліджень встановив залежність, яка лягла в основу науки про опір матеріалів і стала відома, як **закон Гука**, за яким деформування пружного тіла пропорційне діючому на нього навантаженню.

Швидкий розвиток промислового будівництва на кінці 18-го і початку 19-го століть викликав і не менш бурхливий розвиток науки про опір матеріалів. Тут необхідно назвати таких вчених як Нав'є, Копій, Пуассон, Бресе, Ейлер, Ломоносов, Остроградський, Гадолін, Журавський, Ясинський і цілий ряд інших.

Кінець 19-го і 20-го сторіччя. Значний внесок у розвиток механіки і в розширення наукових положень науки про опір матеріалів зробили такі вчені як Бубнов, Крилов, Гальоркін, Кирпичов, Тимошенко, Беляєв, Феодосьєв, Біргер, Писаренко і інші.

**3.** Сучасний курс опору матеріалів включає в себе розрахунки на міцність таких основних форм як: брус (або стержень), пластина, оболонка, масив.

*Стержнем* (брусом) – називається тіло у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри.



В машинах і спорудах зустрічаються стержні прямолінійні, криволінійні, суцільні і пустотілі, товстостінні і тонкостінні, постійного і змінного поперечного перерізу.

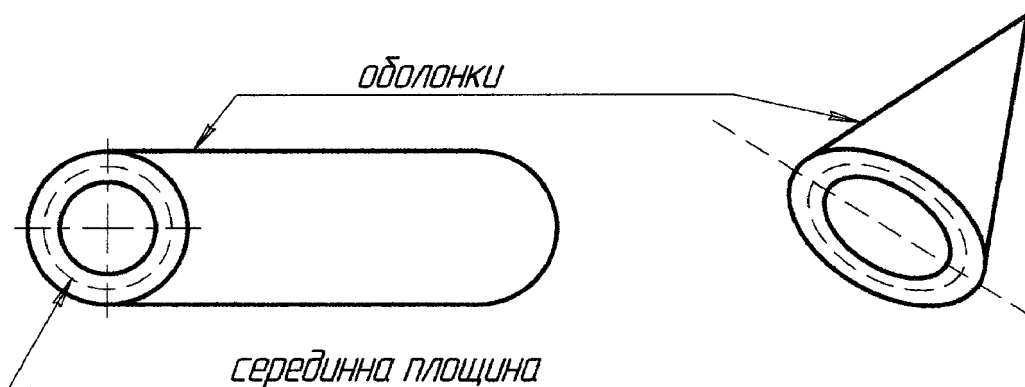
Прикладом прямолінійного стержня є – вісь, вал, балка; криволінійного – крюк вантажопідйомного крану, ланка ланцюга, арка та ін.

*Пластиною* – називається конструкцій елемент у якого один розмір (товщина) значно менший двох інших розмірів.



Пластинами можна вважати плоскі днища і кришки резервуарів, диски турбомашин та ін. Пластини бувають як прямокутні, так і круглі.

*Оболонка* – це тіло обмежене криволінійними поверхнями, що розташовані на близькій відстані одна від іншої.



Площина, що ділить товщину оболонки на рівні частини називається *серединною*.

По формі серединної площини оболонки розділяють на: циліндричні, конічні, шарові та ін.

Якщо серединна площина є плоскою, то така оболонка буде являти собою пластинку. Тому оболонка є більш загальною фігурою для такого типу тіл.

Тіла, у яких всі три величини розмірів одного порядку, називаються **масивами**, або ж **масивними тілами**.

При розв'язуванні задач міцності, жорсткості чи стійкості в курсі опору матеріалів використовується досить не складний математичний апарат. Це досягається за рахунок введення в теорію курсу цілого ряду **гіпотез**.

#### 4. Основні гіпотези курсу опору матеріалів

##### 1. Гіпотеза про суцільність матеріалу

Згідно цієї гіпотези припускається, що матеріал повністю заповнює форму тіла (атомістична теорія дискретної побудови речовини до уваги не береться).

##### 2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність

Припускається, що властивості матеріалу по всьому його об'ємі і в любому напрямку будуть однакові тобто ізотропні.

##### 3. Гіпотези про малість деформацій

Припускається, що деформації в тілі досить малі порівняно з його розмірами. Таке припущення дає можливість застосовувати рівняння статички для недеформованого тіла при вирішенні задач реальних елементів конструкцій.

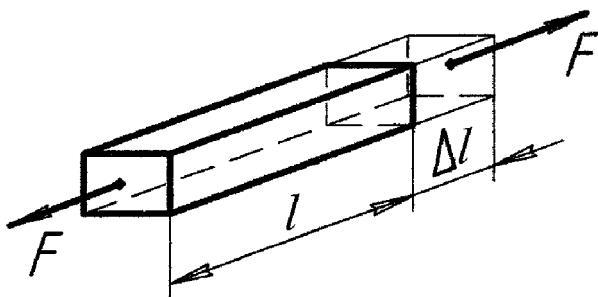
##### 4. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу

Припускає, що під дією навантаження в тілі виникають деформації пружності, причому такі, що повністю зникають після того як було знято навантаження.

5. Гіпотеза про пряму пропорційність між деформаціями і навантаженням. (Закон Гука).

Перераховані вище гіпотези, а також деякі інші, про які буде сказано пізніше, дозволяють розв'язувати широке коло задач по розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість. І, як показали дослідження, результати таких розрахунків гарно узгоджуються з реальними умовами роботи.

#### 5. Основні види деформацій конструктивних елементів



1. **Розтяг або стиск.** Такий вид деформування виникає в тому випадку коли до стержня вздовж осі прикладені протилежно спрямовані сили.

$l$  - довжина стержня;

$\Delta l$  - величина абсолютної

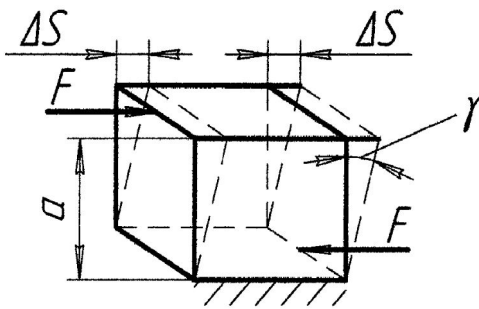
деформації стержня;  $\frac{a - a_1}{a} = \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon'$

$$\frac{b - b_1}{b} = \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon'$$

відносне  
поперечне  
«подовження»

F – сила;

$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta l}{l}$  – відносне середнє подовження стержня

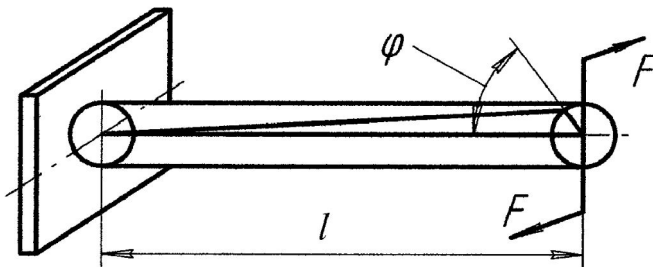


**2. Зсув або зріз.** Цей вид деформації виникає коли зовнішні сили зміщують два паралельних перерізи стержня один відносно одного, при незмінній відстані між ними.

$\Delta S$  – величина зміщення перерізів (абсолютний зсув);

$\text{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta S}{a}$  – відношення абсолютного

зсуву до відстані між площинами, що зміщуються, називають кутом зсуву, або просто **відносним зсувом**.



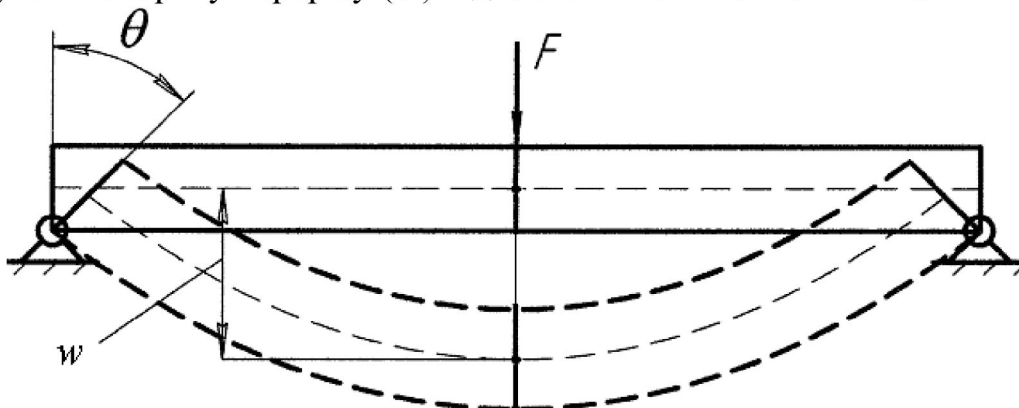
**3. Кручення.** Такий вид деформування виникає при дії на стержень зовнішніх сил, що утворюють момент пари сил площа дії якої є перпендикулярна відносно поздовженої осі стержня.

$\varphi$  – кут повороту одного перерізу відносно іншого

(абсолютний кут закручування);

$\theta = \frac{\varphi}{l}$  – відносний кут закручування.

**4. Згин.** Деформація згину полягає у викривленні осі прямого стержня або в зміні кривизни кривого стержня. Характеризується величиною прогину ( $w$ ) і кутом повороту перерізу ( $\theta$ ) відносно його початкового положення.



## ЛЕКЦІЯ № 10

План лекції:

1. Графічний розв'язок прямої задачі плоского напруженого стану.
2. Зворотна задача плоского напруженого стану і її графічний розв'язок.
3. Об'ємний напружений стан і визначення напружень в точках тіла.
4. Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука.
5. Потенційна енергія деформації.

**Література:** [1] – с.162÷177; [2] – с.128÷139.

### 1. Графічний розв'язок прямої задачі плоского напруженого стану

Наряду з аналітичним розв'язком задачі по визначенню напруженого стану на похилій площині існує і так названий графічний метод по його визначенню за допомогою круга Мора.

**Дано:**  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$

**Визначити:**  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\alpha$  і  $\tau_\beta$

**Розв'язок :**

Із  $\Delta D_\alpha C K_\alpha$  знаходимо:

$D_\alpha K_\alpha$  дорівнює дотичному напруженню  $\tau_\alpha$ ;

$OK_\alpha$  – дорівнює

нормальному напруженню  $\sigma_\alpha$ .

Доведемо це:

$$R = \frac{OA - OB}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};$$

$$OC = \frac{OA + OB}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2};$$

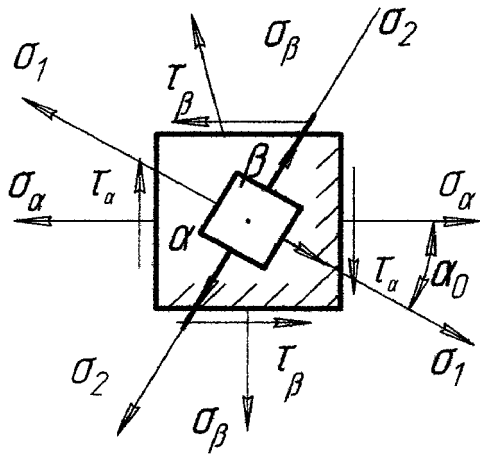
$$\begin{aligned} CK_\alpha &= R \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \Rightarrow OK_\alpha = OC + CK_\alpha = \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_2 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OK_\alpha = \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ D_\alpha K_\alpha = \tau_\alpha = R \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

Діаметрально протилежно будуть відкладатися нормальне напруження  $\sigma_\beta$  і дотичне напруження  $\tau_\beta$ . Необхідно сказати про полюс у т. Р і про напрямки напружень  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ . Провівши пряму з т.  $D_\alpha$  паралельно осі абсцис до перетину з колом, або з т.  $D_\beta$  паралельну осі ординат, отримаємо т. Р (полюс). З'єднавши цю точку, відповідно, з т. А і т. В, отримаємо напрямки нормальних

напружень на площадках  $\alpha$  і  $\beta$ , як показано на рисунку.

### Зворотна (обернена) задача плоского напруженого стану



По величині нормальних і дотичних напружень в двох взаємно перпендикулярних похилих площинах  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\tau_\beta$  необхідно визначити величину і напрямок дій головних напружень.

Припустимо, що нам відома величина головних максимальних напружень на похилій площині –  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$ . Тоді, скориставшись раніше отриманими залежностями прямої задачі для визначення напружень, матимемо:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_{\max} \cos^2 \alpha_0 + \sigma_{\min} \sin^2 \alpha_0 & (1) \\ \sigma_\beta = \sigma_{\max} \sin^2 \alpha_0 + \sigma_{\min} \cos^2 \alpha_0 & (2) \end{cases}$$

Складемо ці рівняння:

$$\boxed{\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_{\max} + \sigma_{\min}} \quad (*)$$

Віднімемо від першого друге рівняння:

$$\boxed{\sigma_\alpha - \sigma_\beta = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \cos 2\alpha_0} \quad (3)$$

З третього рівняння знаходимо:

$$\boxed{\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} \quad (4)$$

Розділимо рівняння для визначення  $\tau_\alpha$  із прямої задачі на  $\cos 2\alpha_0$  і скориставшись виразом (3), враховуючи, що  $\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$ , будемо

мати:

$$\frac{2\tau_\alpha}{\cos 2\alpha_0} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \operatorname{tg} 2\alpha_0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \cos 2\alpha_0} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}}$$

Цією формулою можна користуватися тільки для кутів  $\alpha_0 < 45^\circ$ . Для всіх інших

випадків кут  $\alpha_0$  визначається так:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}}$$

Повернемося до рівняння (4) і запишемо його так:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sqrt{1 + \frac{(2\tau_\alpha)^2}{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2}} \Rightarrow (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + (2\tau_\alpha)^2} \quad (5)$$

Складаючи чи віднімаючи рівняння (5) з рівнянням (\*) будемо мати:

$$\boxed{\sigma_{\max} \atop \sigma_{\min}} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

$$\text{Якщо: (1) } \begin{cases} \sigma_{\max} > 0 = \sigma_1 \\ \sigma_{\min} > 0 = \sigma_2 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \sigma_{\max} > 0 = \sigma_1 \\ \sigma_{\min} < 0 = \sigma_3 \\ \sigma_2 = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \sigma_{\max} < 0 = \sigma_2 \\ \sigma_{\min} < 0 = \sigma_3 \\ \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

Перепишемо формулу для  $\operatorname{tg}2\alpha_0$  таким чином:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}$$

ця формула визначає єдине значення кута  $\alpha$ , на який необхідно повернути нормаль  $n_\alpha$ , щоб отримати напрямок більшого **головного напруження**.

Правило визначення напрямку дії алгебраїчно більшого головного напруження в зворотній задачі плоского напруженого стану.

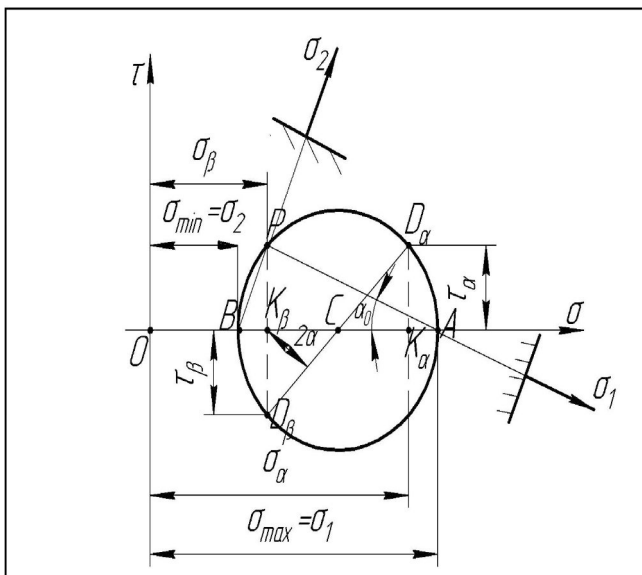
Для того, щоб побудувати кут  $\alpha_0$ , що визначає напрямок дії алгебраїчне більшого головного напруження необхідно:

- 1) провести нормаль до площини  $\alpha$ ;
- 2) повернути цю нормаль на кут  $\alpha_0$  з урахуванням його величини і

напрямку.

Повернута нормаль до площадки  $\alpha$  завжди буде характеризувати напрямок дії алгебраїчно більшого головного напруження.

### Графічне рішення зворотньої задачі плоского напруженого стану



Відрізняючою ознакою довільної площадки є наявність дотичних напружень на її гранях. За площадку  $\alpha$  зручніше всього вибирати одну із вертикальних площадок. А вже любую її перпендикулярну площадку – за  $\beta$ . Поряд з площадкою складають таблицю значень.

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \dots \text{ (знак) (МПа)} \\ \sigma_\beta = \dots \text{ (МПа)} \\ \tau_\alpha = -\tau_\beta \text{ (МПа)} \end{cases}$$

Основні положення графічного розв'язку задачі:

1. Будуємо т.  $D_\alpha$ , відкладаючи на осях  $\sigma O\tau$  значення  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$ .
2. Будуємо аналогічно т.  $D_\beta$ , відкладаючи на осях  $\sigma O\tau$  значення  $\sigma_\beta$  і  $\tau_\beta$ .
3. З'єднуємо т.  $D_\alpha$  і  $D_\beta$  прямою.
4. На відріжку  $D_\alpha D_\beta$ , як на діаметрі, будуємо круг.
5. Для визначення напрямку дії головних напружень необхідно побудувати полюс  $P$ . Для цього із т.  $D_\alpha$  проведемо пряму паралельну осі абсцис ( $\sigma$ ) до

перетину з кругом. А потім із цієї точки через точки, перетину круга з віссю абсцис (т. А і т. В) проведемо прямі, що будуть вказувати напрямки дії головних напружень.

Враховуючи прийняте правило знаків, знайдемо вираз для тангенсу кута нахилу головного напруження  $\sigma_1$  по відношенню до осі абсцис  $\sigma$ .

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{PK_{\beta}}{AK_{\beta}} = -\frac{PK_{\beta}}{OA - OK_{\beta}} = -\frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_1 - \sigma_{\beta}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\tau}{\sigma_1 - \sigma_{\beta}}}$$

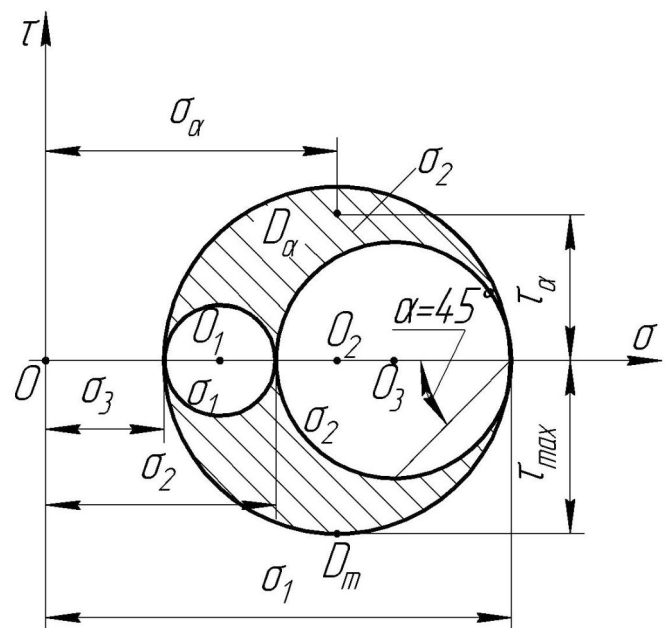
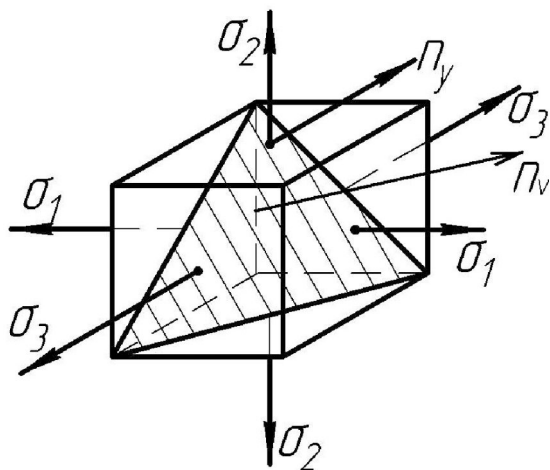
### 3. Об'ємний напружений стан в точці тіла

Об'ємним називають напружений стан тіла при якому всі три головні напруження дорівнюють нулю.

Дано:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – кути до нормалі  $n_v$ .

Знайти:  $\sigma_v, \tau_v$ .

Графічно це виглядає так:



$$\boxed{\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3}$$

$$\boxed{\tau_v = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_v^2}}$$

Припустимо:  $\sigma_1 > 0$ ;  $\sigma_2 > 0$ ;  $\sigma_3 > 0$ .

Максимальні дотичні напруження в точці тіла будуть діяти на площадках, що паралельні головному нормальному напруженню  $\sigma_2$  і нахилені під кутом

$\alpha = 45^\circ$  до головних нормальних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ .

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

**Октаедричною площадкою** називається площадка, яка рівнонахилена до всіх трьох головних нормальних напружень.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{\text{окт}}$$

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

#### 4. Деформації при об'ємному напруженому стані.

##### Узагальнений закон Гука

$$\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_1; \quad \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_2; \quad \frac{\Delta c}{c} = \varepsilon_3$$

Припустимо, що діє тільки  $\sigma_1$ , а

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Тоді  $\varepsilon_1^{(1)} = \frac{\sigma_1}{E}$  – поздовжнє збільшення розміру, а  $\varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_3^{(1)} = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$  – деформації в поперечних напрямках від дії напруження  $\sigma_1$ .

Якщо діє тільки  $\sigma_2$ , то:

$$\varepsilon_2^{(2)} = \frac{\sigma_2}{E}, \text{ а } \varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_3^{(2)} = -\nu \frac{\sigma_2}{E}.$$

Якщо діє тільки  $\sigma_3$ , то:  $\varepsilon_3^{(3)} = \frac{\sigma_3}{E}$ , а  $\varepsilon_1^{(3)} = \varepsilon_2^{(3)} = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$ .

Тоді повна деформація в напрямку дії  $\sigma_1$  буде дорівнювати:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E},$$

а відповідно повна деформація тіла буде виглядати так:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \text{Це і є узагальнений закон Гука, в напруженнях,}$$

який дозволяє встановити взаємозв'язок між лінійними деформаціями і головними нормальними напруженнями. Цей закон Гука справедливий не тільки для головних площадок, але і для відносних деформацій по любому із трьох взаємно перпендикулярних напрямків.

Для плоского напруженого стану закон Гука виглядає так:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu\sigma_2] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu\sigma_1] \end{cases} \quad \text{– в напрямку дії напружень } \sigma_1 \text{ і } \sigma_2.$$

Узагальнений закон Гука дає можливість оцінити відносну зміну об'єму. Так, до деформування елемент займав об'єм  $V_0 = abc$ . В деформованому стані:  $V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c)$ . Тоді:

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) - abc}{abc} = \dots = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Виразимо головні подовження через головні напруження і будемо мати:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Із цього співвідношення видно, що відносна зміна об'єму дорівнює нулю в двох випадках:

- 1) коли коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.5$  (гума)
- 2) при чистому зсуві, для якого  $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$ , а  $\sigma_2 = 0$ .

При рівномірному всебічному стиску, коли:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p \Rightarrow \left[ \varepsilon_v = -\frac{p}{K} \right], \text{ де } \left[ K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \right].$$

Величина  $K$  називається модулем об'ємної деформації матеріалу.

## 5. Потенціальна енергія деформації

$$\left[ U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \right] \quad \text{– загальна питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані}$$

$$\left[ U_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right] \quad \text{– питома потенціальна енергія деформування, що йде на зміну об'єму.}$$

$$\left[ U_\phi = U - U_v = \frac{1 + \nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \right] \quad \text{– питома потенціальна енергія формозміни (витрачається на зміну форми елемента, який деформується).}$$

## ЛЕКЦІЯ № 11

### Теорія міцності

План лекції:

1. Теорії міцності. П'ять основних теорій міцності.
2. Зсув. Напруження і деформації
3. Умови міцності при зсуві.

**Література:** [1] – с. 180÷194; [2] – с. 142÷151, 158÷183.

Першочерговою задачею інженерного розрахунку є оцінка міцності деталі по відомому напруженому стані.

В практиці розрахунків на міцність існує п'ять основних критеріїв такої оцінки, або ж іншими словами – **п'ять основних теорій міцності**.

**1. Теорія максимальних нормальних напружень:** Міцність конструкції буде забезпечена в тому випадку, коли максимальні нормальні напруження, що виникають в її небезпечному перерізі (точці), не будуть перевищувати допустимі

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (*)$$

За  $\sigma_{\max}$  може виступати як  $\sigma_1$ , так і  $\sigma_3$ . І тоді:  $\sigma_1 \leq [\sigma +]$  або  $\sigma_3 \leq [\sigma -]$ , де

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{загр}}}{n}, \text{ а під } \sigma_{\text{загр}} = \begin{cases} \sigma_s - \text{для крихких матеріалів} \\ \sigma_T - \text{для пластичних матеріалів} \end{cases}$$

$n$  -- коефіцієнт запасу міцності:  $1,2 \leq n \leq 3 \div 5$

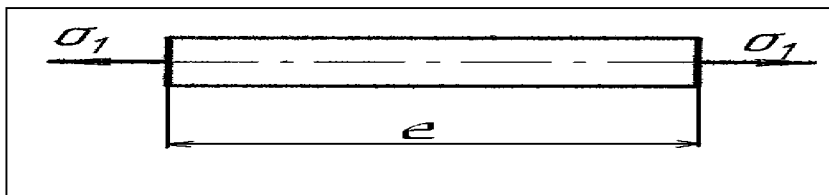
**Недоліки:**

Не враховуються два інших головних напруження. Ця теорія дає хороші результати тільки для дуже крихких матеріалів: скло, фарфор, кераміка, цегла і ін.

**2. Теорія максимальних відносних деформацій:** міцність конструкції буде забезпечена в тому випадку, коли максимальні відносні лінійні деформації не будуть перевищувати допустимі деформації.

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon] \quad (*)$$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] - \text{визначається при об'ємному напруженому}$$



стані (О.Н.С.)

$[\varepsilon]$  - визначається при лінійному напруженому стані.

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}. \text{ Підставимо}$$

значення деформації при лінійному напруженому стані (Л.Н.С.) в рівняння (\*) будемо мати:

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E} \Rightarrow \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

Еквівалентне напруження в цьому випадку:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

**Застосовується** також тільки для крихких матеріалів.

**3. Теорія максимальних дотичних напружень:** міцність конструкції буде забезпечена в тому випадку, коли максимальні дотичні напруження, що виникають в її загрозовій (небезпечній) точці не будуть перевершувати допустимих дотичних напружень.

$$\tau_{\text{max}} \leq [\tau] \quad (*)$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ – визначається при О.Н.С.}$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{n} \text{ – визначається при Л.Н.С.}$$

Підставляємо в рівняння (\*) і маємо :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Ця теорія застосовується в основному для пластичних матеріалів. Її основний недолік: не враховується одне із головних нормальних напружень.

**4. Енергетична теорія міцності:** міцність конструкції буде забезпечена в тому випадку, коли питома потенційна енергія деформування матеріалу не перевищує величину допустимої енергії формозміни для нього.

$$U_{\phi} \leq [U_{\phi}] \quad (*)$$

$U_{\phi}$  визначається при О.Н.С.  $[U_{\phi}]$  визначається при Л.Н.С.

Таким чином, якщо питома потенційна енергія формозміни, що визначається при О.Н.С. буде дорівнювати:

$$U_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

А допустима питома потенційна енергія формозміни, що визначається при Л.Н.С. буде дорівнювати:

$$[U_{\phi}] = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma^2], \quad \text{то} \Rightarrow$$

$$[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \leq [\sigma]^2$$

Для пластичних матеріалів:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \frac{\sigma_T}{n}$$

$$\text{або ж так: } \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_T}{n}$$

$$\text{чи так: } \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]$$

Для крихких матеріалів:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_B}{n} = [\sigma]$$

Еквівалентне напруження по цій теорії буде:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Використовуючи залежність для напружень на октаедричних площадках

можемо записати, що:  $\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

В розрахунках на міцність часто використовується так звана інтенсивність напружень, що зв'язана з  $\tau_{\text{окт}}$  залежністю:  $\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}$ , або ж

виразивши її через головні напруження будемо мати:

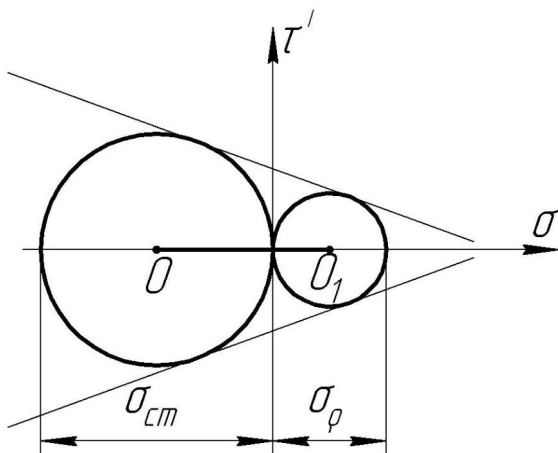
$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Таким чином IV теорію міцності можна записати, виходячи із критерію постійності октаедричних напружень в такому вигляді:

$$\tau_{\text{окт}} \leq [\tau_{\text{окт}}]$$

**Ця теорія знайшла найкраще застосування для пластичних матеріалів.**



## 5. Теорія міцності Мора.

Враховуючи взаємодію двох головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ . Похибка в розрахунках від не врахування  $\sigma_2$  складає не більше (12-15)%.

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{V}} = \sigma_1 - \left[ \frac{\sigma_+}{\sigma_-} \right] \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Дана теорія міцності застосовується в основному для матеріалів, що знаходяться в крихкому стані.

Всі п'ять основних теорій міцності можливо записати у вигляді нерівності:

$$\sigma_r \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_r$  – розрахункове напруження в загрозливій (небезпечній) точці. Тоді:

$$\text{I} \rightarrow \sigma_r^{\text{I}} = \sigma_1, \text{ або } \sigma_r^{\text{I}} = |\sigma_3|;$$

$$\text{II} \rightarrow \sigma_r^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3);$$

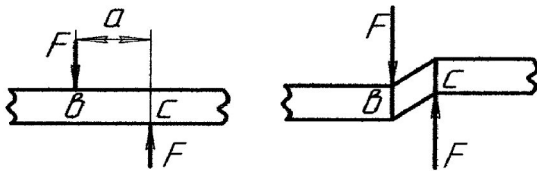
$$\text{III} \rightarrow \sigma_r^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3;$$

$$\text{IV} \rightarrow \sigma_r^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$

$$\text{V} \rightarrow \sigma_r^{\text{V}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3.$$

## 2. Зсув. Напруження і деформації

Деформація зсуву відбувається тоді, коли із шести внутрішніх силових факторів не дорівнюють нулю тільки поперечні сили  $Q_y$  чи  $Q_z$ .

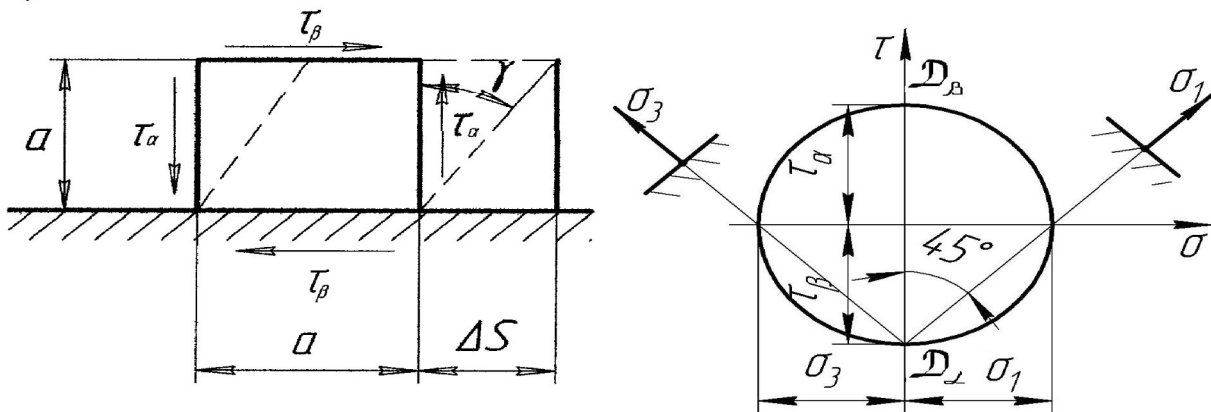


По методу перерізів знаходимо, що на відрітку (bc) діє внутрішнє зусилля  $Q = F$ . Записуючи інтегральне рівняння рівноваги будемо мати:  $Q = \int_A \tau da \Rightarrow$  після

інтегрування, вважаючи, що дотичні напруження розподіляються рівномірно по перерізу:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Це припущення досить умовне, але в більшості випадків інженерних розрахунків воно справедливе. Напружений стан, при якому по гранях прямокутного елемента діють тільки дотичні напруження називається *чистим зсувом*.



В цьому випадку:  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ ;  $\tau_\alpha = -\tau_\beta$  і деформація тіла зводиться тільки до зміни форми, а  $v = \text{const}$ .

$\Delta s$  – абсолютне зміщення граней елемента, або абсолютний зсув.  $|\sigma_1| = |\sigma_3| = \tau$ ,

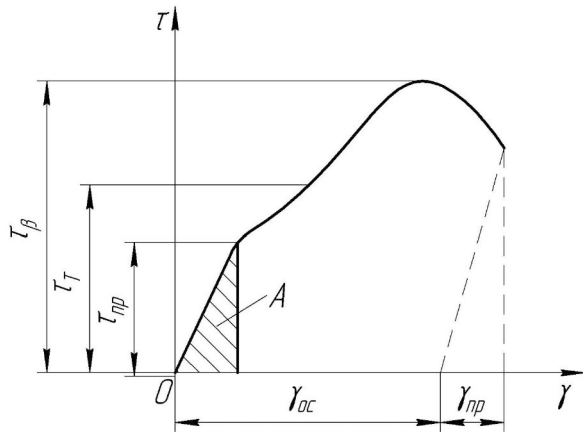
де  $\tau = \tau_\alpha = |\tau_\beta|$

$\gamma$  – відносний кут зсуву, або просто відносний зсув.

Тоді для його визначення необхідно:  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}$ , або ж коли врахувати, що

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \text{ будемо мати: } \gamma = \frac{\Delta s}{a}$$

Діаграма деформування при зсуві, аналогічна діаграмі деформування при розтязі-стиску.



На ділянці пропорційності зберігається пропорційна залежність між дотичними напруженнями і деформаціями зсуву:

$\tau = G\gamma$  - ця залежність носить назву закону Гука при зсуві, де  $G$  - (Па, МПа) модуль пружності другого роду..

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{F a}{AG} \Rightarrow \Delta s = \frac{F a}{AG} \quad \text{- це}$$

закон Гука при зсуві в абсолютних величинах.  $AG$  - жорсткість поперечного перерізу при зсуві.

По аналогії з питомою потенційною енергією при розтязі-стиску, будемо мати:

$$u = \frac{\tau \gamma}{2} \text{ чи так: } u = \frac{\tau^2}{2G}, \text{ а при розтязі-стиску } u = \frac{\sigma^2}{2E}. \text{ Тоді повна потенційна}$$

$$\text{енергія деформації при зсуві } u = \frac{F \Delta s}{2} = \frac{F^2 a}{2GA}$$

Необхідно пам'ятати, що між модулями першого і другого роду існує

$$\text{взаємозв'язок, який виражається так: } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### Умови міцності при зсуві.

1. По другій теорії  $\sigma_1 - \nu \sigma_3 \leq [\sigma]$  будемо мати:  $\tau \leq \frac{[\sigma]}{1+\nu}$ , так як  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ .

$$\tau = (0.7 \div 0.8)[\sigma].$$

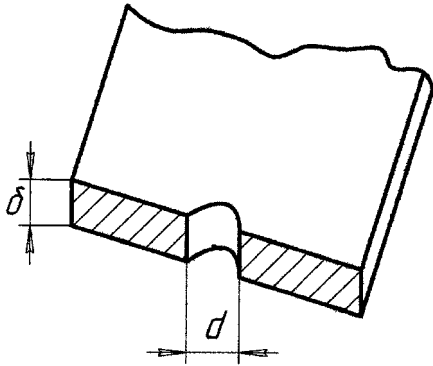
2. По третій теорії міцності:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$  маємо:  $\tau - (-\tau) \leq [\sigma] \Rightarrow \tau = \frac{[\sigma]}{2} = [\tau]$

$$\Rightarrow [\tau] = 0.5[\sigma]$$

3. По четвертій теорії:  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} \leq [\sigma] \Rightarrow \tau = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0.6[\sigma]$

**Умова міцності на зсув (зріз) в загальному вигляді:**  $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]$

Для болта, чи заклепки:  $\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d^2} \Rightarrow \frac{4F}{\pi d^2} \leq [\tau] \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]}}$



**Умова міцності на зминання:**

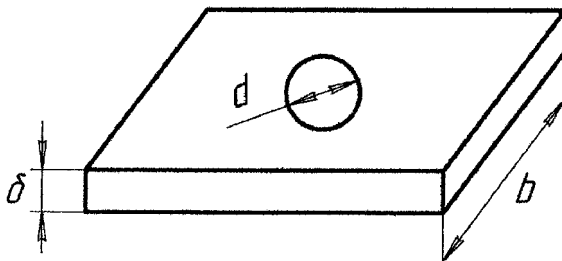
$A_{\text{змин.}} = d\delta$ , де  $d$  – діаметр болта (заклепки)  $\delta$  – висота перерізу, що скріплюється.

$$\sigma_{\text{змин}} = \frac{F}{\delta d} \leq [\sigma]_{\text{змин}}$$

де  $[\sigma]_{\text{змин}} = 2 \div 2.5[\sigma]$

$$d \geq \frac{F}{\delta[\sigma]_{\text{змин}}}$$

**Умова міцності на розрив**



$$\sigma_p = \frac{F}{A_{\text{болт}}} = \frac{F}{\delta(b-d)} \leq [\sigma],$$

де  $A = \delta(b-d)$  – площа пластини, яка працює на розрив

## ЛЕКЦІЯ № 12

### Згин.

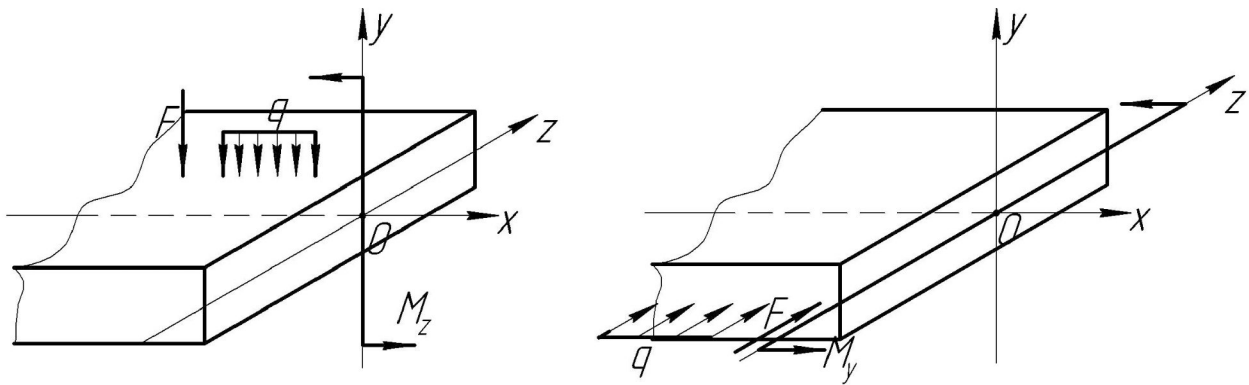
#### Нормальні напруження при плоскому згині. Умова міцності по нормальних напруженнях при згині.

План лекції:

1. Плоский згин.
2. Визначення нормальних напружень . Чистий згин.
3. Аналіз розподілу напружень по висоті поперечного перерізу.
4. Умови міцності по нормальних напруженнях при плоскому згині.
5. Підбір перерізів.

Література: [1] – с. 236÷257; [2] – с. 221÷233, с. 258÷267.

1. При поперечному плоскому згині із шести внутрішніх силових факторів відмінними від нуля є два: поперечна сила  $Q$  і згинальний момент  $M$ .



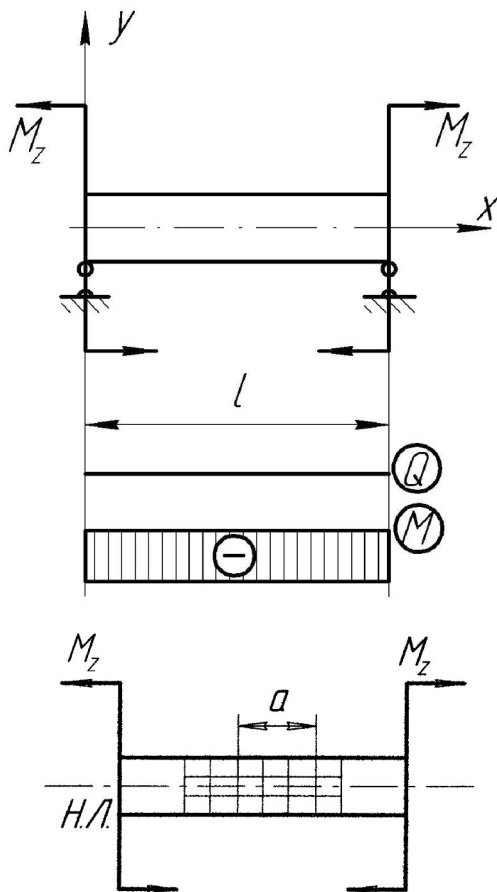
$$\left. \begin{array}{l} Q_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \\ N = Q_z = M_y = M_{кр} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{В площині} \\ \text{хоу} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_z \neq 0 \\ M_y \neq 0 \\ N = Q_y = M_z = M_{кр} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{В площині} \\ \text{хоz} \end{array}$$

*Плоским* називається згин, при якому всі силові фактори, що діють на тіло, обов'язково прикладені в одній і тій же площині і ця площина обов'язково співпадає з однією із головних площин інерції перерізу.

Так як при плоскому згині в загальному випадку одночасно два силових фактори відмінні від нуля, то в будь-якій довільній точці любого довільного перерізу по довжині стержня виникають два напруження :

- нормальне напруження, величина і знак якого залежить від згинального моменту;
- дотичне напруження, величина і знак якого залежить тільки від поперечної сили.

Для визначення нормальних напружень розглянемо окремий випадок плоского згину – **чистий згин**. В цьому випадку навантаження, із шести внутрішніх зусиль залишається тільки  $M_{зг}$ .



## 2. Визначення нормальних напружень.

### Чистий згин.

Для визначення напружень розглянемо дану задачу в загальному плані:

1) Статична сторона задачі – рівняння інтегральної рівноваги:

$$M_z = \int_A \sigma y da \quad (1)$$

Виникаючі при цьому нормальні напруження залежать тільки від величини і напрямку дії  $M_z$ .

2) Геометрична сторона задачі.

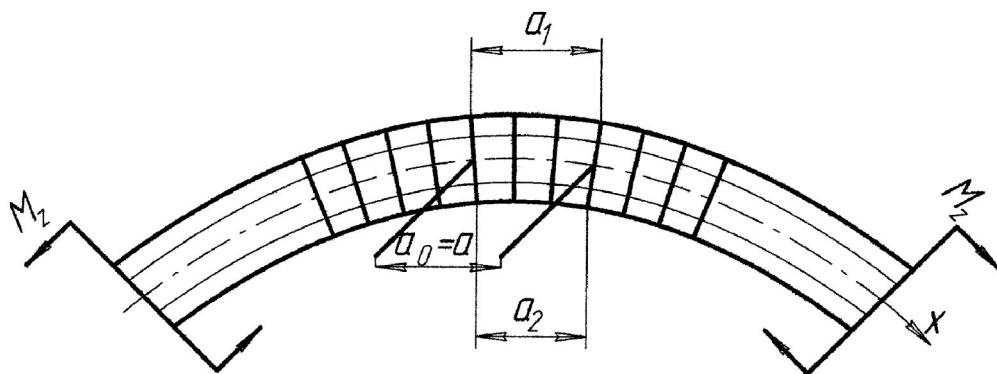
Поздовжні лінії викривляються по дузі;

1. Виконується гіпотеза плоских перерізів; тобто перерізи залишаються паралельними один одному і в вертикальному напрямку вони не діють один на одного, а це означає, що нормальні напруження в цьому напрямку будуть дорівнювати нулю.

$$a_1 > a$$

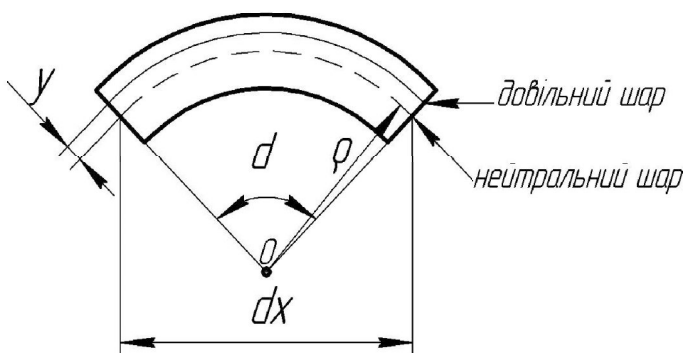
$$a_0 = a$$

$$a_2 < a$$



2. Поперечні перерізи завжди перетинаються з поздовжніми волокнами під кутом рівним 90.

Завжди існує шар, що називається **нейтральним** і який має особливість в результаті якої його волокна залишаються без зміни довжини, тобто не подовжуються і не скорчуються.



Розглянемо довільний шар бруса, що знаходиться на відстані "y" від нейтрального шару.

$\rho$  - радіус кривизни нейтрального шару.

Відтак відносно подовження

довільного шару при згині буде дорівнювати:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\Theta - dx}{dx}; \quad \text{де } dx = \rho d\Theta$$

Оскільки довжина нейтрального шару буде незмінною.

$$\text{В результаті:} \quad \varepsilon = \frac{\rho d\Theta + yd\Theta - \rho d\Theta}{\rho d\Theta} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\rho} y \quad (2)$$

де  $\frac{1}{\rho}$  – кривизна нейтрального шару.

Отже геометричний аспект задачі показує, що відносно подовження (деформація) волокна пропорційне відстані його від нейтрального шару.

### 3) Фізична сторона задачі.

Оскільки, як ми вже відмічали, волокна балки знаходяться в лінійному напруженому стані, то закон Гука запишемо так:

$$\sigma = E\varepsilon = Ey \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

### 4) Синтез:

$$M_z = \int_A Ey \frac{1}{\rho} y dA = E \frac{1}{\rho} \int_A y^2 dA = E \frac{1}{\rho} I_z$$

Отримане співвідношення запишемо так:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}} \quad (4)$$

(4) - закон Гука при чистому згині.

$(EI_z)$  – жорсткість поперечного перерізу при згині.

Підставимо (4) в (3) будимо мати:

$$\boxed{\sigma = \frac{M_z y}{I_z}} \quad (5)$$

(5) - формула Нав'є.

Ця формула використовується для визначення нормальних напружень при плоскому згині в будь-якій точці поперечного перерізу по його висоті.

Для визначення положення нейтрального шару по висоті перерізу, врахуємо, що при чистому згині  $N = 0$  і  $M_y = 0$  в площині  $хоу$ .

Так як:  $N = \int_A \sigma dA$ ;  $M_y = \int_A \sigma z dA$ , то:  $N = \int_A \frac{M_z y}{I_z} dA = \frac{M_z}{I_z} \int_A y dA$ , оскільки  $\frac{M_z}{I_z} \neq 0$ ,

то  $\Rightarrow S_z = \int_A y dA = 0$ , тобто статичний момент площі поперечного перерізу і

відцентровий момент інерції  $I_{zy} = \int_A yz dA = 0$  відносно нейтрального шару і осі

$y$ , що перпендикулярна йому дорівнюють нулю.

Таким чином оскільки  $S_z$  і  $I_{zy}$  - дорівнюють нулю, то нейтральний шар повинен співпадати з горизонтальним головним центральним шаром, а нейтральна вісь любого перерізу повинна співпадати з горизонтальною

головною центральною віссю цього перерізу.

$$\text{І так ми маємо: } \sigma = \frac{M_z y}{I_z},$$

де  $M_z$  – згинальний момент в перерізі, що розглядається.

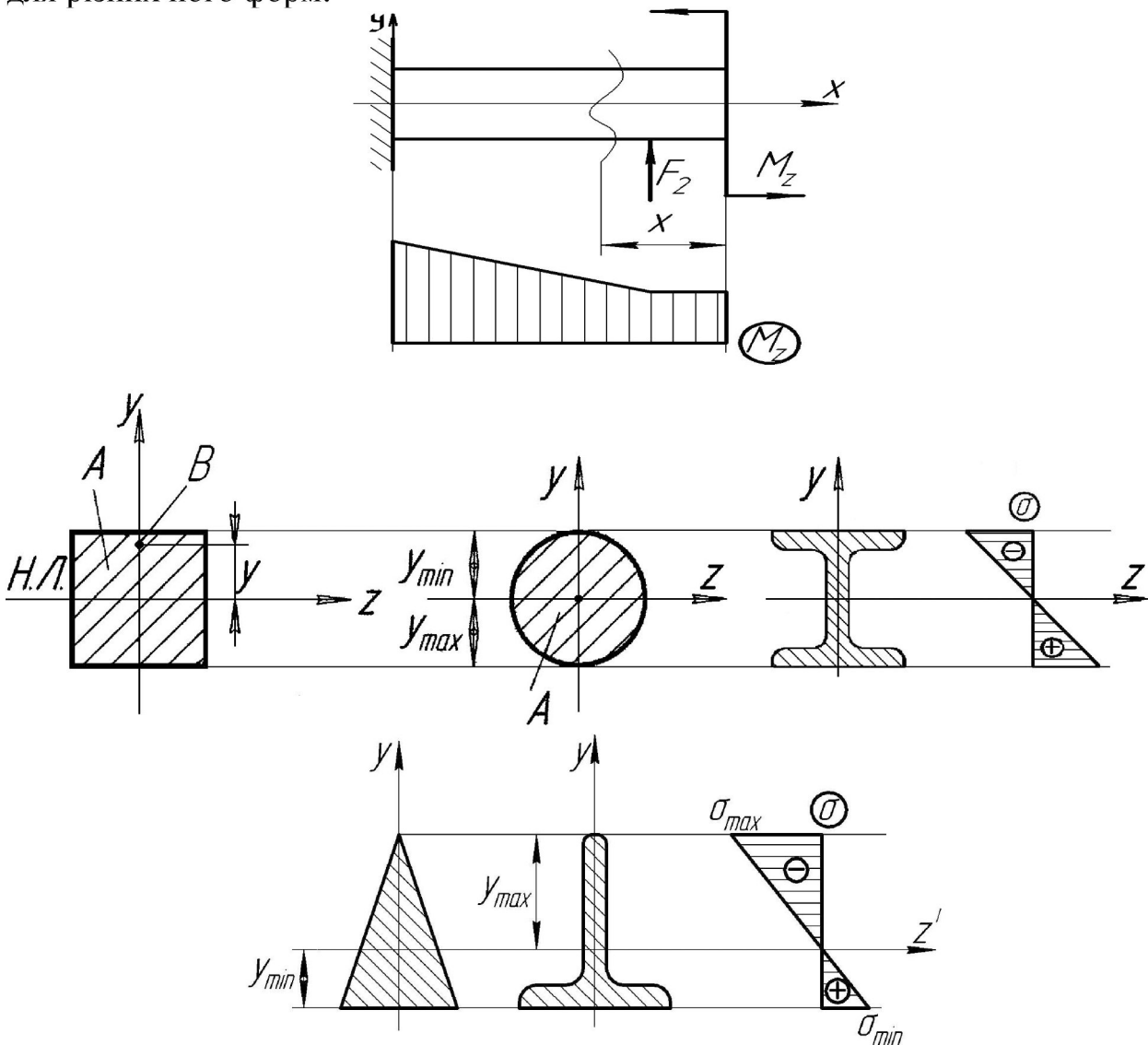
$y$  – відстань від горизонтальної головної, центральної осі інерції перерізу, до тої точки, в якій визначаються нормальні напруження.

$I_z$  - момент інерції відносно головної горизонтальної центральної осі перерізу.

Ми отримали формулу для визначення напружень в випадку дії чистого згину, але і для загального випадку дії плоского згину напруження визначають по цій же формулі, умовно вважаючи, що волокна при згині ніякого тиску одне на друге в вертикальному напрямку не здійснюють. Тобто в будь-якому перерізі, що розглядається і в будь-якій точці цього перерізу по гранях площадки, що виділена навкруги неї, нормальні напруження можуть діяти тільки в горизонтальному напрямку паралельні осі балки.

### 3. Аналіз розподілу напружень по висоті поперечного перерізу.

Проаналізуємо закон розподілу нормальних напружень по висоті перерізу для різних його форм.



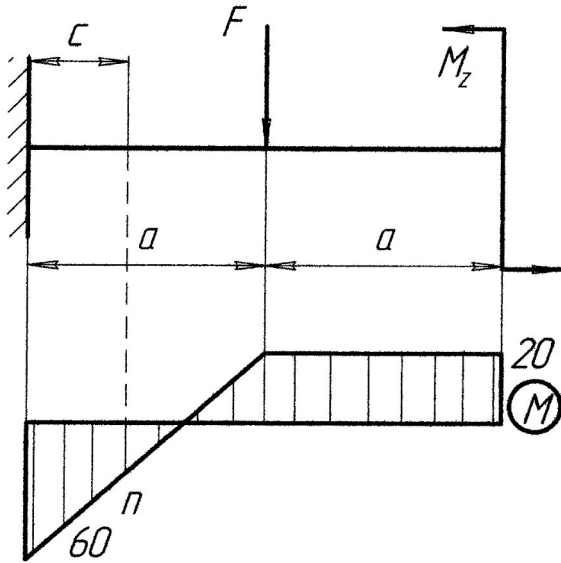
$$\sigma_A = +\frac{M_z y}{I_z}; \sigma_A = +\frac{M_z y'}{I_z}$$

Розподіл нормальних напружень для симетричних перерізів відбувається симетрично відносно нейтральної осі.

Так для симетричної фігури  $y_{\max} = y_{\min}$  і відповідно  $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$ . Для несиметричних фігур  $y_{\max}$  і  $y_{\min}$  визначаються в кожному випадку окремо:

$$\sigma_{\min}^{\max} = +\frac{M_z y_{\min}^{\max}}{I_z}$$

### Приклад №1.



**Дано:**

$$M_z = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$F = 80 \text{ кН.}$$

$$a = 1 \text{ м; } c = 0,5 \text{ м}$$

$$b = 4 \text{ см; } \frac{h}{b} = 2$$

**Визначити:** Напруження в точці А, що знаходиться на 1 см від нижнього краю перерізу і на "с" від місця закріплення балки.

**Рішення.**

$$\sigma_A = +\frac{M_z^{(n-n)} y_A}{I_z}$$

$M_z^{(n-n)}$  – визначимо із епюри М по відношенню сторін прямокутних трикутників.  $M_z^{(n-n)} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м.}$

$$\sigma_A = -\frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 12}{4 \cdot 8^3 \cdot 10^{-8}} = -325 \text{ (МПа)}$$

Позначимо відношення  $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$  і

назвемо його осьовим моментом опору перерізу. Тоді максимальні напруження, що виникають на гранях перерізу будуть

визначатися так:

$$\sigma_{\max} = -\frac{M_{zg}}{W_z}$$

З цього співвідношення видно, що напруження, які виникають в перерізі прямо пропорційні згинальному моменту, що діє в цьому перерізі і обернено пропорційні моменту опору площі поперечного перерізу.

Витрата матеріалу пропорційна площі перерізу А. Відповідно, чим більше

співвідношення  $\frac{W}{A}$ , тим більший  $M_{gr}$  витримує переріз з заданою площею, і тим менше буде витрата матеріалу. Це співвідношення приймають за критерій по якому оцінюють якість профілю.

#### 4. Умова міцності по нормальних напруженнях при плоскому згині.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W} \leq [\sigma] \text{ – умова міцності для пластичних матеріалів і}$$

симетричних перерізів

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W} \leq [\sigma_+]$$

- умова міцності для несиметричних перерізів із

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_{\min}|}{W} \leq [\sigma_-]$$

крихких матеріалів.

По вказаних умовах міцності завжди проводиться визначення чи підбір розмірів поперечного перерізу всіх конструкцій, що працюють в умовах плоского напруженого стану, або ж чистого згину.

При цьому величина моменту опору площі поперечного перерізу визначається як:

$$W \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}$$

#### Приклад №2

Для попередніх умов навантаження провести перевірку міцності, якщо переріз являє собою двутавр №14 із ст. 3.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W} \leq [\sigma] \quad \sigma_{\max} = \frac{|60 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}|}{81,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} \leq 160 \text{ (МПа)}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = 722 \text{ (МПа)} \square [\sigma] = 160$$

Таким чином двутавр №14 не задовольняє умовам міцності.

#### 5. Підбір перерізів.

Для того, щоб визначити необхідні розміри поперечного перерізу потрібно;

1. Побудувати епюру згинальних моментів;
2. На цій епюрі визначити переріз, де діє max по модулю згинальний момент;
3. По вихідній нерівності  $W_z \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}$ , потрібно розрахувати величину ( $W_z$ ),

попередньо визначивши допустиме напруження для даного матеріалу;

4. Знаючи величину  $W_z$  і форму поперечного перерізу потрібно розрахувати відповідні розміри профілю.

При цьому, враховуючи епюру розподілу нормальних напружень по висоті перерізу, в умовах дії плоского згину, завжди потрібно пам'ятати про те, що найраціональнішою формою перерізу при згині є двутавр.

## ЛЕКЦІЯ № 13

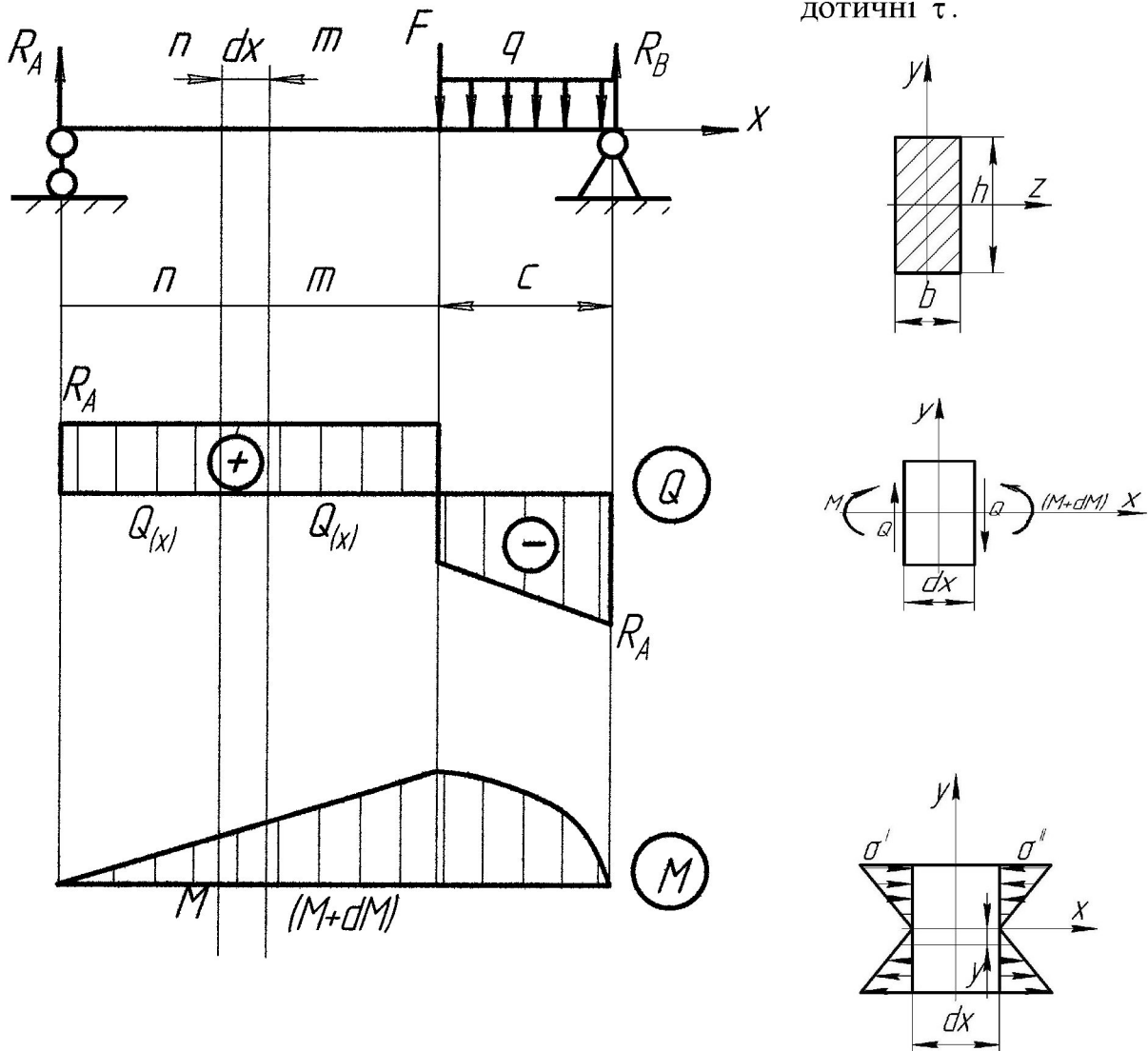
### Дотичні напруження при згині. Умова міцності по дотичних напруженнях. Аналіз плоского напруженого стану.

План лекції:

1. Визначення дотичних напружень при згині.
2. Епюри розподілу дотичних напружень по висоті перерізу,
3. Перевірка міцності при плоскому згині бруса.
4. Теорії міцності при згині.
5. Аналіз напруженого стану балки при згині.

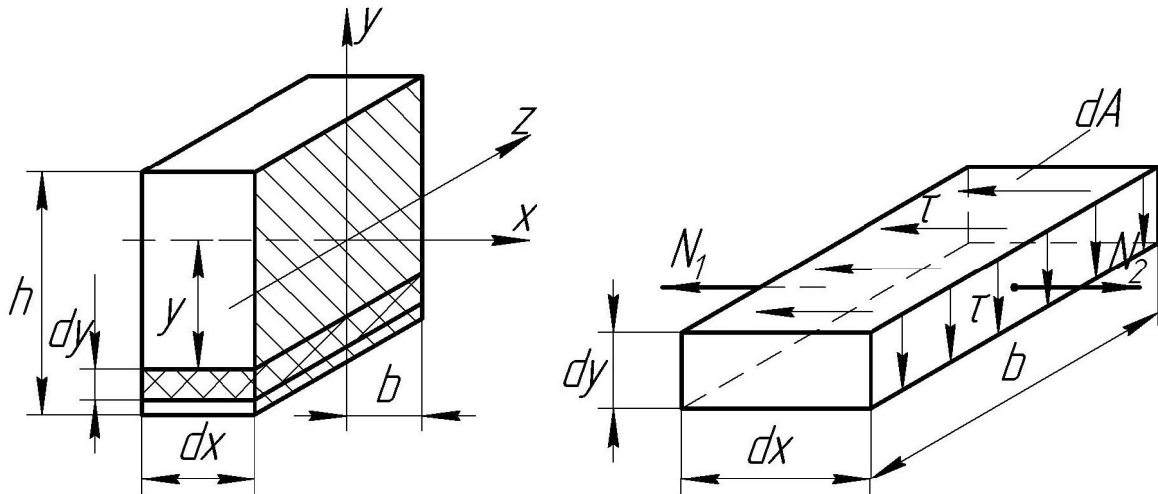
**Література:** [1] – с.243÷249; [2] – с. 298÷323

1. При поперечному згинанні тонкостінних брусів, коли в їх перерізах діють  $Q$  і  $M$ , виникають не тільки нормальні напруження  $\sigma$ , але також і дотичні  $\tau$ .



Розглянемо брус на двох опорах, що навантажений довільною системою зовнішніх сил.

Виходячи з епюр  $Q$  і  $M$  ми можемо говорити, що в будь-якому перерізі бруса діють поперечна сила  $Q$  і згинальний момент  $M$ , величина яких залежить від координати  $x$ .



Виділимо перерізами нескінченно малий елемент  $dx$ . Тоді в будь-якій точці лівого ( $n-n$ ) перерізу, що знаходиться на відстані  $y$  від нейтрального шару:

$$\begin{cases} \sigma' = \frac{M \cdot y}{I_z} \\ \sigma'' = \frac{(M + dM) \cdot y}{I_z} \end{cases}$$

– аналогічно для правого перерізу  $m-m$ . Проведемо ще один переріз на відстані  $y$  паралельний площині  $zox$  висотою  $dy$ , рівнодіюча, що буде діяти на боковій поверхні  $dA$  (рівномірно розподілених нормальних напружень)

$$dA = b \cdot dy \Rightarrow dN' = \sigma' \cdot dA \Rightarrow N_1 = \int_A \frac{M \cdot y}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_A y dA = \frac{M}{I_z} S_z(y), \text{ де } S_z(y) -$$

статичний момент площі.

Аналогічно для другої грані елементарної площадки:

$$N_2 = \frac{(M + dM)}{I_z} S_z(y).$$

Оскільки виділений елемент знаходиться в рівновазі і в силу закону парності дотичних напружень на його гранях будуть разом з нормальними діяти і дотичні напруження як показано на рисунку. Причому величина їх буде дорівнювати:  $dT = \tau' \cdot b dy = \tau \cdot b dx$ .

Проектуючи всі сили то діють на площадці на вісь  $x$  будемо мати:

$$\sum X = N_2 - N_1 - dT = N_2 - N_1 - \tau \cdot b dx \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{N_2 - N_1}{b \cdot dx} = \frac{dM \cdot S_z}{I_z \cdot b \cdot dx} = \frac{Q \cdot S_z}{I_z \cdot b}$$

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

$Q$  – поперечна сила

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z(y)}{I_z \cdot b} \text{ – формула Журавського для визначення дотичних напружень в}$$

любій точці поперечного перерізу при згині.

В цій формулі:

$Q$  – величина поперечної сили в перерізі, що розглядається. Її значення береться із епюри поперечних сил.

При цьому необхідно пам'ятати, що знак дотичних напружень завжди співпадає із знаком поперечної сили на епюрі в перерізі, що розглядається.

$I_z$  – момент інерції всього поперечного перерізу відносно його горизонтальної головної центральної осі інерції (нейтральної осі).

$S_z(y)$  – статичний момент інерції відсіченої частини площі відносно горизонтальної головної центральної осі. Розраховується як добуток відсіченої частини площі на її координату центру ваги, тобто на відстань між центрами (мається на увазі центр ваги відсіченої частини площі і площі всього перерізу).

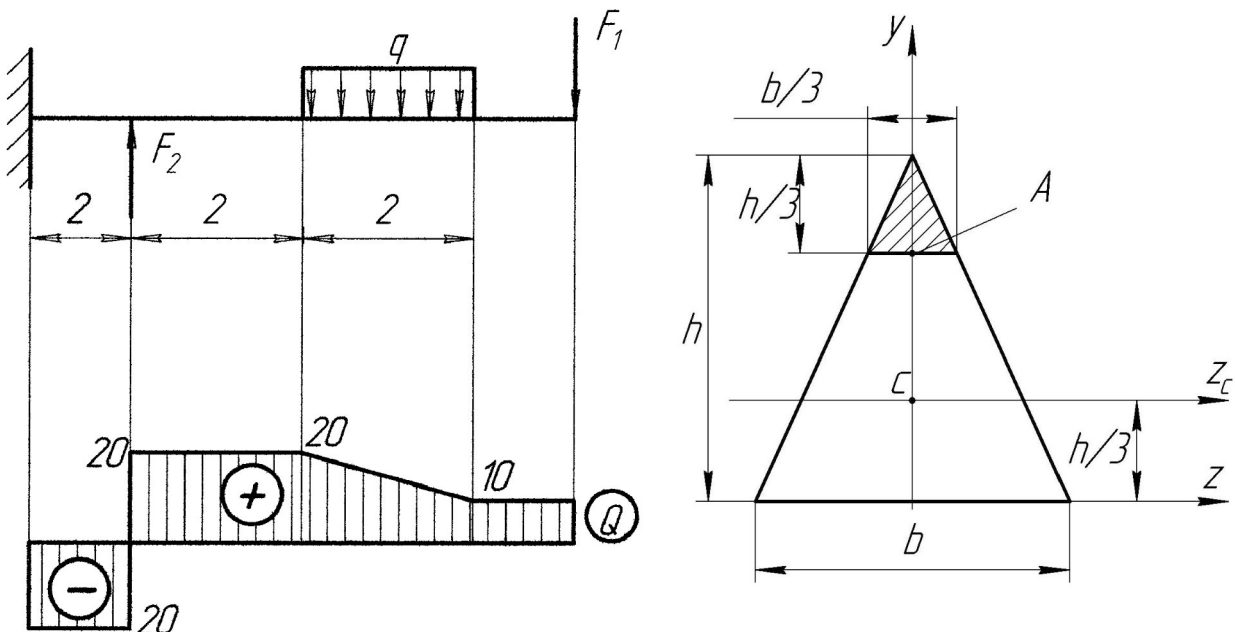
$b$  – ширина перерізу на рівні точки, що розглядається.

### Приклад.

Дано:

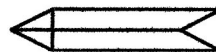
$$F_1 = 10 \text{ кН}; F_2 = 40 \text{ кН}; q = 5 \text{ кН/м.}$$

**Визначити:** величину дотичних напружень в зацімленні балки, що має трикутний поперечний перерізу, в точці А, яка знаходиться на відстані  $\frac{1}{3}h$  перерізу з розмірами  $b = 15 \text{ см}$ ;  $h = 21 \text{ см}$ .



$$\tau = \frac{Q \cdot S_z}{b \cdot I_z}; \quad \tau = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \left( \frac{h}{3} + \frac{h}{9} \right)}{\frac{b}{3} \cdot \frac{bh^3}{36}} = 16.9 \text{ (МПа)}$$

Д.з. визначити  $\sigma$ -ні напруження в т. А

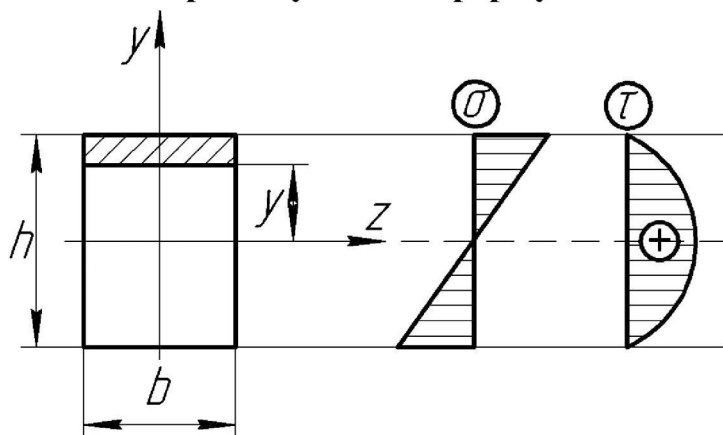


## 2. Епюри розподілу дотичних напружень по висоті перерізу для різних його форм

Використовуючи формулу Журавського  $\tau = \frac{Q \cdot S_z}{b \cdot I_z}$  будемо вважати, що

поперечна сила  $Q$  задана і, що вона додатна.

1. Тоді для прямокутного перерізу:



$$\tau_{\max} = K \tau_{\text{ср}}, \text{ де } K = 1.5.$$

$$\tau_{\max} > 0, \text{ т.як } Q > 0$$

Розглянемо довільний шар на відстані "у" і розрахуємо дотичні напруження в цих точках на цьому рівні.

$$\tau = \frac{Q \cdot S_z}{b \cdot I_z} = \frac{Q \cdot \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} \Rightarrow \tau = \frac{2}{3} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \text{ де}$$

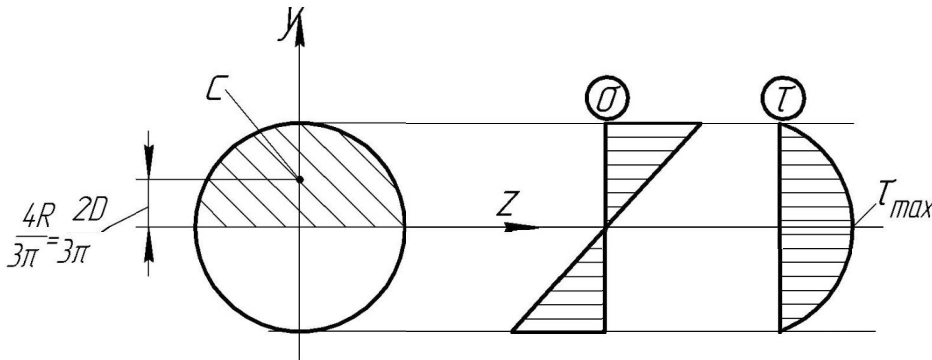
$S_z = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \left[ y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$  — ця величина становить статичний момент заштрихованого прямокутника.

Оскільки  $\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{Q}{A_{\text{прямокутника}}}$ , то відповідно, що  $\tau = \frac{2}{3} \tau_{\text{ср}} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)$  звідки:

1. При  $y = \pm \frac{h}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = 0$

2. При  $y = 0 \Rightarrow \tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ср}} = \frac{3Q}{2bh}$ .

2. Для **круглого перерізу**:



$$\tau_{\max} = K\tau_{\text{ср}}, \text{ де } K = 1.33.$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{z_{\max}}}{D \cdot \frac{\pi D^4}{64}}; \quad S_z = \frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{12} \quad \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{Q D^3 64}{12 D \cdot \pi D^4} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi D^2} = 1.33 \tau_{\text{ср}}$$

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

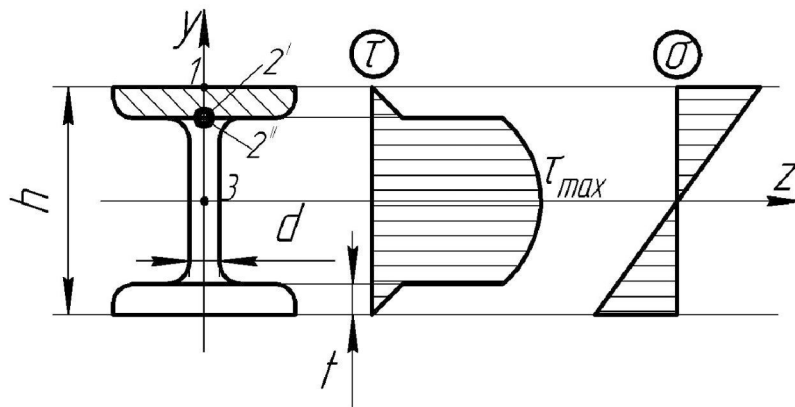
такими будуть дотичні напруження при умові, що розподіляються вони рівномірно

3. Для **двутаврового профілю**:

Побудуємо епюри розподілу дотичних і нормальних напружень для двутаврової балки, і запишемо вирази для визначення дотичних напружень в точках 2' і 2'', а також точки 3

$$\tau_{2'} = \frac{Q \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{b \cdot I_z}; \quad \tau_{2''} = \frac{Q \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{d \cdot I_z}; \quad \tau_{(3)\max} = \alpha_T \cdot \tau_{\text{номінальне}},$$

де  $\alpha_T$  – теоретичний коефіцієнт концентрації напруження.



### 3. Перевірка міцності при плоскому згині брусу

При плоскому згині брусу проводять три перевірки його міцності:

1. Перевірка міцності по максимальних нормальних напруженнях (основна).

Перевіряються точки, що належать периферійним шарам тобто, таким які максимально віддалені від **нейтрального шару**.

Перевірка відбувається з урахуванням нормальних напружень по умові міцності при плоскому згині:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W} \leq [\sigma_+]; \quad \sigma_{\min} = \frac{|M_{\min}|}{W} \leq [\sigma_-].$$

2. Перевірка міцності по максимальних дотичних напруженнях.

Виконується для тих перерізів по довжині брусу в яких діють тах по модулю поперечні сили. Тут буде чистий зсув і перевіряються, як правило, точки, що належать нейтральному шару. Перевірка проводиться по умові

міцності для тах дотичних напружень:  $\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_{z\max}}{b_{н.ш.} \cdot I_z} \leq [\tau]$ , де

$[\tau] = 0.6[\sigma]$  – для пластичних матеріалів;

$[\tau] = 0.8[\sigma]$  – для крихких матеріалів.

3. Перевірка міцності по головних напруженнях.

Виконується для загрозованих перерізів (точок) по довжині балки.

*Загрозованим* наз. перерізи, в яких поперечна сила і згинальний момент не є екстремальними, але одночасно дуже близькі до них.

В загрозованих перерізах перевіряються точки по висоті перерізу.

*Загрозованими* є точки в яких  $\tau$  і  $\sigma$  одночасно близькі по величині до своїх тах значень.

В двутаврі, наприклад, це точка 2" - що належить перехідному шару, але відноситься до стійки.

В загрозованих точках перевірку міцності можна проводити так:

1) по формулі (перша теорія міцності)  $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma_{\pm}]$  –

розрахувати головні напруження, враховуючи із якого матеріалу виготовлено балку і порівняти аналітично розраховані напруження з допустимими значеннями та зробити відповідні висновки.

2) Якщо в п'ять теорій міцності ми підставимо значення  $\sigma$  і  $\tau$ , то будемо мати:

I-а –  $\sigma_{\text{екв}} = 0.5 \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \leq [\sigma]$  – по першій теорій міцності;

II-а –  $\sigma_{\text{екв}} = \frac{1-\nu}{2}(\sigma) + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$  – по другій теорій міцності;

III-а –  $\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$  – по третій теорій міцності;

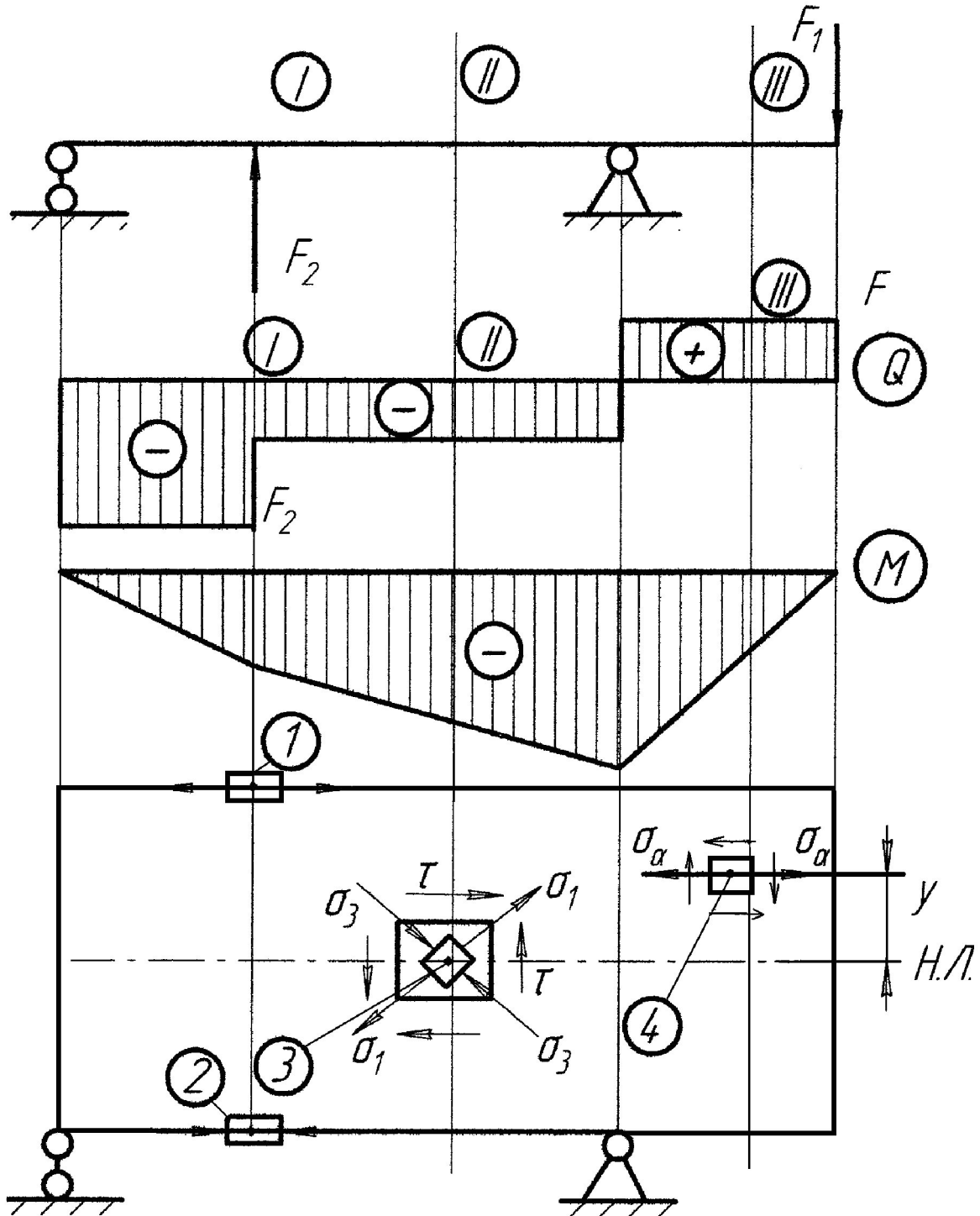
IV-а –  $\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$  – по четвертій теорій міцності;

$$V-a - \frac{1-m}{2}(\sigma) + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \text{ – по п'ятій теорії міцності,}$$

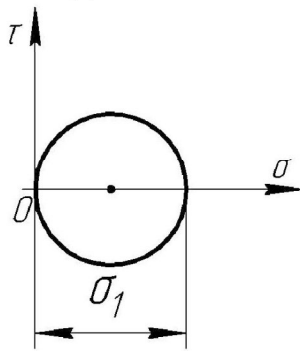
$$\text{де } m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Всі ці теорії міцності називаються **теоріями міцності**, що застосовуються в випадку дії **плоского згину**.

### 5. Аналіз напруженого стану балки при плоскому згині



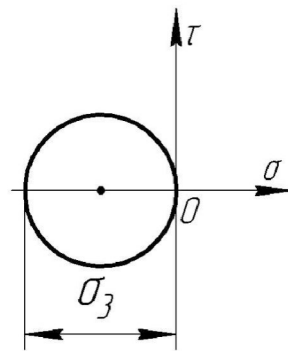
1) При плоскому згині точки (1, 2), що належать периферійним шарам знаходяться в лінійному напруженому стані.



T.1

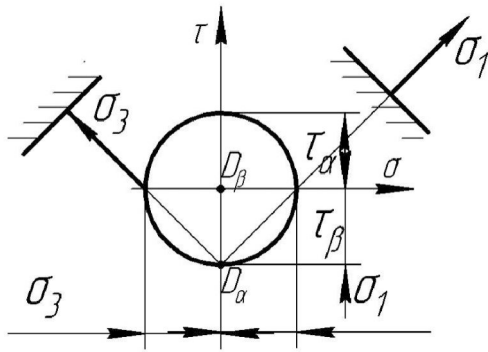
$$\sigma_1 = \frac{M_{\text{в.ш.}}}{W_z}$$

T.2



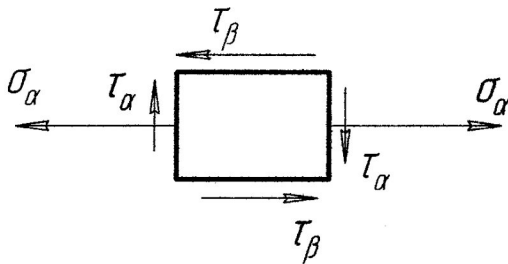
$$\sigma_3 = \frac{M_{\text{н.ш.}}}{W_z}$$

2) Розглянемо точку 3, що належить перерізу II – II. Напружений стан в точці 3 буде чистий зсув, так як  $\sigma = 0$ , а  $\tau_{\text{max}} : \sigma_1 = +\tau_{\text{max}} ; \sigma_3 = -\tau_{\text{max}}$ .



$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q \cdot S_{z\text{max}}}{b \cdot I_z}$$

3). Розглянемо тепер точку 4, що належить перерізу III – III. Особливість цієї точки, або площадки заключається в тому, що нормальні напруження обумовлені розтягом волокон в повздовжньому напрямку, тобто ми можемо показувати їх дію тільки в горизонтальному напрямку.



$$\sigma_\alpha = \frac{M \cdot y}{I_z} \quad \tau_\alpha = \frac{Q \cdot S_z(y)}{b(y) \cdot I_z}$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left[ \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \quad \sigma = 0$$

Таким чином аналіз напруженого стану

показує, що існує три групи точок:

- 1) Точки  $\in$  – периферійного шару;
- 2) Точки  $\in$  – нейтрального шару;
- 3) Точки  $\in$  – проміжним шарам (волокнам), тобто такі, які знаходяться в складному напруженому стані.

## ЛЕКЦІЯ № 14

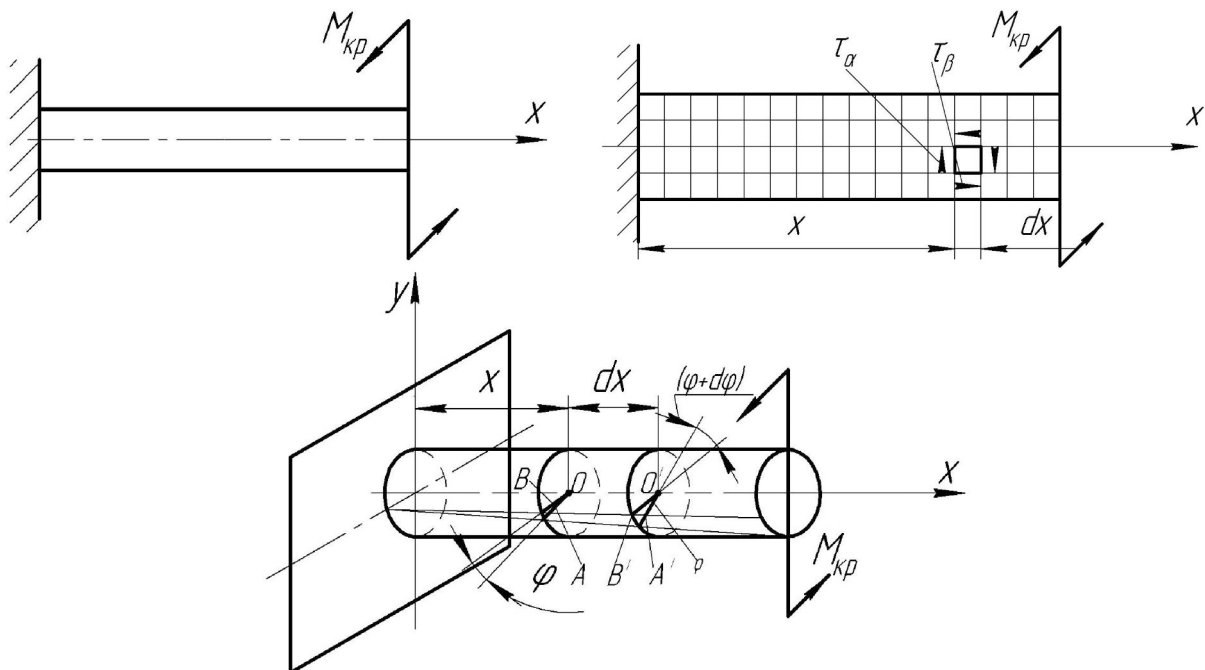
### Кручення стержнів з круглим поперечним перерізом

План лекції:

1. Кручення, основні гіпотези.
2. Визначення дотичних напружень при крученні круглих валів.
3. Умова міцності і жорсткості при крученні. Визначення розмірів (діаметра) поперечного перерізу.
4. Аналіз напруженого стану тіла при крученні.

**Література:** [1] - с.-206 ÷ 212, [2] - с.-186 ÷ 197.

1. Деформація круглого стержня, що викликана парою сил, площина дії якої перпендикулярна осі стержня, називається **деформацією кручення**.



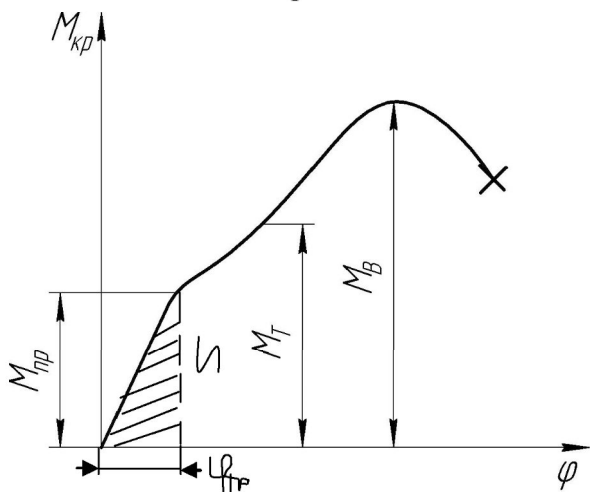
Із шести внутрішніх силових факторів буде діяти при такому навантаженні тільки один – крутний момент ( $M_{кр}$ ).

#### Основні гіпотези.

1. Перерізи, що були плоскі до деформації залишаються плоскими і після її виникнення.
2. Радіуси, що проведені в поперечних перерізах залишаються в процесі деформування прямими.
3. Відстані між поперечними перерізами залишаються без зміни.

Стержні що працюють на кручення називаються **валами**.

Любий переріз на відстані  $x$  від защемлення під дією крутного моменту повертається на кут  $\varphi$ , що називається **абсолютним кутом закручування**. Залежність  $\varphi = f(M_{кр})$  називається **діаграмою деформування при крученні**. Діаграма кручення має досить схожий вигляд з діаграмою при розтязі пластичних матеріалів.



2. Оскільки нас цікавлять напруження в поперечних перерізах, що виникають на ділянці пропорційності, то розглянемо дану задачу виходячи з чотириєдиної задачі її розв'язку.

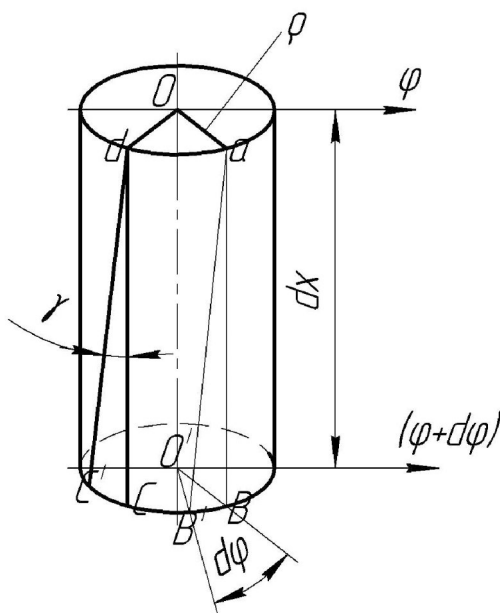
**1. Статична сторона задачі:** запишемо необхідне інтегральне рівняння рівноваги:

$$M_{кр} = \int_A \tau \cdot \rho dA, \quad (1)$$

де  $\rho$  - радіус в перерізі вала,

$\tau$  - напруження дотичні, що діють в заданому перерізі.

**2. Геометрична сторона задачі:**



Розглянемо деформацію елемента, що знаходиться на відстані  $x$  від закріплення. В ньому:  $oa$  – радіус стержня в перерізі, що розглядається.

Таким чином деформація кручення на довжині  $dx$  буде виражатись в зміні початкових прямих кутів  $abcd$  на кут  $\gamma$ . Тобто елемент, що нами розглядається; під дією  $M_{кр}$  знаходиться в умовах чистого зсуву і відповідно на його гранях діють дотичні напруження  $\tau$ .

У силу цього кут ( $\gamma$ ) є **кутом зсуву** (відносний кут зсуву). І визначається як:

$\text{tg} \gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}$  де  $\rho d\varphi$  - довжина дуги круга радіуса  $\rho$ .

В силу того, що деформація дуже мала дугу замінюють відрізком прямої, а  $\text{tg} \gamma$  замінюється на просто  $\gamma$ . Звідки :

$$(2) \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho \theta, \quad \text{де } \theta = \frac{d\varphi}{dx} \text{ - відносний кут повороту одного}$$

перерізу по відношенню до іншого ( $\text{см}^{-1}$ ).

**3. Фізична сторона задачі:**

запишемо закон Гука:  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , а з другої сторони кут  $\gamma = \rho \theta \Rightarrow \tau = G \rho \theta$  (3).

4. **Синтез:** Підставляємо в (1) рівняння (3):

$$M_{кр} = \int_A \rho \cdot \rho \cdot \theta \cdot G dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_p \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_p} \quad (4); \quad \varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \quad (5); \quad \tau = \frac{M_{кр} \rho}{I_p} \quad (6).$$

(4) – закон Гука в відносних величинах при крученні круглих стержнів (валів).

(5) – закон Гука в абсолютних величинах, що дозволяє визначити абсолютний кут закручення валу.

(6) – формула для визначення дотичних напружень в будь-якій точці круглого перерізу.

$GI_p$  – жорсткість поперечного перерізу круглого валу при закрученні.  $[кН \cdot м^2]$ .

Користуватись формулою (2) можна тільки в випадках коли  $M_{кр} = const$  і  $GI_p = const$ .

Якщо одна з цих умов не дотримується, то для визначення абсолютного кута закручення  $\varphi$  використовується залежність:

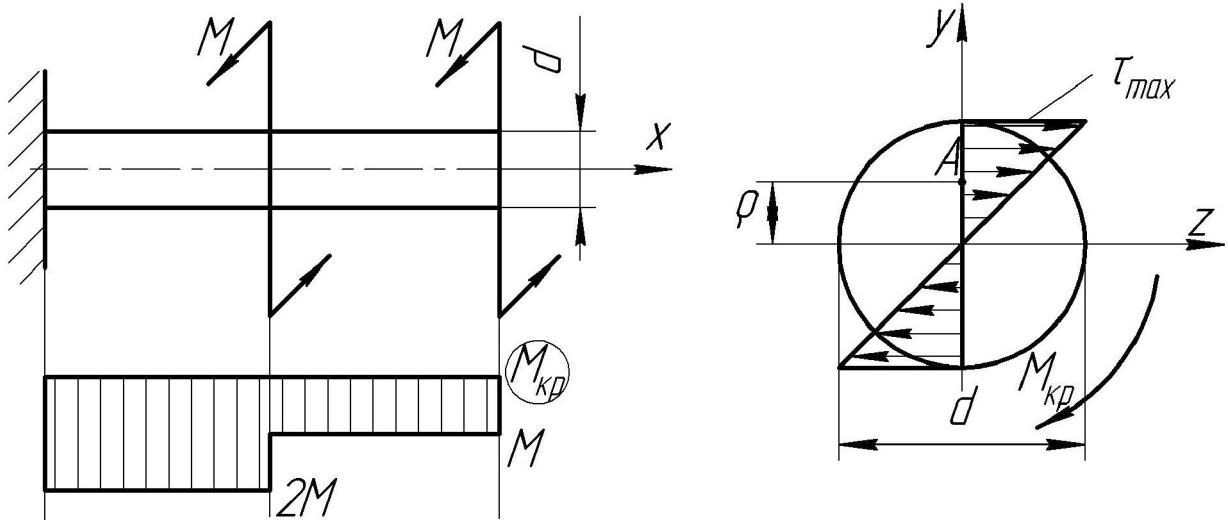
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M(x) dx}{(GI_p)_i},$$

де  $I_p$  - полярний момент інерції, що для круглого поперечного перерізу дорівнює:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

**Приклад:**

Розрахувати так дотичні напруження в довільній т. А, що знаходиться на відстані  $\rho$  від осі вала.



### Розв'язок:

$$1) \quad \tau = \frac{M_{кр} \rho}{I_{\rho}}; \quad I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32};$$

2) Будуємо епюру крутних моментів. Звідки знаходимо, що  $M_{\max} = 2M_{кр}$ .

Оскільки  $M_{кр} = \text{const}$  і  $d = \text{const}$ , то:  $\tau_A = \frac{M_{кр} \rho}{I_{\rho}}$ , при  $\rho = \rho_{\max} \Rightarrow$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \rho_{\max}}{I_{\rho}} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}$$
$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}, \text{ де } W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$$

$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярний момент опору для круглого стержня.

### 3. Умова міцності і умова жорсткості при крученні.

$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$  – умова міцності при крученні круглих стержнів.

$[\tau] = 0.6[\sigma]$  – для пластичних матеріалів;

$[\tau] = 0.8[\sigma]$  – для крихких матеріалів.

Ми отримали співвідношення, де  $[\tau]$  – допустиме напруження при крученні, а оскільки люба площадка знаходиться в стані чистого зсуву, то по її гранях діють тільки дотичні напруження. І із умови міцності ми можемо визначити величину діаметру вала:

$$W_{\rho} = \frac{M_{кр}}{[\tau]} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}} \text{ – для суцільного круглого перерізу.}$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4), \text{ де } \alpha = \frac{d}{D} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} \text{ – для трубчатого поперечного}$$

перерізу.

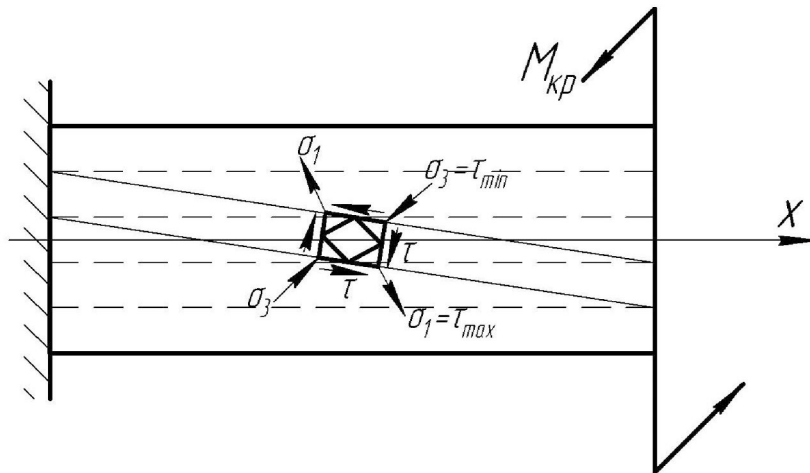
Крім такої умови діаметри валів розраховуються і із умови жорсткості, обмежуючи погонні кути закручування величиною  $[\theta]$ :

$$[\theta] \geq \frac{M_{кр}}{GI_{\rho}} = \theta_{\max} \Rightarrow I_{\rho} = \frac{M_{кр}}{G[\theta]} \Rightarrow [\theta] = 0.05 \div 2 \text{ } ^{\circ}/\text{м} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi G[\theta]}} \text{ (*) – для суцільного валу.}$$

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi G[\theta](1 - \alpha^4)}} \text{ (*) – для трубчатого валу.}$$

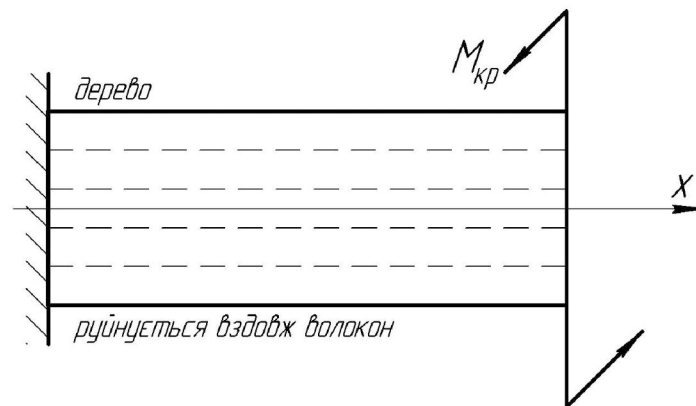
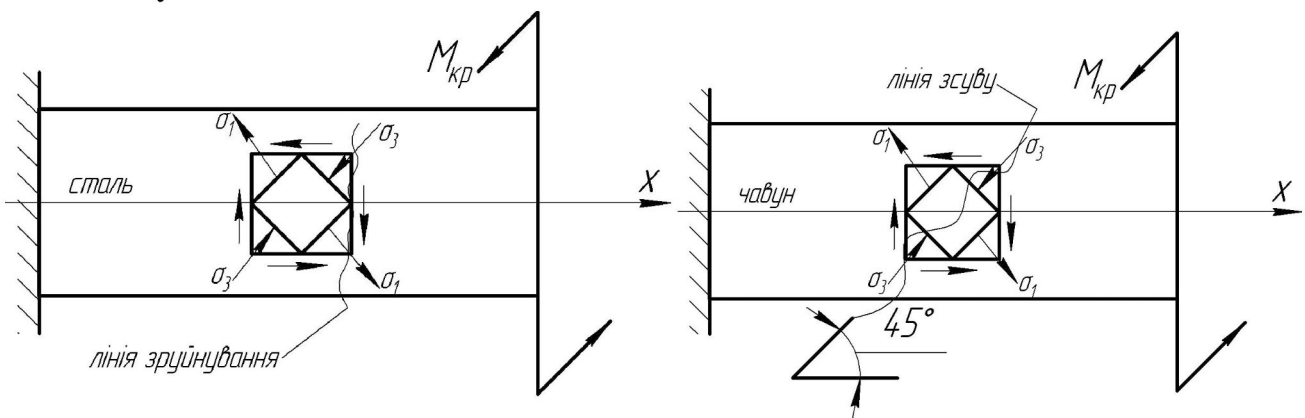
#### 4. Аналіз напруженого стану при крученні. Характер, руйнування круглих стержнів.



Аналіз напруженого стану показує, що на поверхню валу одночасно діють  $\tau_{max}$  дотичні напруження в напрямках паралельних і перпендикулярних до твірної. А також головні нормальні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ , що чисельно дорівнюють  $\tau_{max}$  дотичним напруженням і мають напрямок під кутом  $45^\circ$  по відношенню до осі валу.

Наявність нормальних і дотичних напружень обумовлює і різні види руйнування валів, що виготовлені із різних матеріалів.

Так для круглого чавунного валу лінія зруйнування пройде під кутом  $45^\circ$  до осі валу.



## ЛЕКЦІЯ № 15

### Кручення стержнів некруглим поперечним перерізом.

План лекції:

1. Основні залежності при крученні валів не круглим поперечним перерізом.
2. Кручення складених прямокутних стержнів.
3. Умова міцності і жорсткості при крученні валів некруглих із не круглим перерізом.
4. Кручення тонкостінних стержнів і профілів.
5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин з малим кутом нахилу.

**Література:** [1]- с. 216 ÷ 233; [2]- с. 206 ÷ 218.

1. В практиці інженерних розрахунків досить часто приходиться мати справу з закрученням стержнів прямокутного, трикутного, еліпсоподібного і інших форм перерізів. Для такого роду профілів гіпотеза плоских перерізів не має свого застосування через різницю в геометричних характеристиках ( $I_z$ ,  $S_z$ ,  $W_z$ ) перерізів, що де планують, тобто викривлюються.

Точні розрахунки напруженого і деформованого стану таких стержнів даються в теорії пружності. Не вдаючись до доведення, в курсі опору матеріалів приведемо лише кінцеві залежності між діючими силовими факторами і напруженнями та деформаціями, що виникають при цьому.

Відмітимо тільки, що так само, як при крученні стержнів круглим, із розподіл дотичних напружень в цих профілях відбувається по дотичних до контуру.

Найбільші дотичні напруження повні і погонні кути закручування прийнято визначати по таких залежностях:

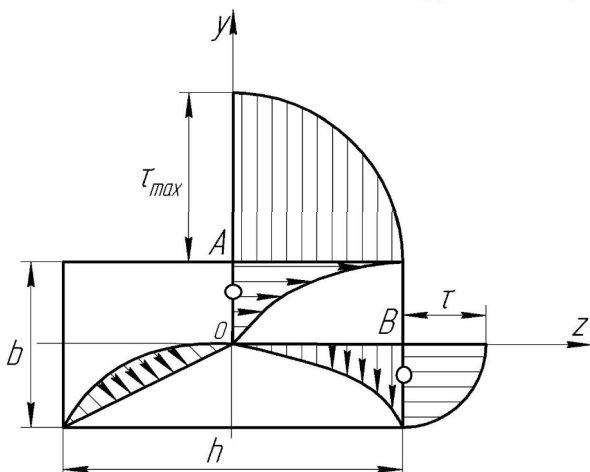
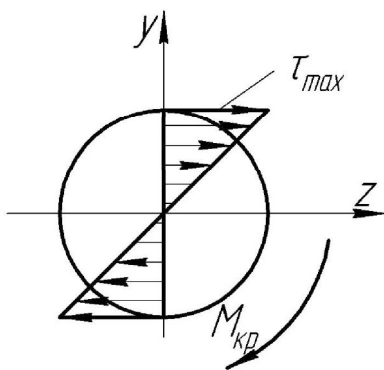
$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{к}}} \quad (1); \quad \varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_{\text{к}}} \quad (2); \quad \theta = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\text{к}}} \quad (3)$$

В цьому випадку  $I_{\text{к}}$  і  $W_{\text{к}}$  – деякі геометричні характеристики, котрі називають умовним моментом інерції і моментом опору поперечного перерізу при крученні: ( $\text{см}^4$ ;  $\text{см}^3$ )

Так для прямокутного поперечного перерізу балки розподіл дотичних напружень буде мати такий вигляд:

Найбільші дотичні напруження діють по поверхні довших сторін прямокутника (т.А). І визначаються по формулі (1), де

$$W_{\text{к}} = \alpha hb^2,$$

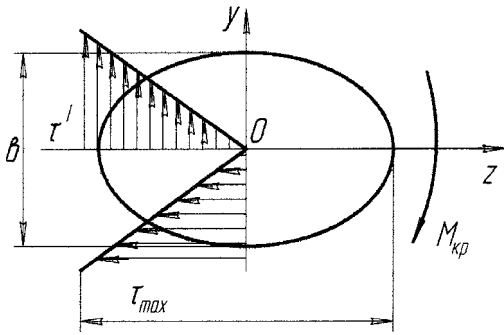


$h$  – довша сторона прямокутника  
 $b$  – коротша його сторона.

Напруження в т.В визначається по формулі:  $\tau = \gamma \tau_{\max}$

Для визначення відносного кута закручування в формулу (3) підставляють співвідношення для  $I_k = \beta h b^3$ . Коефіцієнти ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) для різних прямокутних і округлених профілів табульовані.

Так, для стержнів, що мають еліптичну форму перерізу  $\tau_{\max}$  знаходяться в точках перетину малих півосей з поверхнею.



$$W_k = \frac{\pi h b^2}{16}, \text{ де}$$

$b$  – мала вісь,

$h$  – велика вісь еліпса.

Відтак напруження на крайній точці більшої осі еліпса дорівнюватиме:

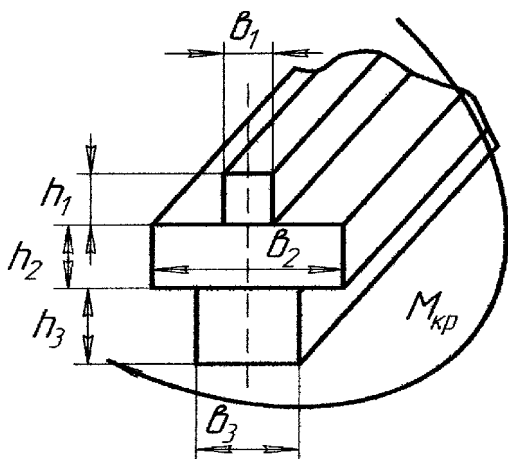
$$\tau' = \frac{\tau_{\max}}{m}, \text{ де } m = \frac{h}{b}, \text{ а}$$

умовний момент інерції при крученні:

$$I_k = \frac{\pi h b}{64} (h^2 + b^2).$$

При відношенні сторін прямокутника  $\frac{h}{b} \geq 10, \Rightarrow \alpha \approx \beta \approx 0.313 \div 0.333$ .

2. Це досить важливо для закручування складених прямокутних стержнів.



$$I_k = I_{k1} + I_{k2} + \dots + I_{kn} = \sum_{i=1}^n I_{ki}$$

Оскільки  $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$ , то

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_k} = \frac{M_{кр1}}{GI_{k1}} = \frac{M_{кр2}}{GI_{k2}} = \dots = \frac{M_{крn}}{GI_{kn}} \Rightarrow,$$

тобто крутний  $M$  між окремими частинами перерізу розподіляється пропорційно їх жорсткостям. Тобто

$$M_{кр1} = M_{кр} \frac{I_{k1}}{I_k}; M_{кр2} = M_{кр} \frac{I_{k2}}{I_k} \dots M_{крn} = M_{кр} \frac{I_{kn}}{I_k}.$$

З другої сторони відповідне дотичне напруження визначається як:

$$\tau_i = \frac{M_{кр1}}{W_{ki}} = \frac{M_{кр}}{W_{ki}} \left( \frac{I_{k1}}{I_k} \right) = \frac{M_{кр}}{I_k} \left( \frac{I_{k1}}{W_{ki}} \right).$$

визначається так:

$$(\tau_{\max})_n = \frac{M_{\text{крп}}}{W_{\text{кп}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{кп}}} \cdot \frac{I_{\text{кп}}}{I_{\text{к}}} \Rightarrow (\tau_{\max})_n = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\text{к}}} \cdot \left( \frac{I_{\text{кп}}}{W_{\text{кп}}} \right)_{\max},$$

де  $W_{\text{к}} = \frac{I_{\text{к}}}{\left( \frac{I_{\text{кп}}}{W_{\text{кп}}} \right)}$ .

Таким чином найбільші допустимі напруження будуть виникати в тому прямокутному елементі перерізу у якого відношення  $\frac{I_{\text{кп}}}{W_{\text{кп}}}$  буде найбільшим.

Тоді для співвідношення сторін прямокутника  $\frac{h}{b} \geq 10$  будемо мати:

$$(\tau_{\max})_n = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\text{к}}} \cdot \frac{\beta_n h_n b_n^3}{\alpha_n h_n b_n^2} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\text{к}}} \cdot (b_n)_{\max}, \quad \alpha_n = \beta_n$$

$$(\tau_{\max})_n = \frac{M_{\text{кр}} \cdot (b_n)_{\max}}{I_{\text{к}}} - \text{тобто максимальні дотичні напруження виникнуть в}$$

тому прямокутнику, у якого менша (коротша) сторона буде найбільшою.

### 3. Умова міцності і умова жорсткості при крученні.

Для простого прямокутного перерізу:

$$\tau_{\max} = \frac{(M_{\text{кр}})_{\max}}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \leq [\tau] - \text{умова міцності.}$$

$$\theta_{\max} = \frac{(M_{\text{кр}})_{\max}}{\beta \cdot h \cdot b^3 \cdot G} \leq [\theta] - \text{умова жорсткості.}$$

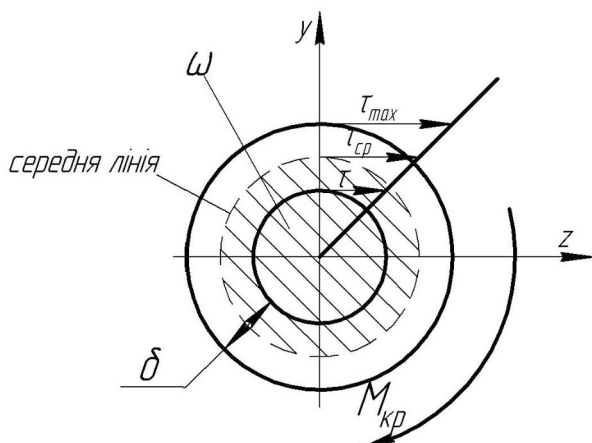
Для складеного перерізу (складеного із простих прямокутників) умова міцності і умова жорсткості будуть:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{I_{\text{к}}} \cdot (b_n)_{\max} \leq [\tau], \text{ де } I_{\text{к}} = \sum_{i=1}^n I_{\text{к}i}$$

$$\theta_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{GI_{\text{к}}} \leq [\theta] - \text{умова жорсткості.}$$

Для прямокутників у яких відношення сторони  $\frac{h}{b} \geq 10$

### 4. Кручення тонкостінних стержнів і закритих профілів.



$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{2\delta \cdot \omega} - \text{формула Бредта}$$

для закритих профілів.

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{2\omega \cdot \delta_{\min}}$$

$M_{\text{кр}}$  – крутний момент в перерізі, що розглядається по довжині стержня і береться з епюри.

$\delta$  – товщина стінки контуру, визначається в точці, де розраховуються дотичні напруження.

$\omega$  – площа поперечного перерізу контуру, що обмежена середньою лінією товщини контуру.

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \cdot l \cdot S}{4G\omega^2\delta} - \text{формула для визначення максимального кута}$$

**закручення для закритих профілів.**

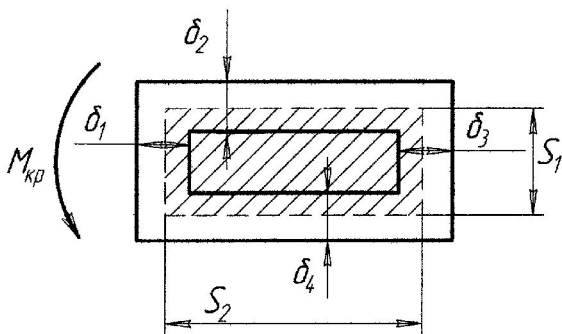
$$\theta = \frac{M_{\text{кр}} \cdot S}{4G\omega^2\delta} - \text{формула для визначення відносного кута закручення}$$

**закритих профілів.**

де:  $l$  – довжина відрізка стержня, що розглядається

$S$  – довжина середньої лінії контуру.

Ці формули застосовують тільки при  $S = \text{const}$ .



**Приклад:**

**Дано:**

$\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4;$

$S_1$  і  $S_2; M_{\text{кр}}$ . Сталь.

**Знайти:**

$\tau_{\max}; \theta.$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{2\omega \cdot \delta_{\min}} \leq [\tau] \Rightarrow \tau_{\max};$$

$$\theta = \frac{M_{\text{кр}}}{4G\omega^2} \sum_{i=1}^n \frac{S_n}{\delta_n} \Rightarrow \theta = \frac{M_{\text{кр}}}{4G\omega^2} \left( \frac{S_1}{\delta_1} + \frac{S_2}{\delta_2} + \frac{S_3}{\delta_3} + \frac{S_4}{\delta_4} \right)$$

Для тонкостінних відкритих профілів, виходячи з того, що  $\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{3}$

будемо мати, що:

$$I_{\text{к}} = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^n I_{\text{кі}} \Rightarrow I_{\text{к}} = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^n h_i b_i^3, \text{ де}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \text{ для } \text{I} \Rightarrow ; \eta = 1.12 \text{ [ } \Rightarrow ; \eta = 1.15 \text{ L } \Rightarrow ; \eta = 1 \text{ L } \Rightarrow$$

Відтак позначаючи товщину стінки тонкостінного відкритого профілю через ( $\delta$ ), а довжину його через  $S$ , момент інерції запишемо так:  $I_{\text{к}} = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^n \delta_i^3 S_i$ ,

а залежність що визначає **max** дотичні напруження в профілі, що має найбільшу

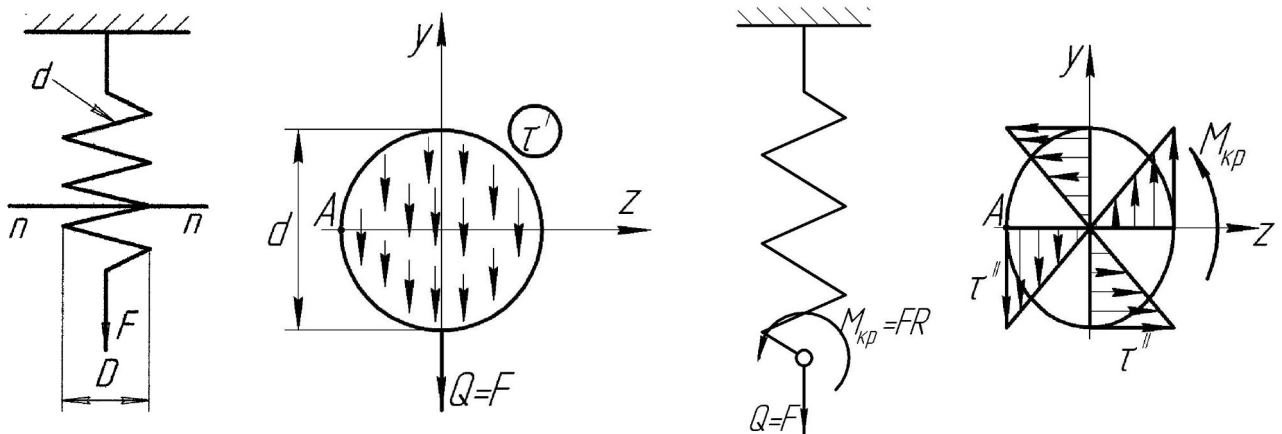
товщину  $\delta_{\max}$  :  $\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \delta_{\max}}{I_{\text{к}}}$ .

### 5. Розрахунок циліндричних гвинтових пружин з малим кутом нахилу.

Припустимо, що пружина з середнім діаметром  $D = 2R$  має  $n$  – витків, розтягується силою  $F$ . Для того, щоб оцінити міцність пружини проведемо переріз  $n - n$  і розглянемо рівновагу відсіченої частини.

$$\tau' = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} \text{ – дотичні напруження від зсуву.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{16FR}{\pi d^3} \text{ – дотичні напруження від кручення.}$$



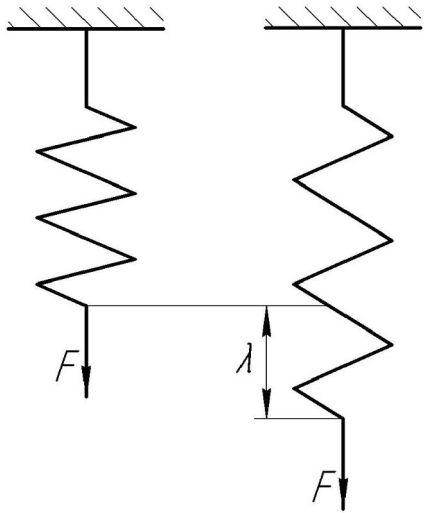
Як бачимо, напруження від зсуву і від кручення в т. А внутрішнього радіусу співпадають за напрямком. Відтак, враховуючи принцип суперпозиції, запишемо:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{16FR}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right) \leq [\tau] \text{ – умова міцності.}$$

Якщо пружина із тонкої проводки має досить великий діаметр в порівнянні із товщиною дроту, то добавкою за рахунок сил зсуву нехтують і

максимальне дотичне напруження:  $\tau_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3}$ .



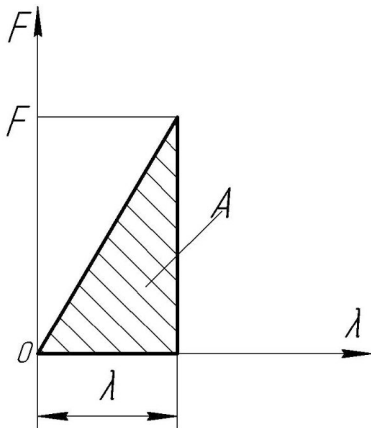
Робота, яку виконує пружина при навантаженні дорівнює потенційній енергії деформування.

$$\frac{1}{2} M_{кр} \varphi = \frac{1}{2} F \lambda \quad \text{— робота пружини}$$

потенційна енергія деформування пружини за рахунок тільки  $M_{кр}$ .

де,  $\lambda$  — усадка пружини,  
 $M_{кр}$  — крутний момент,  
 $\varphi$  — повний кут повороту.

Тоді робота, а ,відповідно, і потенційна енергія деформування при крученні, на ділянці пропорційності буде дорівнювати добутку сили  $F$  на  $\frac{1}{2}$  переміщення  $\lambda$  і моменту  $M_{кр}$  на  $\frac{1}{2}$  абсолютного кута закручування  $\varphi$ .



$$A = \frac{1}{2} F \lambda \quad U = \frac{1}{2} M_{кр} \varphi$$

З другої сторони:  $M_{кр} = FR$ , а  $\varphi = \frac{Ml}{GI_p}$ , де  $l' = 2\pi R$  — довжина одного витка, а довжина всієї пружини:  $l = 2\pi R \cdot n$ , де  $n$  — число витків.

$$\text{Тоді: } F\lambda = \frac{F \cdot R \cdot F \cdot R \cdot 2\pi R n}{GI_p} \Rightarrow \lambda = \frac{64FR^3 \pi n}{\pi Gd^4} = \frac{64FR^3 n}{Gd^4}, \text{ а через}$$

$$\text{діаметр так: } \lambda = \frac{8FD^3 n}{Gd^4} \text{ — усадка пружини.}$$

де,  $F$  — сила, що розтягує чи стискає пружину;  
 $D$  — середній діаметр барабана пружини;  
 $n$  — число витків;  
 $G$  — модуль пружності при зсуві;  
 $d$  — діаметр проволочки пружини.

Знаючи  $[\tau] = \tau_{\max}$  можна визначити об'єм пружини, а відповідно і вибрати товщину проволочки, число витків і радіус чи діаметр пружини.

$T = \frac{[\tau]^2}{4G} V$ , де  $T$  – енергія, що поглинається пружиною.

$$V = \frac{4TG}{[\tau]^2}.$$

### Література до курсу:

1. Г.С. Писаренко і ін. Опір матеріалів. – К : Вища школа, 1993 р. – 665 с.
2. Н.М. Беляев. Сопротивление материалов. – М: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1958 г. – 856 с.
3. С.П. Посацкий. Опір матеріалів. – Львів: Видавництво Львів. університету, 1973 р. – 404 с.
4. В.И. Феодосьев. Сопротивление материалов. – М: Наука, 1958 г. – 512 с.
5. Винокуров й др. Сопротивление материалов.
6. Н.М Беляев. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М. ГИЗТ, 1956 г. – 346 с.
7. Н.С. Улитин и др. Сборник задач по технической механике – М: "Высшая школа", 1978 г. – 399 с.
8. Г.М. Ицкович и др. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. М.: "Высшая школа", 1970 г. – 542 с.

## ЛЕКЦІЯ № 2

### Класифікація зовнішніх і внутрішніх сил. Метод поперечних перерізів. Правила визначення внутрішніх силових факторів

План лекції.

1. Класифікація зовнішніх і внутрішніх сил,
2. Метод поперечних перерізів.
3. Правила визначення внутрішніх силових факторів.

**Література:** [1] – с.-35÷36, [2] – с.-26÷32

1. В процесі експлуатації деталі машин і споруд взаємодіють одна з одною, передаючи при цьому тим чи іншим чином навантаження. *Зовнішніми силами* називають сили взаємодії, що виникають при дії одного тіла на інше.

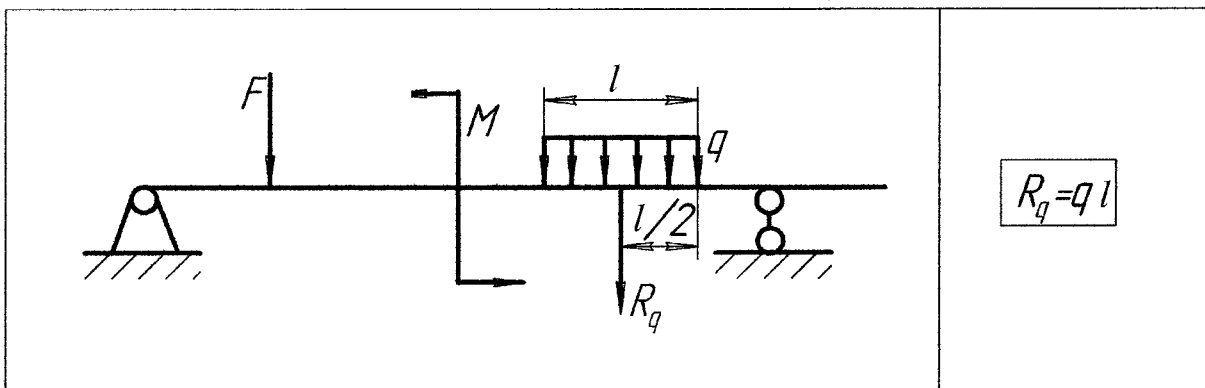
Якщо зовнішні сили є результатом взаємодії двох чи декількох тіл, що контактують між собою тільки в точках їх поверхні, то такі сили називаються **поверхневими силами**.

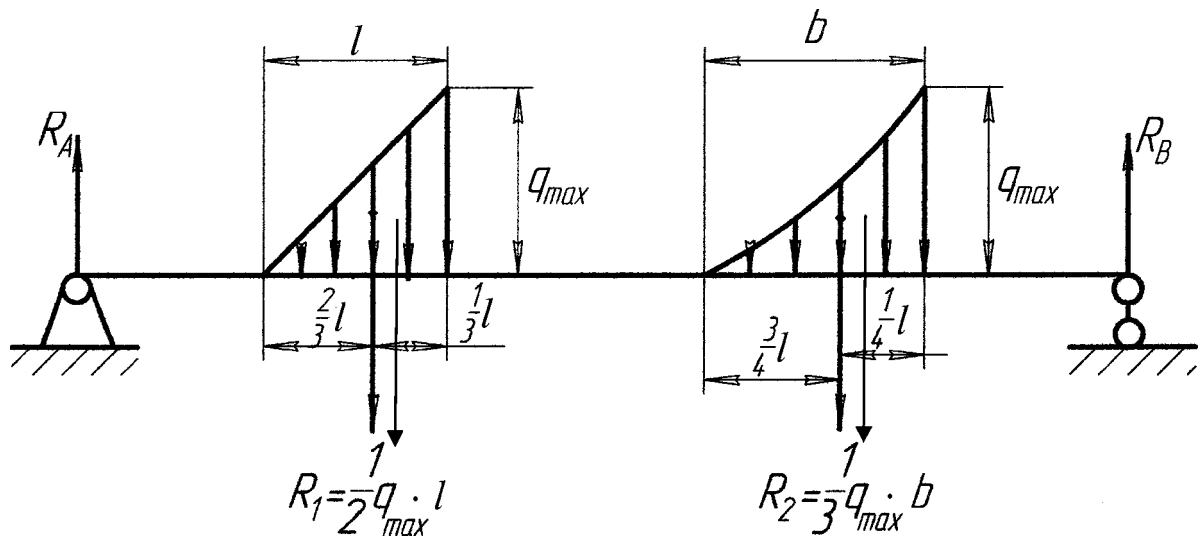
Поверхневі сили можуть бути зосередженими в точці, або ж неперервно розподіленими як по поверхні, так і по довжині.

Величина навантаження, що припадає на одиницю площі чи довжини, називається *інтенсивністю навантаження* і найчастіше позначаються лат. літерами  $p$  (Па, КПа, МПа) і  $q$  (Н/М, Кн/М).

При визначенні реакції в опорах і побудові епюр необхідно визначити рівнодіючу розподіленого навантаження, що діє на даному відрізку. Рівнодіюча розподіленого навантаження чисельно дорівнює добутку інтенсивності навантаження на довжину відрізка (площу тієї фігури), де вона діє і завжди прикладається в центрі її ваги.

Якщо навантаження розподілено на невеликій поверхні тіла, та його завжди замінюють рівнодіючою, яку називають **зосередженою силою** ( $F$ ) (Н, кН, МН). Зустрічаються також навантаження, які можна подати у вигляді **зосередженої пари сил або моменту** ( $M$ ).





$q_{\max}$  – величина максимальної інтенсивності розподіленого навантаження;  $q$  – величина інтенсивності.

До *масових* або *об'ємних* сил відносять сили, що виникають в кожній одиниці об'єму деформованого тіла (це сили ваги тіла, сили інерції та ін.). Такі сили діють на кожну точку тіла, що розглядається.

За характером дії зовнішні сили діляться на *статичні* та *динамічні*. До *статичних сил* відносять зовнішні сили, які в процесі навантаження тіла порівняно повільно збільшують (зменшують) своє значення від початкової величини до кінцевого свого значення, а потім залишаються незмінними.

До *динамічних сил* відносять зовнішні сили, дія яких, як правило, пов'язана з виникненням додаткових, значних по величині, сил інерції.

Динамічні навантаження супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що з ним взаємодіють.

Динамічні сили (навантаження) в свою чергу діляться на миттєво-прикладені, ударні і повторно-змінні.

*Миттєво-прикладеним навантаженням* вважається таке навантаження, яке досягає свого кінцевого значення за доли секунди.

*Ударне навантаження* характеризується тим, що в момент його прикладання тіло, що визвало дію цього навантаження, мало якусь величину кінетичної енергії ("баба" копра, мех. ковалевий молот і т. д.).

*Повторно-змінне навантаження* пов'язане з безперервною взаємодією контактуючих тіл, при якій напрямок або величина виникаючих сил періодично змінюються в часі (зворотно-наступальні рухи штока, коливання маятника).

**Та все ж міцність конструкцій залежить не від дії зовнішніх навантажень, а від тих внутрішніх зусиль, що виникають в конструкційному елементі при його зовнішньому навантаженні.**

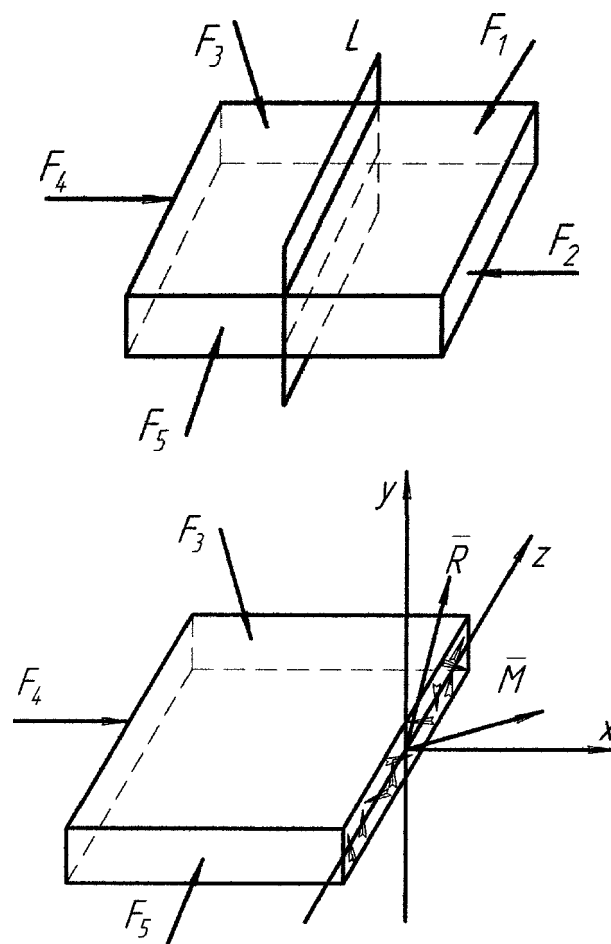
В курсі опору матеріалів під *внутрішніми зусиллями* розуміють такі додаткові сили взаємодії, які виникають в поперечних перерізах конструкційного елементу при його зовнішньому навантаженні.

Для оцінки міцності будь-якої конструкції необхідно визначити положення самого найнебезпечнішого перерізу і розрахувати всі внутрішні зусилля, що діють в цьому перерізі.

Для визначення місцезнаходження небезпечного перерізу необхідно вміти будувати графіки розподілу внутрішніх зусиль по довжині конструкційного елемента, що розглядається. Такі графіки мають назву "епюр".

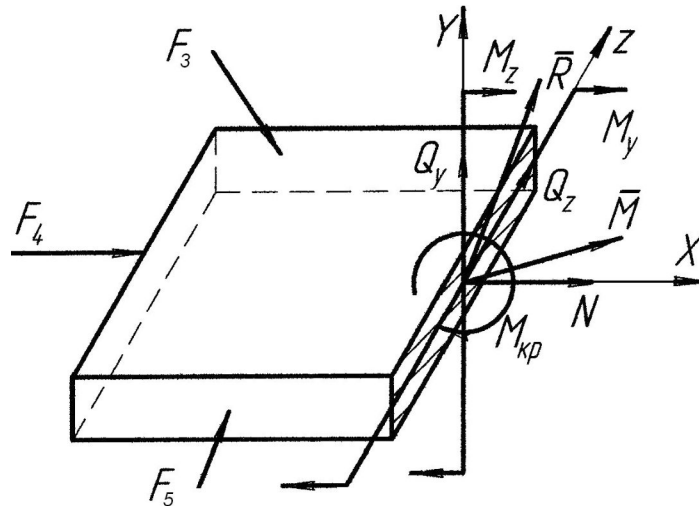
Для побудови епюр розподілу внутрішніх зусиль в стержні використовується так званий **метод перерізів**.

## 2. Метод перерізів



Розглянемо довільне тіло, що навантажене врівноваженою системою сил, тобто тіло під дією навантажень знаходиться в рівновазі.

Для визначення внутрішніх зусиль уявно "розітнемо" дане тіло площиною в місці, що нас буде цікавити, і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої його частини.



Осі  $z$  і  $y$  – головні центральні осі перерізу (що це таке буде глянуто пізніше).  $x$  – поздовжня осьова вісь стержня. Спроекувавши на ці осі головний вектор  $\vec{R}$  і головний момент  $\vec{M}$  всіх діючих в перерізі внутрішніх сил будемо мати шість внутрішніх силових фактори: три сили ( $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ); три моменти ( $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ).

#### Визначення внутрішніх зусиль,

$N$  – поздовжня осьова сила або нормальна сила. Ця сила чисельно дорівнює сумі проєкцій усіх сил, що діють в перерізі, на поздовжню вісь стержня (або на перпендикуляр до площини перерізу) на одній відсіченій частині стержня. Вона викликає поздовжню деформацію стержня (розтяг-стиск);

$Q_y$ ,  $Q_z$  – поперечні сили. Вони чисельно дорівнюють сумах проєкцій всіх внутрішніх сил в перерізі на головні центральні осі перерізу  $y$  і  $z$  відповідно на одній відсіченій частині стержня. Ці сили викликають зміщення одного перерізу стержня відносно іншого, тобто деформацію зрізу або зсуву.

$M_y$ ,  $M_z$  – згинальні моменти. Вони чисельно дорівнюють сумі моментів від дії всіх внутрішніх сил у перерізі відносно його головних центральних осей  $y$  і  $z$ , відповідно, на одній відсіченій частині стержня. Ці силові фактори викликають у стержні деформації згину.

$M_x = M_{кр}$  – крутний момент. Він дорівнює сумі моментів від дії всіх внутрішніх сил у перерізі відносно поздовжньої осі стержня. Цей момент викликає деформацію кручення.

Необхідно пам'ятати, що оскільки уся система знаходиться в рівновазі, то сума проєкцій сил або моментів, що знаходяться зліва від перерізу дорівнює сумі проєкцій всіх сил чи моментів, що знаходяться справа від перерізу. Таким чином метод перерізів дозволяє визначити всі внутрішні зусилля і моменти у будь-якому перерізі стержня при дії будь-якого зовнішнього навантаження.

Для визначення внутрішніх зусиль за допомогою цього методу необхідно:

- уявно провести поперечний переріз стержня у тому місці, де необхідно визначити внутрішні сили і моменти;
- визначити головні центральні осі поперечного перерізу стержня;
- визначити сили ( $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ) і моменти ( $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_{кр}$ ) як алгебраїчні суми проєкцій сил і моментів зовнішніх сил, діючих на одній із частин "розсіченого" стержня, що знаходиться в рівновазі.

### **3. Правила визначення внутрішніх силових факторів.**

1. Для розрахунку осьової сили  $N$  необхідно визначити суму проєкцій всіх зовнішніх сил, які знаходяться по одну сторону від перерізу, на поздовжену вісь стержня,

2. Для того, щоб визначити величину поперечної сили в перерізі, що розглядається, необхідно вирахувати суму проєкцій всіх зовнішніх сил, що лежать по одну сторону від перерізу, на вісь перпендикуляру поздовженої осі балки;

3. Для того, щоб вирахувати згинальний момент в перерізі, що розглядається по довжині стержня, необхідно вирахувати суму моментів всіх зовнішніх сил, що знаходяться по одну сторону від перерізу;

4. Для визначення крутного моменту в перерізі по довжині стержня необхідно знайти суму моментів від дії всіх зовнішніх сил, що знаходяться по одну сторону від перерізу.

## ЛЕКЦІЯ № 3

### Побудова епюр розподілу внутрішніх зусиль при дії осьових сил і крутних моментів

#### План лекції

1. Правила знаків
2. Епюри внутрішніх зусиль без урахування власної ваги тіла.
3. Епюри внутрішніх осьових зусиль з урахуванням власної ваги стержня.
4. Епюри крутих моментів.

**Література:** [1] – с.- 40÷49, [2] – с.- 51÷54 , с.- 184÷186, с.- 221÷226

#### 1. Правила знаків

*Осьова (поздовжня) сила вважається додатною, якщо вона спрямована від перерізу, тобто викликає своєю дією деформацію розтягу відсіченої частини тіла.*

*Осьова сила вважається від'ємною, якщо вона спрямована до перерізу і викликає при цьому деформацію стиску відсіченої частини тіла.*

#### 2. Епюри внутрішніх зусиль без урахування власної ваги тіла

Для прикладу розглянемо стержень довільної форми і розмірів.

**Відомо:** Стержень навантажено впродовж осі  $Ox$  чотирма силами:  $F_1 = 3$  кН;  $F_2 = 5$  кН;  $2F_3 = 2$  кН, як показано на схемі.

**Знайти:** 1) величину і напрямок врівноважуючої сили  $F_0$ ;

2) побудувати епюру розподілу внутрішніх зусиль в стержні.

#### Рішення:

1. Для визначення величини і напрямку дії врівноважуючої сили  $F_0$  запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad -F_1 + F_2 + 2F_3 - F_0 = 0 \Rightarrow F_0 = 6 \text{ кН.}$$

2. Для побудови епюри розподілу внутрішніх зусиль по довжині стержня необхідно розбити його на ділянки в точках, де прикладені зосереджені сили  $F_1, F_2 \dots F_n$

**Ділянкою** стержня називають його частину, що знаходиться між точками прикладання двох найближчих зосереджених силових факторів.

I ділянка ( $0 \leq x_1 < a$ )

II ділянка ( $a \leq x_2 < 3a$ )

Зліва від перерізу:

Зліва від перерізу:

$$N(x_1) = F_1 = 3 \text{ кН}$$

$$N(x_2) = F_1 - F_2 = 3 - 5 = -2 \text{ кН}$$

Справа від перерізу:

Справа від перерізу:

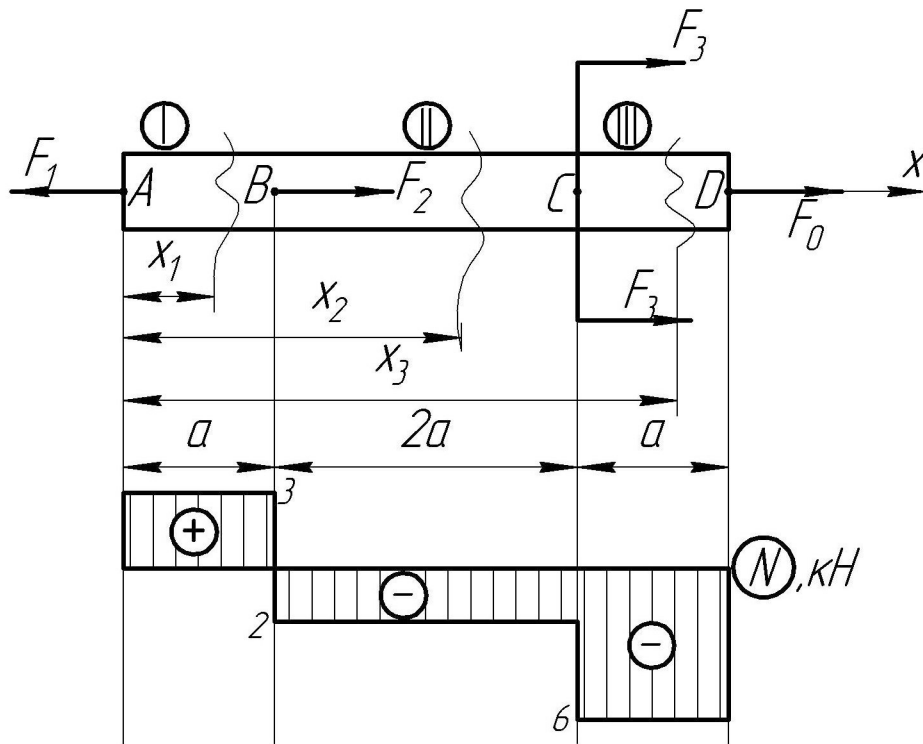
$$N(x_1) = F_2 - 2F_3 - F_0 = 5 + 4 - 6 = 3 \text{ кН}$$

$$N(x_2) = 2F_3 - F_0 = -6 = -2 \text{ кН}$$

III ділянка ( $3a \leq x_3 < 4a$ )

$$\text{Зліва: } N(x_3) = F_1 - F_2 - 2F_3 = 2 - 4 - 5 = -6 \text{ кН}$$

$$\text{Справа: } N(x_3) = -F_0 = -6 \text{ кН}$$



Відкладаючи значення цих сил з урахуванням знаків у масштабі побудуємо епюру розподілу поздовжніх сил по довжині стержня.

**Відмітимо**, що в т. А, В, С, D на епюрі розподілу внутрішніх зусиль маємо **стрибки**, і їх величина дорівнює величині, прикладених в цих перерізах, зовнішніх зусиль.

**Відомо:** На консольно закріпленій стержень діють зосереджені сили  $F_1 = 10$  кН;  $F_2 = 10$  кН;  $F_3 = 20$  кН;  $F_4 = 40$  кН; як показано на схемі.

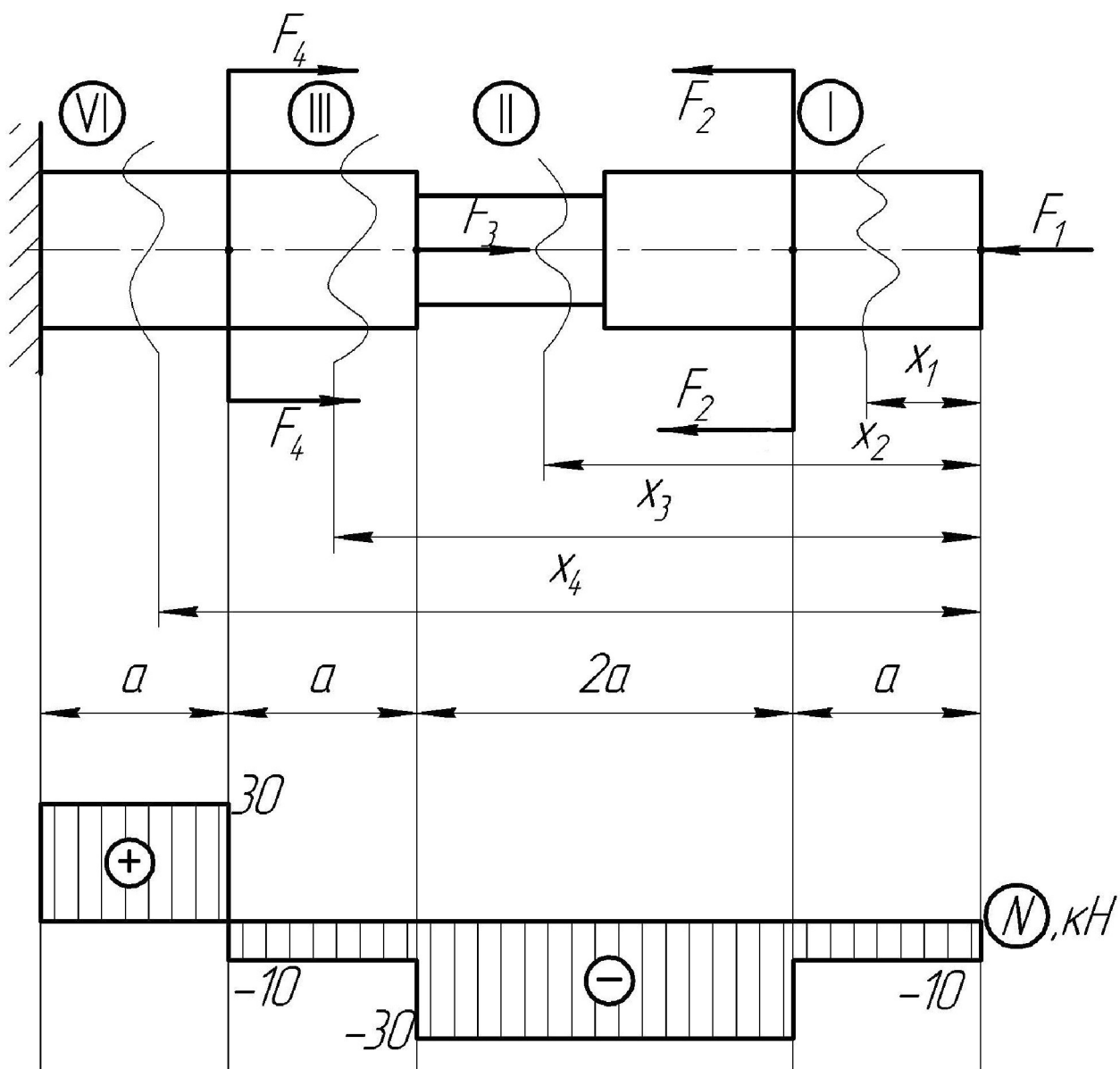
**Необхідно:** Побудувати епюру розподілу внутрішніх зусиль.

### Розв'язок :

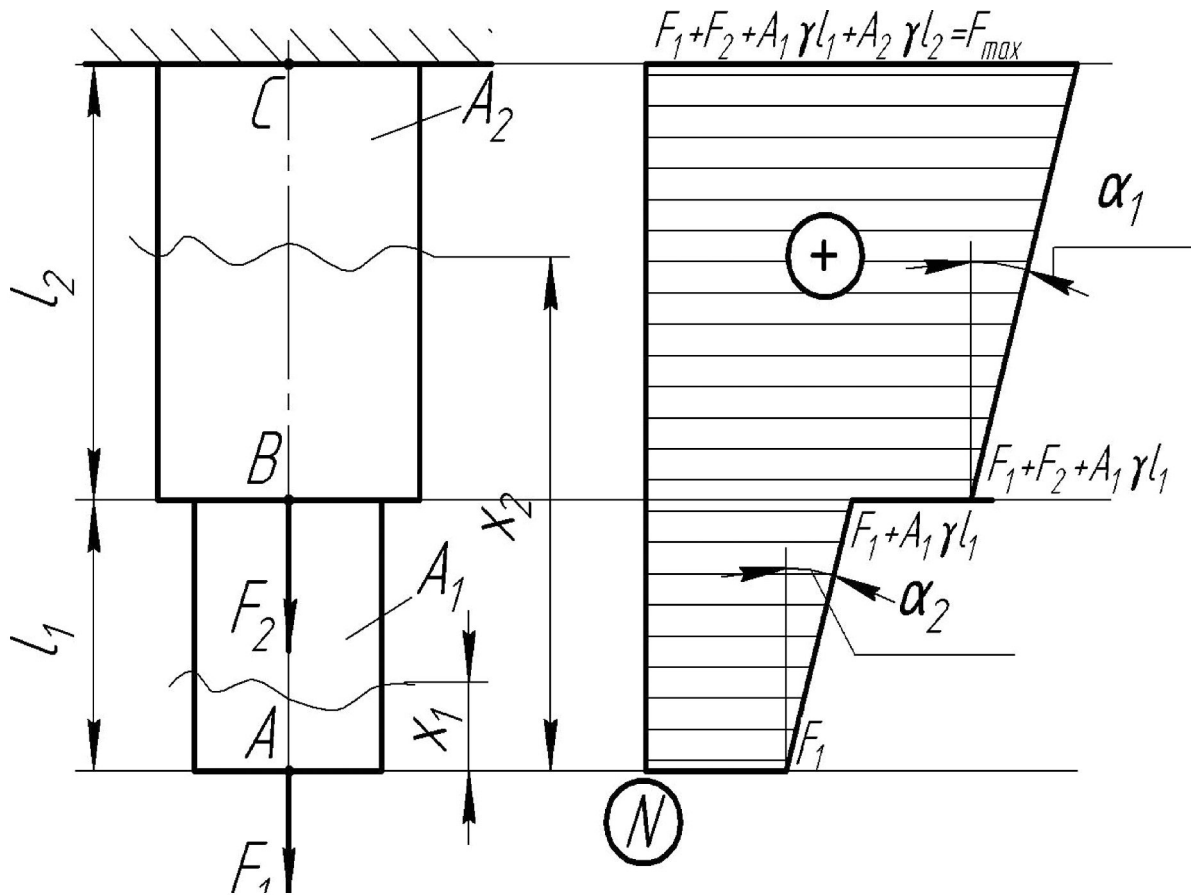
Як і в першому випадку розбиваємо стержень на ділянки по точках прикладання сил. При побудові епюри  $N$  для консольно закріплених стержнів **необхідно пам'ятати**, що її початок лежить на вільному кінці бруса.

Якщо на стержень діють тільки зосереджені сили, то лінії епюри завжди **паралельні** її базисній лінії. А сама епюра  $N$  складається із прямокутників і має стрибки в тих перерізах, де прикладено зовнішні сили.

Розглянемо консольне закріплення стержень



### 3. Епюри осьових зусиль з урахуванням власної ваги стержня



**Дано:**  $\gamma$  – питома вага;

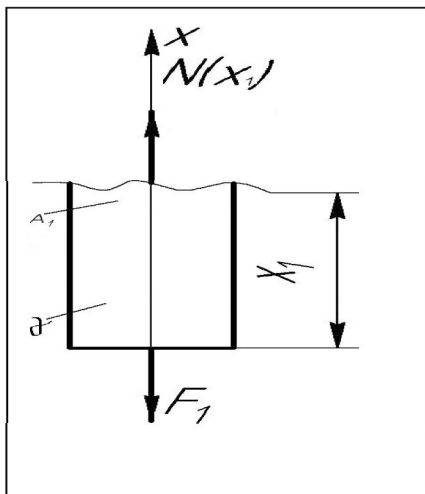
$l_1$  і  $l_2$  – довжини ділянок стержня;

$A_1$  і  $A_2$  – площа перерізу ділянки;

$F_1$  і  $F_2$  – сили зовнішнього навантаження.

**Необхідно:** Побудувати епюру  $N$  з урахуванням власної ваги стержня і визначити  $F_{\max}$ .

Якщо в стержні, що вертикально розташований, потрібно враховувати зовнішні зосереджені сили і дію сил власної ваги, то епюра осьових сил буде мати вигляд ділянок обмежених похилими лініями. Для стержня, у якого площа перерізу змінюється безперервно по його довжині епюра внутрішніх зусиль буде обмежена кубічною параболою.



#### Розв'язок :

Як і в попередньому прикладі, маємо починати будувати епюру осьових сил з вільного (не закріпленого) кінця стержня і розбиваємо його на ділянки, з тим доповненням, що ділянками є не тільки точки прикладання зосереджених сил, а й місця переходу від одного розміру площі поперечного перерізу до іншого. (В нашому випадку вони співпадають).

1) Для першої ділянки ( $0 \leq x_1 < l_1$ ) запишемо рівняння рівноваги всіх сил

на вісь  $Ox$ :  $\sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow$

$$N(x_1) - F_1 - \gamma A_1 x_1 = 0; \Rightarrow N(x_1) = F_1 + \gamma A_1 x_1$$

а) При  $x_1 = 0 \Rightarrow N(0) = F_1$

б) При  $x_1 = l_1 \Rightarrow N(l_1) = F_1 + \gamma F_1 l_1$

2) Для другої ділянки ( $l_1 \leq x_2 < (l_1 + l_2)$ ). При проектуванні всіх сил на вісь  $Ox$  будемо мати:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow$$

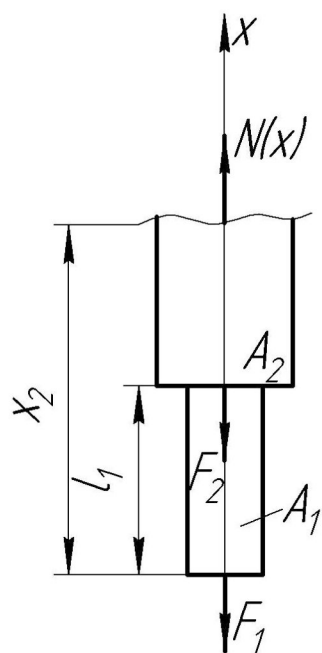
$$N(x_2) - F_1 - F_2 - A_1 \gamma \cdot l_1 - A_2 \gamma (x_2 - l_1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow N(x_2) = F_1 + F_2 + A_1 \gamma \cdot l_1 + A_2 \gamma (x_2 - l_1)$ , що є рівнянням похилої прямої.

а) При  $x_2 = l_1 \Rightarrow N(l_1) = F_1 + F_2 + A_1 \gamma \cdot l_1$

б) При  $x_2 = l_1 + l_2 = l$

$$\Rightarrow N(l_1 + l_2) = F_1 + F_2 + A_1 \gamma \cdot l_1 + A_2 \gamma \cdot l_2$$



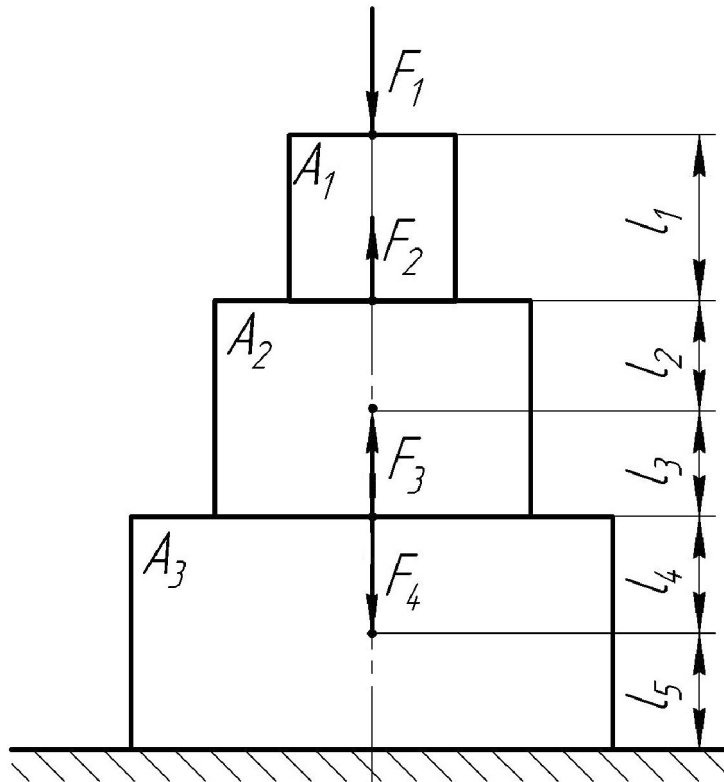
Нахил епюри на ділянках  $AB$  і  $BC$  різний, оскільки площі перерізів різні. Можливо, що різною буде і питома вага ділянок. Відношення кута нахилу прямої на ділянці пропорційне площі поперечного перерізу:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{A_1}{A_2}, \text{ так, як } \operatorname{tg} \alpha_1 = A_1 \gamma; \operatorname{tg} \alpha_2 = A_2 \gamma$$

### Самостійно

Побудувати епюру  $N$ , врахувати, що:

$$F_1 < F_2, \text{ а } F_3 < F_4$$

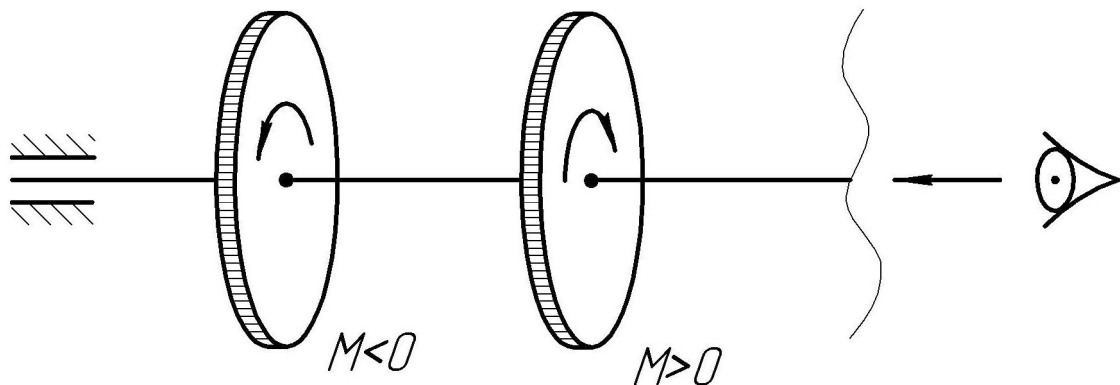


#### 4. Епюри крутних моментів

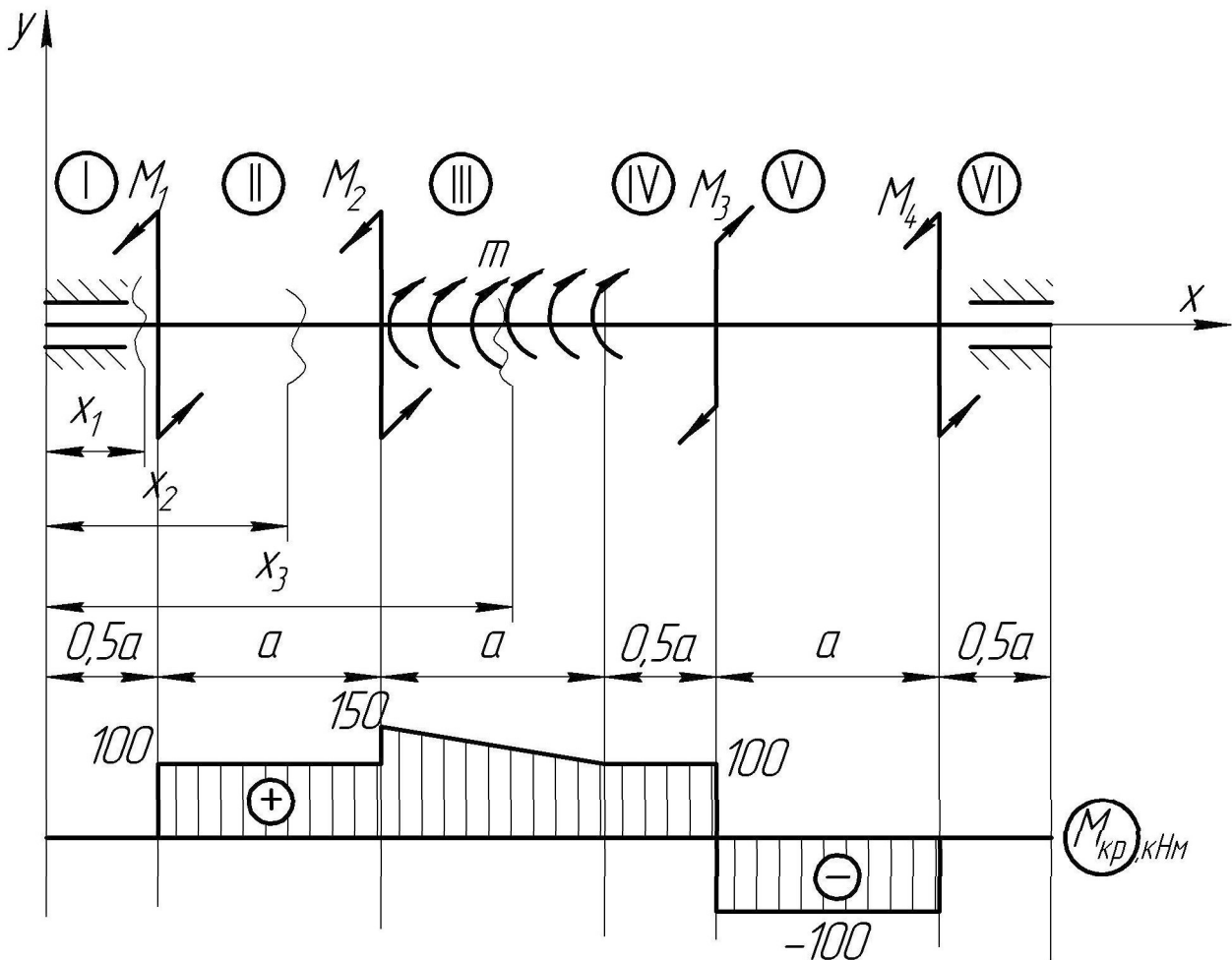
При дії на вал тільки моментів перпендикулярних до осі вала із 6-ти внутрішніх силових факторів залишається в дії тільки крутний момент  $M_{кр}$ .

#### Правило знаків для крутних моментів:

Крутний момент  $M_{кр}$  вважається додатним, якщо при погляді в торець відсіченої частини валу напрямком його дії буде відбуватися по ходу годинникової стрілки.



Для прикладу розглянемо вал, на який діють задані крутні моменти.



Дано:  $M_1 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_2 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $m = 50 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{м}}$ ;  $M_3 = 200 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  
 $M_4 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ .

**Розв'язок :**

1. Розбиваємо задану пружну систему на ділянки I, II, III, IV, V, VI.
2. Обираємо початок системи координат у крайній лівій точці валу. Так як силою тертя нехтуємо, то

на I-й ділянці ( $0 \leq x_1 < 0.5a$ ):  $M_{кр} = 0$ .

на II-й ділянці ( $0.5a \leq x_2 < 1.5$ ):  $M_{кр}(x_2) = M_1$   $M_{кр} = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

на III -й ділянці ( $1.5a \leq x_3 < 2.5a$ ):  $M_{кр}(x_3) = M_1 + M_2 - m(x_3 - 2,5a)$

$M_{кр}(2.5a) = 150 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_{кр}(3.5a) = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

на IV-й ділянці ( $2.5a \leq x_4 < 3a$ ):  $M_{кр}(x_4) = M_1 + M_2 - ma$   $M_{кр} = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

на V-й ділянці ( $3a \leq x_5 < 4.0a$ ):  $M_{кр}(x_5) = M_1 + M_2 - ma - M_3$ ;

$M_{кр} = -100 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

на VI-й ділянці ( $4.0a \leq x_6 < 4.5a$ ):  $M_{кр}(x_6) = M_1 + M_2 - ma - M_3 + M_4$ ;

$M_{кр} = 0$ .

Таким чином не дивлячись на те, що на вал діє зовнішній крутний момент  $M_3$  величиною 200 КН·м, найбільший внутрішній крутний момент в поперечному перерізі на межі II і III ділянок становить тільки 150 КН·м. І саме ця величина крутного моменту повинна закладатися в розрахунки на міцність і жорсткість. Як бачимо на ділянках, де діють постійні крутні моменти, епюра моментів буде мати вигляд прямокутників, а на ділянці де діє розподілений момент  $m$ , епюра обмежена прямою похилою до безмежної лінії.

## ЛЕКЦІЯ № 4

### Згин балок.

#### Правила знаків для поперечної сили і згинального моменту.

#### Диференційні залежності при згині балок.

#### Побудова епюр (Q і M) при згині та їх особливості

#### План лекції:

1. Основні схеми балок і опор. Правила знаків для поперечної сили і згинального моменту.
2. Диференційні залежності при згині балок.
3. Приклади побудови епюр(Q і M).
4. Особливості побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів.
5. Побудова епюр за характерними точками.




**Література:** [1] – с. 82÷86, с. 115÷120; [2] – с. 26÷41

### 1. Згин балок. Правило знаків для поперечної сили (Q) і згинального моменту (M).

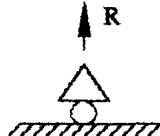
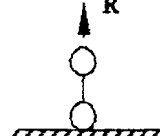
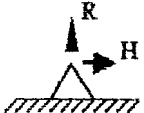
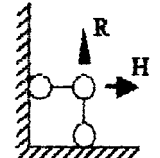
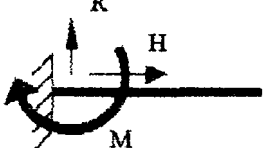
Прямолінійний стержень, що працює на згин називається *балкою* (болти, осі, вали і т.д.).

**Плоским** - називається згин, при якому всі зовнішні сили, що діють на балку, прикладені в одній площині, яка обов'язково повинна співпадати з однією із головних центральних площин інерції перерізу. Ця площина називається *силовою*.

#### Типи балок

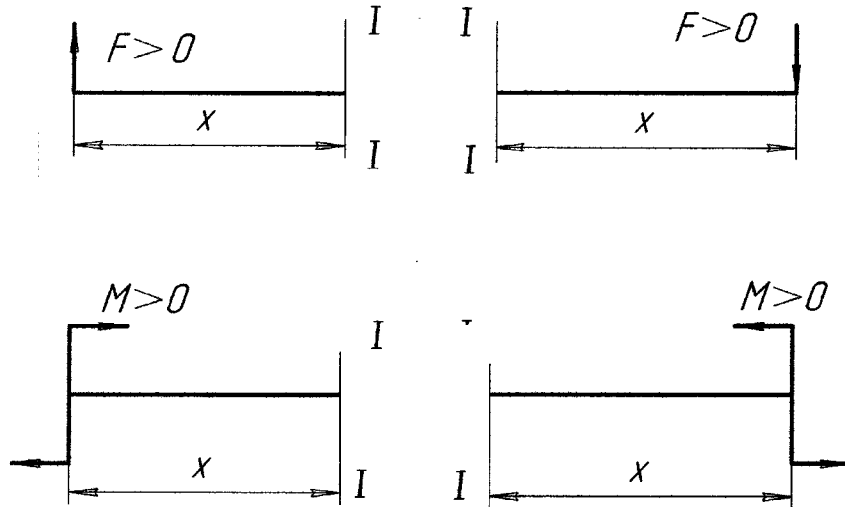
1)		– консоль		– однопрольотна двоопорна балка
3)		– двоконсольна балка		
4)		– багатопрольотна балка з проміжним шарніром		

#### Типи опор

1) Шарнірно-рухома опора (каток)		або	
2) Шарнірно-нерухома опора –		або	
3) Жорстке затиснення			

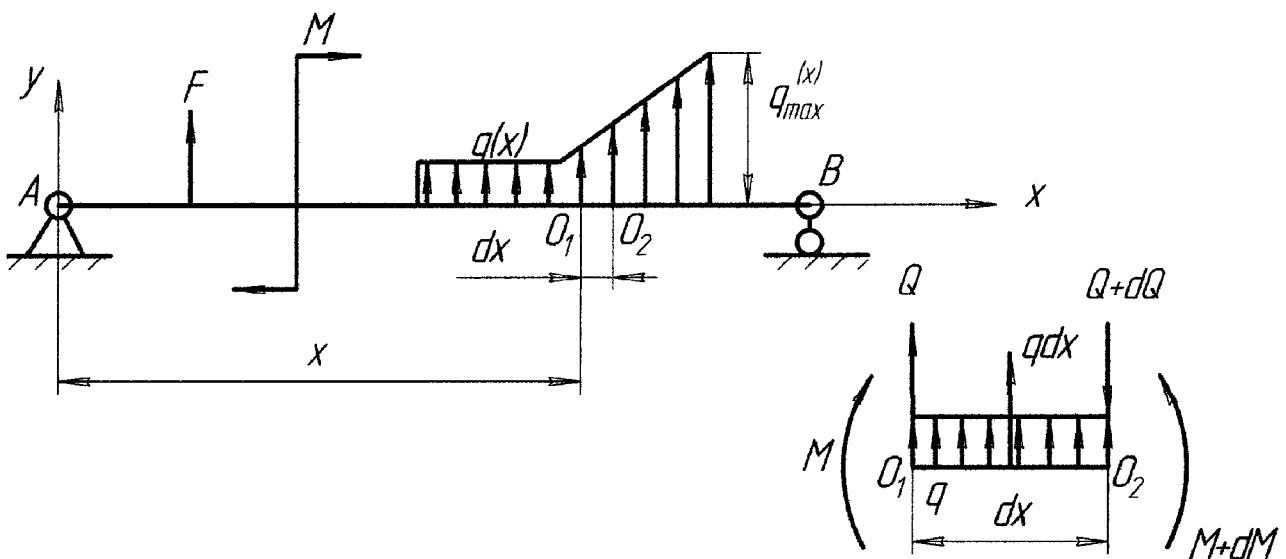
## Правило знаків для поперечної сили ( $Q$ ) і згинального моменту ( $M$ ).

Поперечна сила вважається додатною, якщо відсічену частину балки вона намагається повернути за ходом годинникової стрілки.



Згинальний момент вважається додатнім, якщо відсічену частину балки він намагається деформувати так, щоб стиснуті волокна балки знаходились зверху.

## 2. Диференційні залежності при згині балок.



Розглянемо яку-небудь балку з довільним навантаженням. Розподілене навантаження будемо вважати додатнім, якщо воно направлене вгору. Розглянемо рівновагу малого елемента  $dx$ . Внаслідок малої довжини елемента інтенсивність навантаження будемо вважати рівномірно розподіленим.

Оскільки в загальному випадку  $Q$  і  $M$  змінюються впродовж всієї балки, то в поперечному перерізі  $O_1$  будемо мати  $Q(x)$  і  $M(x)$ , а в перерізі  $O_2$  –  $(Q(x) + dQ(x))$  і  $(M(x) + dM(x))$ .

При чистому згині із шести силових факторів тільки  $Q_y$  і  $M_z$  не будуть дорівнювати нулю. Всі інші –  $N = Q_z = M_y = M_{кр} = 0$ .

Запишемо рівняння рівноваги в проекції всіх сил на вісь  $Y$  для виділеного елемента довжиною  $dx$ :

$$\Sigma Y = 0: Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = q \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

І рівняння моментів відносно перерізу  $O_2$

$$\Sigma M_{O_2} = 0: Qdx + M + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = Q \quad (2)$$

Через те, що  $q \cdot dx \cdot dx/2$  величина другого порядку малості, ми можемо нею нехтувати.

На підставі формул (1) і (2) будемо мати:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (3)$$

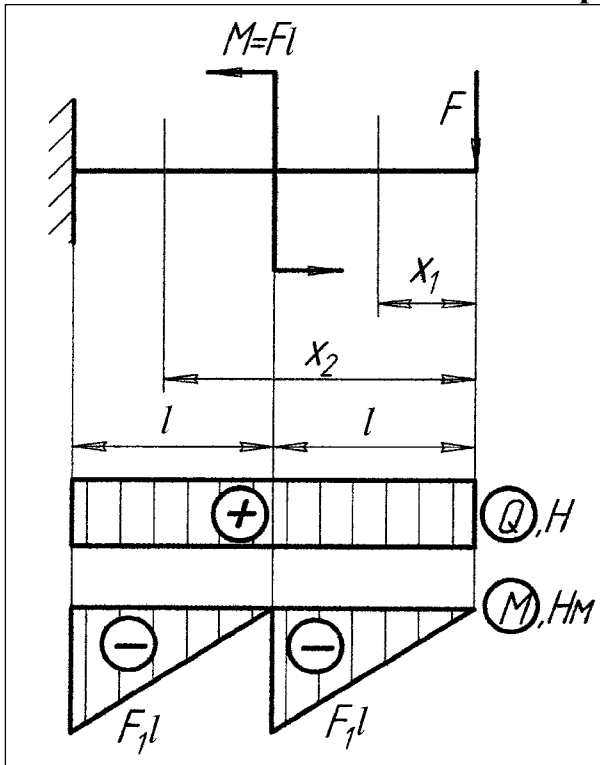
Якщо на ділянці, що розглядається діє ще й розподілений момент інтенсивністю  $m$  ( $N \cdot m/m$ ), то формула (2) буде виглядати так:

$$\frac{dM}{dx} = Q + m \quad (4)$$

Співвідношення (1)-(4) носять назву **диференційних залежностей при згині**.

**3.** Розглянемо декілька характерних прикладів побудови епюр  $Q$  і  $M$  при згині з різними випадками дії зовнішнього навантаження. Як уже відмічалось раніше, для побудови епюри необхідно визначити (коли це потрібно) опорні реакції у балці, розбити її на ділянки і для кожної з них записати рівняння  $Q$  і  $M$ , поетапно ідучи зліва направо, чи справа наліво, а для консолі – з вільного кінця.

### Приклад № 1



I-ша ділянка ( $0 \leq x_1 < l$ ):

$$Q(x_1) = F;$$

$$M(x_1) = -F \cdot x_1;$$

а) при  $x_1 = 0$

$$Q(0) = F;$$

$$M(0) = 0;$$

б) при  $x_1 = l$

$$Q(l) = F;$$

$$M(l) = -F \cdot l;$$

II-га ділянка ( $l \leq x_2 < 2l$ ):

$$Q(x_2) = F;$$

$$M(x_2) = -F \cdot x_2 + M;$$

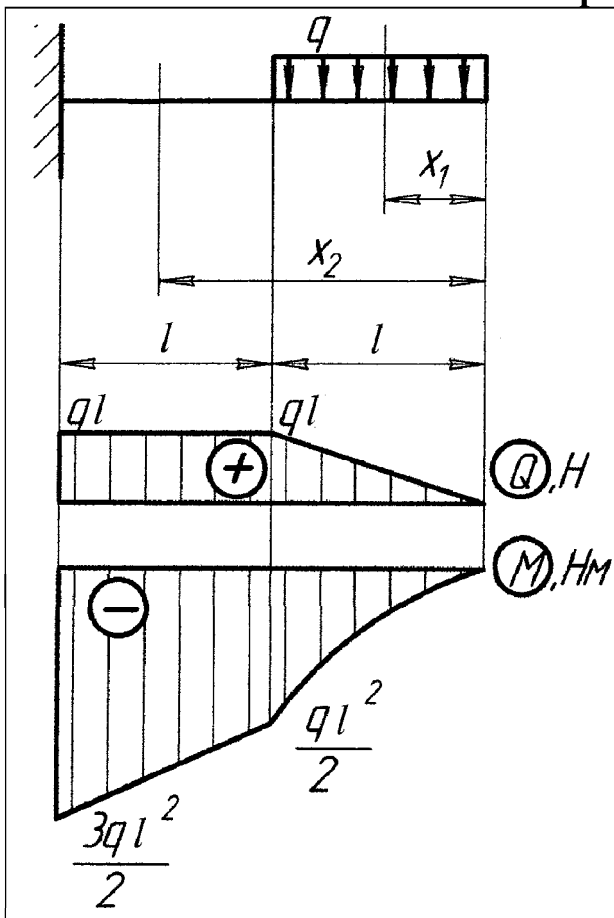
а) при  $x_2 = l$ :  $Q(l) = F;$

$$M(l) = -F \cdot l + M = -F \cdot l + F \cdot l = 0;$$

б) при  $x_2 = 2l$ :  $Q(2l) = F;$

$$M(2l) = -2F \cdot l + F \cdot l = -F \cdot l.$$

### Приклад № 2



I-ша ділянка ( $0 \leq x_1 < l$ ):

$$Q(x_1) = q \cdot x_1;$$

$$M(x_1) = -q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2};$$

а) при  $x_1 = 0$

$$Q(0) = 0;$$

$$M(0) = 0;$$

б) при  $x_1 = l$

$$Q(l) = ql;$$

$$M(l) = -q \cdot \frac{l^2}{2};$$

II-га ділянка ( $l \leq x_2 < 2l$ ):

$$Q(x_2) = q \cdot l;$$

$$M_{x_2} = -ql \cdot \left( x_2 - \frac{l}{2} \right);$$

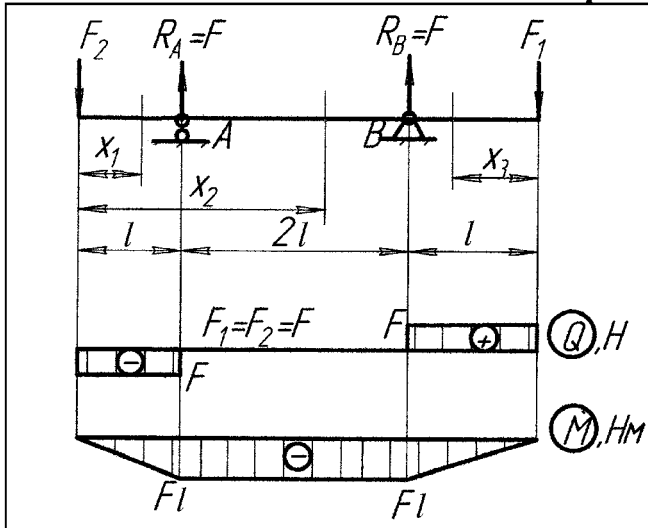
а) при  $x_2 = l$ :  $Q(l) = q \cdot l;$

$$M(l) = -q \cdot l \cdot \left( l - \frac{l}{2} \right) = -q \cdot \frac{l^2}{2} = 0;$$

б) при  $x_2 = 2l$ :  $Q(2l) = q \cdot l$

$$M(2l) = -q \cdot l \cdot \left( 2l - \frac{l}{2} \right) = -q \cdot \frac{3l^2}{2}.$$

### Приклад №3



1. Визначаємо реакції в опорах:

$$\Sigma M_B = 0: F_1 l + R_A \cdot 2l - F_2 \cdot 3l = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{F_2 \cdot 3l - F_1 l}{2l} = \frac{3F_2 - F_1}{2} = F;$$

$$\Sigma M_A = 0: F_1 \cdot 3l - R_B \cdot 2l - F_2 \cdot l = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{F_1 \cdot 3l - F_2 l}{2l} = \frac{3F_1 - F_2}{2} = F.$$

2. Будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M(x)$ :

Розглянемо I-шу ділянку ( $0 \leq x_1 < l$ ):

$$Q(x_1) = -F_1; \quad M(x_1) = -F_1 x_1;$$

а) при  $x_1 = 0$ :  $Q(0) = -F_1$ ;  $M(0) = 0$ ;

б) при  $x_1 = l$ :  $Q(l) = -F_1$ ;  $M(l) = -F_1 l$ ;

Розглянемо II-гу ділянку ( $0 \leq x_2 < l$ ):  $Q(x_2) = -F_2$ ;  $M(x_2) = -F_2 x_2$ ;

а) при  $x_2 = 0$ :  $Q(0) = -F_2$ ;  $M(0) = 0$ ;

б) при  $x_2 = l$ :  $Q(l) = -F_2$ ;  $M(l) = -F_2 l$ ;

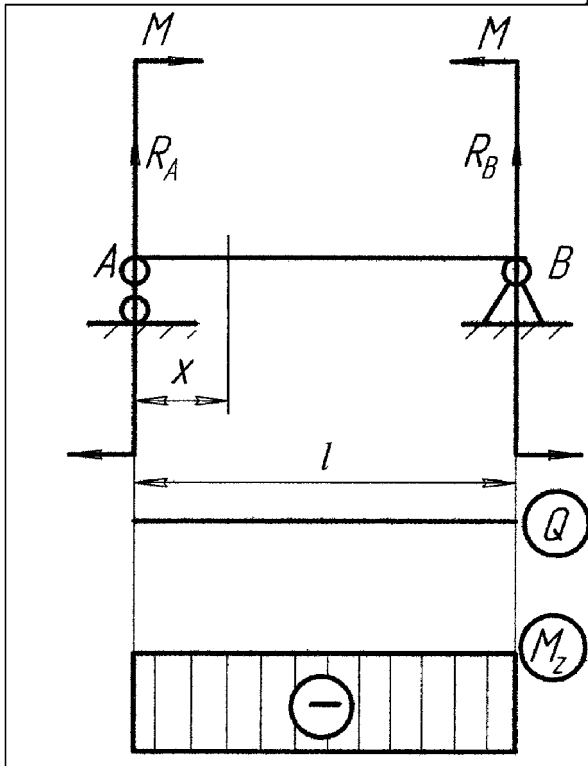
III-ділянка ( $l \leq x_3 < 3l$ ):  $Q(x_3) = -F_2 + R_A = -F_2 + F_1 = 0$ ;

$$M(x_3) = -F x_3 + R_A (x_3 - l);$$

а) при  $x_3 = l$ :  $Q(l) = 0$ ;  $M(l) = -F_2 l + 0 = -F_2 l$ ;

б) при  $x_3 = 3l$ :  $Q(3l) = 0$ ;  $M(3l) = -F_2 3l + R_A \cdot 2l = -F \cdot l$ .

### Приклад №4



1. Знаходимо реакції в опорах А і В:

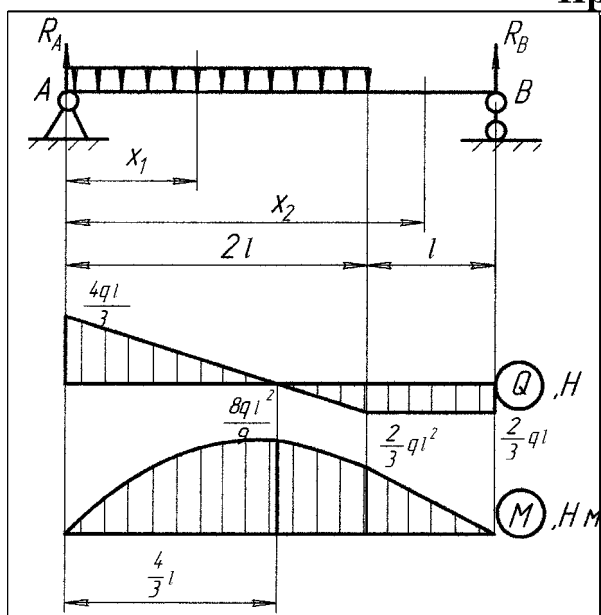
$$\Sigma M_B = 0: R_A l + M - M = 0 \Rightarrow R_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0: -R_B l - M + M = 0 \Rightarrow R_B = 0.$$

Так як реакції в опорах дорівнюють нулю, то епюра  $Q$  буде нульовою, а епюра  $M$  буде прямокутником з ординатою, що чисельно дорівнює  $M$ .

Випадок, коли на ділянці  $Q = 0$ , а епюра  $M$  паралельна поздовжній осі бруса, має назву **чистого згину**.

### Приклад №5



1. Визначимо реакції в опорах А і В:

$$\sum M_A = 0: -R_B \cdot 3l + q \cdot 2l \cdot l = 0 \Rightarrow R_B = \frac{2}{3}ql;$$

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l = 0 \Rightarrow R_A = \frac{4}{3}ql.$$

2. Розбиваємо балку на ділянки.

3. Будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M(x)$ :

I-ша ділянка ( $0 \leq x_1 < 2l$ ):

$$Q(x_1) = R_A - q \cdot x_1;$$

$$M(x_1) = R_A x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2};$$

а) при  $x_1 = 0$ :  $Q(0) = R_A = \frac{4}{3}ql$ ;  $M(0) = 0$ .

б) при  $x_1 = 2l$ :  $Q(2l) = R_A - q \cdot 2l = \frac{4}{3}q \cdot l - 2q \cdot l = -\frac{2}{3}q \cdot l$ ;

$$M(2l) = R_A \cdot 2l - q \cdot \frac{(2l)^2}{2} = \frac{4}{3}q \cdot l \cdot 2l - q \cdot 2l^2 = \frac{2}{3}q \cdot l^2.$$

II-га ділянка ( $2l \leq x_2 < 3l$ ):

$$Q(x_2) = R_A - q \cdot 2l;$$

$$M(x_2) = R_A x_2 - q \cdot 2l \cdot (x_2 - l);$$

а) при  $x_2 = 2l$ :  $Q(2l) = R_A - 2q \cdot l = \frac{4}{3}q \cdot l - 2q \cdot l = -\frac{2}{3}q \cdot l$ ;

$$M(2l) = \frac{4}{3}q \cdot l \cdot 2l - q \cdot 2l \cdot l = \frac{2}{3}q \cdot l^2;$$

б) при  $x_2 = 3l$ :  $Q(3l) = R_A - 2q \cdot l = \frac{4}{3}q \cdot l - 2q \cdot l = -\frac{2}{3}q \cdot l$ ;

$$M(3l) = \frac{4}{3}q \cdot l \cdot 3l - q \cdot 2l \cdot 2l = 0.$$

4. Визначаємо екстремальне значення моменту.

а) Для визначення точки екстремуму на епюрі моментів необхідно рівняння поперечної сили на цій ділянці прирівняти до нуля. Тоді:

$$Q(x_1) = R_A - q \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{\frac{4}{3}ql}{l} = \frac{4}{3}l.$$

Підставимо отримане значення в рівняння для визначення моменту на цій ділянці стержня і визначимо  $M_{\max}$ :

$$M_{\max} = \frac{4}{3}q \cdot l \cdot \frac{4}{3}l - q \frac{\left(\frac{4}{3}l\right)^2}{2} = \frac{16}{9}q \cdot l^2 - \frac{8}{9}q \cdot l^2 = \frac{8}{9}q \cdot l^2.$$

б) По-іншому координату екстремуму можна визначити так. Прирівняємо похідну від значення згинального моменту до нуля:

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = 0 \Rightarrow \left( R_A x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2} \right)' = R_A - q \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{\frac{4}{3}ql}{l} = \frac{4}{3}l.$$

Так як  $\frac{d^2M(x_1)}{dx_1^2} = -q$ , тобто є від'ємна величина, то в поперечному перерізі при  $x_1 = \frac{4}{3}l$  будемо мати максимальне значення згинального моменту.

#### 4. Особливості побудови епюр поперечних сил

1. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, еюра  $Q$  завжди пряма, **паралельна базовій лінії** або ж **співпадає з нею**.

2. Під рівномірно розподіленим навантаженням еюра  $Q$  є **пряма похила лінія**.

3. В тих поперечних перерізах, де прикладені зосереджені сили, проєкції яких перпендикулярні до осі балки, на епюрі  $Q$  обов'язково мають місце стрибки на їх величину.

4. Зосереджений момент ніколи і ніякого відображення на епюрі  $Q$  не має.

#### 5. Особливості побудови епюр згинальних моментів

1. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, еюра моментів завжди пряма похила по відношенню до базової лінії, або ж паралельна їй. Ділянка, на якій поперечна сила дорівнює нулю, а згинальний момент постійний, називається ділянкою *чистого згину*.

2. Під рівномірно розподіленим навантаженням еюра моментів  $M$  завжди обмежена параболою, випуклість якої обов'язково направлена назустріч дії навантаження. При цьому відрізняють два випадки:

а) еюра  $Q$  під рівномірно розподіленим навантаженням не перетинає базисну лінію. В цьому випадку еюра  $M$  являє собою монотонну параболу без екстремумів, і для її побудови достатньо вирахувати значення моментів у двох крайніх точках (початок і кінець ділянки);

б) на ділянці під рівномірно розділеним навантаженням еюра  $Q$  перетинає базисну лінію. В цьому випадку на епюрі моментів в тому перерізі, де  $Q = 0$ , обов'язково має місце екстремум. Тому для побудови параболи на цій ділянці необхідно вирахувати значення моментів в трьох точках (початок, кінець ділянки і точка, де  $Q = 0$ ).

3. В тих поперечних перерізах балки, де діють зосереджені моменти, на епюрі моментів  $M$  обов'язково мають місце стрибки на їх величини.

4. В тих місцях, де діють зосереджені сили, на епюрі моментів обов'язково будуть злами. Загострення цих зламів направлені назустріч дії зовнішніх зосереджених сил.

Необхідно відмітити, що в цілому ряді випадків епюри  $Q$  і  $M$  будують не складаючи виразів для їх визначення, а лише вираховуючи значення для цих величин в характерних поперечних перерізах конструкційного елемента. Для цих випадків слід дотримуватись такого порядку побудови відповідних епюр:

1. Необхідно визначити опорні реакції (для консолі не потрібно);

2. Епюру  $Q$  будують, розглядаючи дію зовнішніх сил за характером їх прикладання. Переходячи при побудові зліва направо.

3. Визначити характерні поперечні перерізи в балці: тобто точки, де прикладені зосереджені сили чи моменти, починається чи закінчується дія розподіленого навантаження, а також ті точки на ділянках дії розподіленого навантаження, де епюра  $Q$  дорівнює нулю.

4. В характерних поперечних перерізах визначити величини згинальних моментів і за ординатами у масштабі побудувати епюру  $M$ .

## ЛЕКЦІЯ № 5

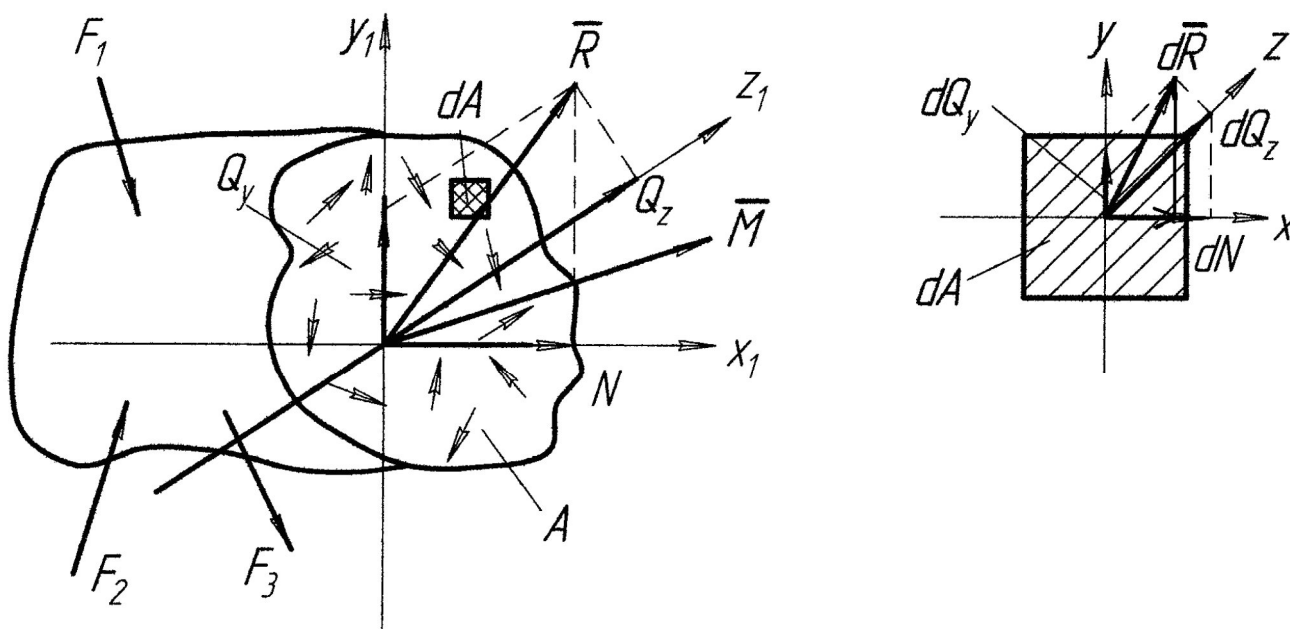
### Поняття про напружено-деформований стан. Напруження та деформації при розтязі-стиску

План лекції:

1. Поняття про напружено-деформований стан.
2. Інтегральні рівняння рівноваги.
3. Чотириєдина задача опору матеріалів при розтязі і стиску,
4. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука. Принцип Сен-Венана.
5. Умова міцності і умова жорсткості при розтязі і стиску.

Література; [1] – с.-82÷86, с.-115÷120; [2] – с.-26÷41.

1. Дія зовнішніх сил на тіло спричиняє його деформування, тобто зміну форми та об'єму. Стан тіла, при якому воно деформується або необхідно визначити його деформації, називається **деформованим станом**, а саме тіло – **деформованим тілом**. При цьому, як вже відмічалось у попередніх лекціях, виникають деформації розтягу-стиску, зсуву, кручення, згину або їх комбінації. Ці деформації викликають відповідні внутрішні зусилля – поздовжня сила, поперечна сила, крутний момент, згинальний момент або їх комбінації.



Розглянемо далі стержень, який знаходиться у рівновазі під дією зовнішніх сил. Розтинаючи його умовним перерізом і розглядаючи рівновагу, наприклад, лівої частини, будемо мати цілий спектр внутрішніх зусиль розподілених по перерізу. Привівши їх до центру ваги перерізу будемо мати головний вектор сил

$\bar{R}$  і головний вектор моменту  $\bar{M}$ .

Будемо вважати, що внутрішні зусилля, які діють по площі нескінченно малого елемента  $dA$ , будуть однаковими, як за своєю величиною, так і за напрямком дії. Таким чином, головний вектор  $d\bar{R}$  буде проходити через центр ваги цього елемента, а головний момент  $d\bar{M} = 0$ . Проектуючи головний вектор  $d\bar{R}$  на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , будемо мати елементарну поздовжню силу  $dN$  і поперечні сили  $dQ_y$  і  $dQ_z$ . Так як ми прийняли, що внутрішні зусилля на елементарній площі розподіляються рівномірно то, розділивши величини  $dN$ ,  $dQ_y$ ,  $dQ_z$  на площу елементарної ділянки  $dA$ , отримаємо величини поздовжніх і поперечних сил, що припадають на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dA} \quad (1)$$

Ця величина має назву **напруження**. Таким чином, *напруженням* називається величина внутрішньої сили, що припадає на одиницю площі перерізу.

За характером дії внутрішніх сил розрізняють **нормальні** і **дотичні** напруження. Якщо появу напружень викликає поздовжня сила  $dN$  (див. (1)), то такі напруження називаються **нормальними**, і їх напрямок співпадає з **напрямком нормалі** до перерізу, тобто з поздовжньою віссю стержня.

Появу **дотичних** напружень викликають поперечні сили  $dQ_y$  і  $dQ_z$ . Напрямок цих напружень паралельний до осей  $y$  та  $z$ , відповідно, тобто перпендикулярний до поздовжньої осі стержня і **дотичний** до перерізу. Дотичні напруження діють в площі перерізу і визначаються:

$$\tau_y = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (2)$$

Одиницею виміру напружень є Па, кПа, МПа.

Стан тіла, при якому в тілі виникають напруження (або необхідно їх визначити) називається *напруженим станом*.

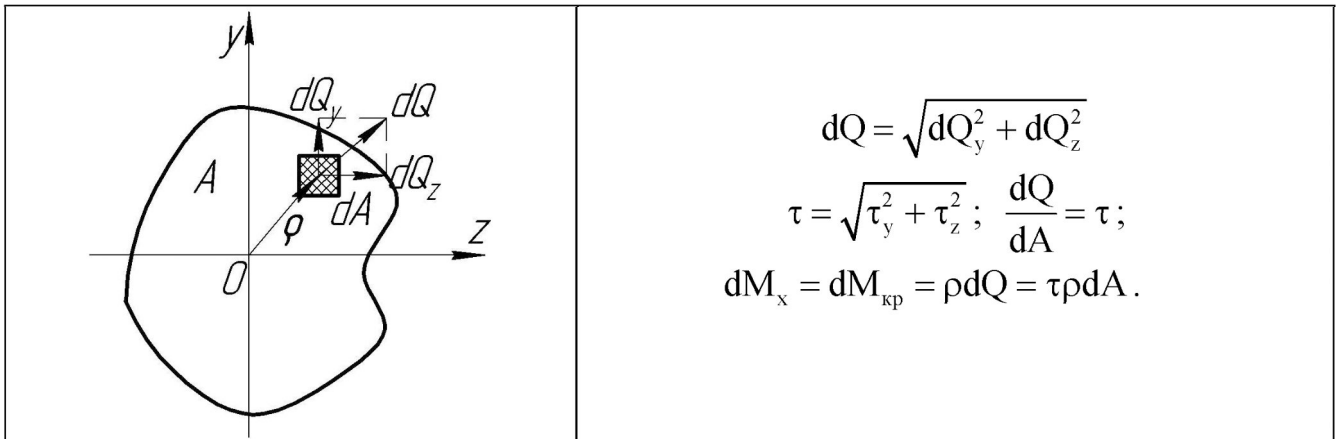
Стан тіла, при якому внаслідок дії зовнішніх сил тіло деформується, (в ньому виникають напруження і деформації) називається *напружено-деформованим станом*.

2. Переходячи від елементарної площі шляхом інтегрування до повної площі перерізу, з урахуванням формул (1) і (2) ми можемо записати:

$$\begin{aligned} N &= \int_A dN = \int_A \sigma dA; & M_z &= \int_A y dN = \int_A \sigma y dA; \\ Q_y &= \int_A dQ_y = \int_A \tau_y dA; & M_y &= \int_A z dN = \int_A \sigma z dA; \\ Q_z &= \int_A dQ_z = \int_A \tau_z dA; & M_x &= M_{кр} = \int_A \rho dQ = \int_A \tau \rho dA. \end{aligned} \quad (3)$$

Залежності (3) називаються **інтегральними рівняннями рівноваги**.

При отриманні виразу для крутного моменту у формулі (3) приймалися до уваги наступні перетворення:

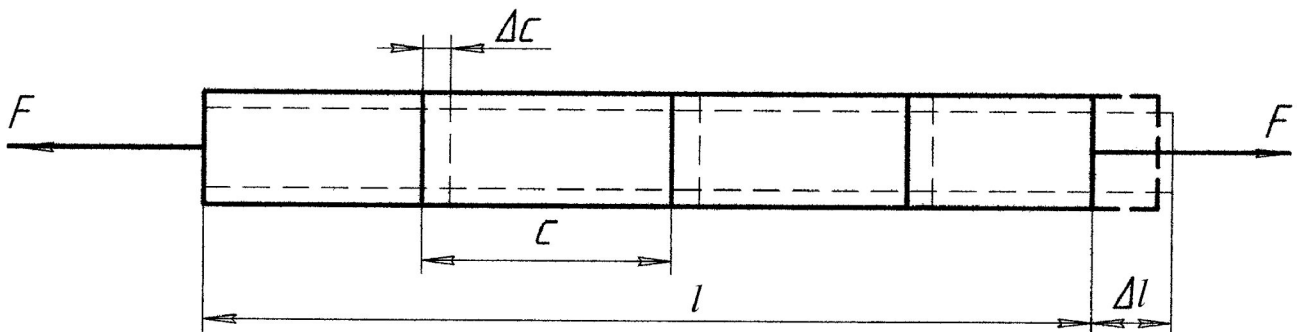


3. Оскільки закон розподілу напружень за висотою поперечного перерізу невідомий, вирахувати величину напружень тільки на основі інтегральних рівнянь рівноваги неможливо. Така задача є статично невизначною і для її розв'язку вона розглядається з чотирьох сторін (**чотириєдина задача опору матеріалів**):

- 1) Статична сторона задачі, де записуються необхідні інтегральні рівняння рівноваги;
- 2) Геометрична сторона, в якій оцінюються можливі переміщення точок перерізу, що розглядається. Як правило, це експериментальні дані;
- 3) Фізична сторона задачі, в якій встановлюється зв'язок між напруженнями і переміщеннями (закон Гука);
- 4) Проводиться синтез – тобто разом розв'язуються всі рівняння і шляхом виключення або урахування відомих переміщень (деформацій) дістаємо формули, що виражають напруження через зусилля або моменти у перерізі.

4. Розтяг або стиск стержня спричиняють сили, що діють на нього вздовж осі. При цьому, в будь-якому поперечному перерізі по довжині стержня із шести внутрішніх силових факторів не буде дорівнювати нулю **тільки один** – поздовжня сила  $N$ . Тобто  $N \neq 0$ ;  $Q_y = Q_z = M_z = M_y = M_{kp} = 0$ .

Розглянемо стержень, навантажений зовнішніми силами, які паралельні його поздовжній осі і проходять через центр ваги перерізу. Запишемо для цього стержня чотириєдину задачу.



### 1) Статична сторона задачі :

$$N = \int_A \sigma dA .$$

2) **Геометрична сторона задачі.** При експериментальних дослідженнях було встановлено, що лінії нанесені перпендикулярно до осі стержня при навантаженні стержня переміщуються, залишаючись паралельними одна одній. Передбачаючи, що картина буде незмінною і в середині стержня, прийшли до такого відомого висновку: поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після її виникнення, переміщуючись вздовж його осі. Цей висновок має назву **гіпотези плоских перерізів**. На основі цього, при незмінному навантаженні, можна записати:

$$\Delta l = \text{const} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const}$$

3) **Фізична сторона задачі** полягає у встановленні зв'язку між деформаціями і напруженнями. При експериментальних дослідженнях Робертом Гуком було встановлено, що напруження, які виникають у стержні, прямо пропорційні відносним деформаціям. Залежність має назву **закон Гука**

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4)$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, що характеризує фізико-механічні властивості матеріалу і носить назву модуля **пружності першого роду** або **модуля Юнга**. Найчастіше його називають **модулем пружності**. Вимірюється у Па, кПа, МПа і дорівнює:

для сталі:  $E \approx 2.1 \cdot 10^5$  МПа; міді -  $E \approx 1 \cdot 10^5$  МПа;

алюмінію:  $E \approx 0.7 \cdot 10^5$  МПа; дерева -  $E \approx 0.1 \cdot 10^5$  МПа.

4) **Синтез.** Враховуючи постійність модуля пружності для даного матеріалу (гіпотеза однорідності й ізотропності), закон Гука, а також те, що  $\varepsilon = \text{const}$ , знаходимо, що:  $\sigma = E\varepsilon = \text{const}$ . Підставляючи цей вираз в інтегральне рівняння рівноваги, отримуємо:

$$N = \int_A E\varepsilon dA = E\varepsilon \int_A dA = E\varepsilon A = \sigma A$$

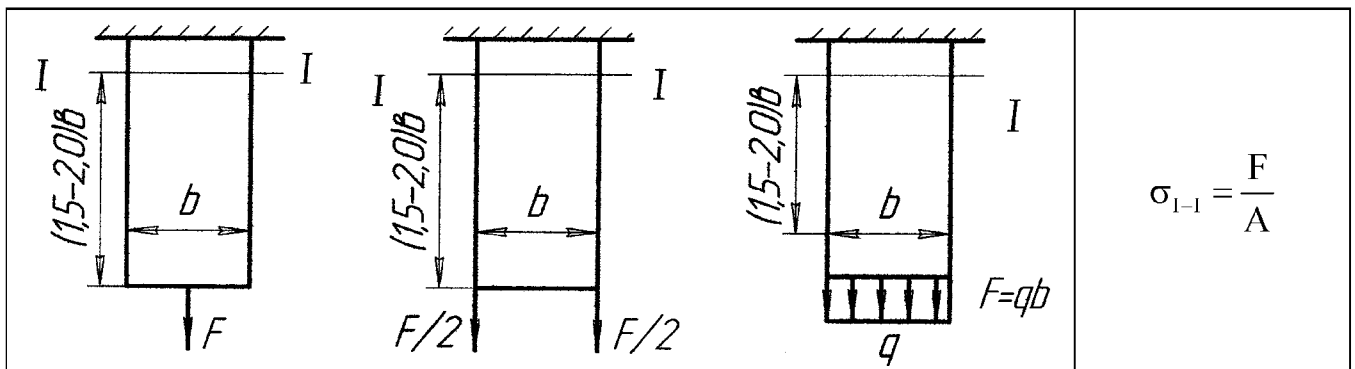
звідки:

$$\sigma = \frac{N}{A} .$$

Тобто, напруження при розтязі-стиску визначаються як відношення поздовжньої сили до площі поперечного перерізу стержня. Знак напружень визначається знаком поздовжньої сили, що діє в перерізі:  $\sigma > 0$  – розтяг;  $\sigma < 0$  – стиск.

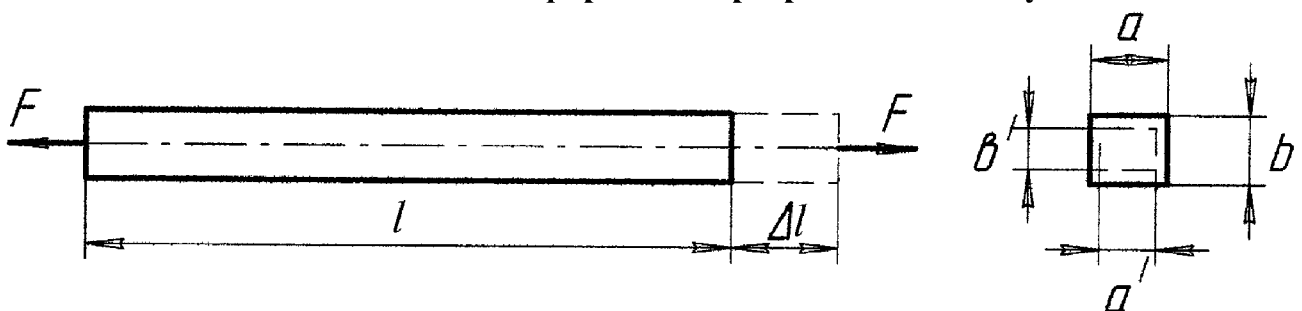
### Принцип Сен - Венана

Якщо тіло послідовно навантажувати статично еквівалентними системами сил, і при умови що розміри зони прикладання їх невеликі в порівнянні з розмірами самого тіла, то можна вважати в перерізах, достатньо віддалених від місць прикладання навантажень, величина напружень мало залежить від способу навантаження.



Дослідження показали, що на відстані  $(1.5 \div 2)b$  ( $b$  ширина чи діаметр стержня) від точки прикладання сили напруження в перерізі не залежать від характеру її дії.

### 5. Визначення деформацій при розтязі і стиску



Як відомо:  $\Delta l$  – абсолютне подовження стержня, або ж абсолютна поздовжня деформація. Має розмірність одиниць довжини;

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ – відносна поздовжня деформація;}$$

$$\varepsilon' = \frac{a' - a}{a} = \frac{b' - b}{b} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} \text{ – відносна поперечна деформація.}$$

Як показали численні досліди, величина відносної поперечної деформації для однорідних ізотропних матеріалів практично однакова. Для таких матеріалів також майже не змінюється відношення поперечної деформації до поздовжньої. Це відношення носить назву **коефіцієнта Пуассона**:

$$\left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \nu.$$

Він змінюється у межах  $\nu = 0 \div 0.5$ . Для матеріалів, що застосовуються у машинобудуванні, наприклад, для сталей -  $\nu = 0.22 \div 0.33$ .

Оскільки відносна поперечна і поздовжня деформації відбуваються в протилежних напрямках, то їх взаємозв'язок виглядає так:

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}.$$

Виходячи із закону Гука  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  і відношення для абсолютних подовжень стержня при розтязі-стиску, ми можемо записати **закон Гука в абсолютних одиницях**:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \Rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (6)$$

Добуток  $EA$  має назву **жорсткість поперечного перерізу стержня, при розтязі чи стиску** (Н, кН).

Величина  $\frac{EA}{l}$  називається **жорсткістю стержня** (Н/м; кН/м).

Законом Гука у цій формі можна користуватись тільки тоді, коли  $N = \text{const}$  і  $EA = \text{const}$ . Якщо якась з цих умов не виконується, то використовується закон Гука в інтегральній формі:

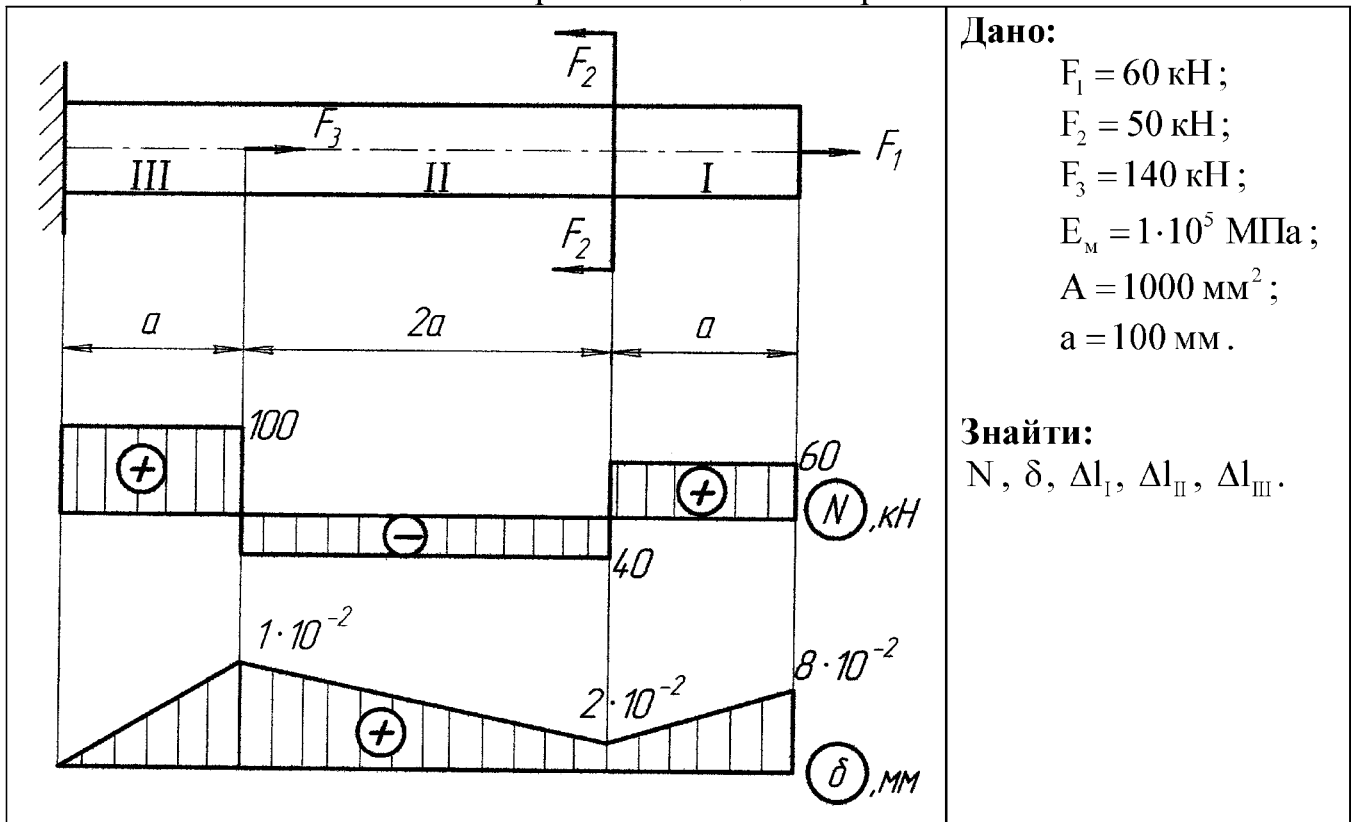
$$\Delta l = \int_l \frac{N(x)dx}{EA(x)}. \quad (7)$$

Якщо стержень складається із декількох ділянок, то абсолютне подовження стержня визначається так:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_{l_i}^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}. \quad (8)$$

### Приклад:

Розглянемо консольно закріплений мідний стержень.



### Розв'язок :

$$1) \quad \sigma_I = \frac{N_I}{A}; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A}; \quad \sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A};$$

$$\sigma_I = \frac{60 \cdot 10^3}{1000 \cdot 10^{-6}} = \frac{60 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 60 \text{ (МПа)}; \quad \sigma_{II} = -40 \text{ МПа}; \quad \sigma_{III} = 100 \text{ МПа}.$$

$$2) \quad \delta_{III}^k = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ (м)} = 0.1 \text{ мм};$$

$$\delta_{II}^k = \delta_{III}^k + \Delta l_{II} = 1 \cdot 10^{-4} - \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ (м)} = 0.02 \text{ мм};$$

$$\delta_I^k = \delta_{II}^k + \Delta l_I = 2 \cdot 10^{-5} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ (м)} = 0.08 \text{ мм}.$$

#### Умова міцності при розтязі-стиску

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N_{\max}}{A} \right| \leq [\sigma]. \quad (9)$$

$[\sigma] = [\sigma_+]$  – допустиме напруження при розтязі;

$[\sigma_-]$  – допустиме напруження при стиску.

#### Умова жорсткості при розтязі-(стиску)

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N(x) dx}{EA(x)} \leq [\Delta l] \quad (10)$$

допустима деформація при розтязі-стиску.

Вираз (9) є основною умовою, а (10) – допоміжною умовою при розрахунках на міцність і жорсткість.

#### На основі умови міцності розраховують три типи задач:

1) Розрахунок перевірочний (при цьому задані: величини зовнішніх сил; площі поперечних перерізів на всіх ділянках стержня; величина  $[\sigma]$ );

2) Розрахунок проектувальний (мета – підібрати розміри поперечного перерізу за заданими навантаженнями і допустимими напруженнями);

3) За відомими розмірами стержня, умовами навантаження та матеріалом необхідно визначити допустиму величину навантаження.

## ЛЕКЦІЯ № 6

### Механічні характеристики матеріалів

План лекції:

1. Пластичні і крихкі матеріали.
2. Діаграми деформування і основні характеристики міцності матеріалів.
3. Основні відмінності між пластичними і крихкими матеріалами.

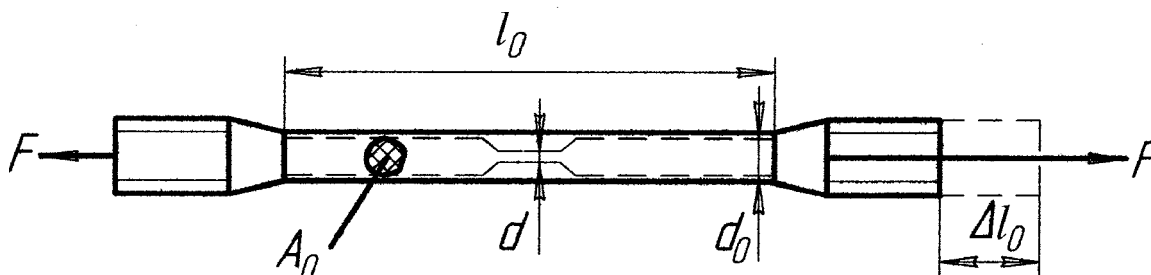
Поняття про допустимі напруження.

4. Залежність механічних характеристик матеріалів від дії окремих факторів. Концентрація напружень.

**Література:** [1] – с. 87÷106; [2] – с. 45÷70

1. Характеристики міцності матеріалів визначають при випробуваннях циліндричних або плоских зразків на розтяг, зсув, стиск, кручення, згин, твердість.

В зразках для випробувань, наприклад, на розтяг (один із основних видів досліджень) повинні суворо дотримуватися їх характерні розміри:  $l_0 = 10d_0$  або  $l_0 = 5d_0$  – такі зразки називаються *пропорційними*.



Матеріали за характером деформування діляться на *пластичні і крихкі*.

Матеріали, у яких відносна залишкова поздовжня деформація зразка  $\delta < 5\%$  відносяться до числа **крихких**. Матеріали, у яких відносна поздовжня деформація зразка  $\delta > 5\%$  – *пластичні*.

$\delta$  – відносне залишкове подовження зразка після розриву, яке визначається так:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100\% = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100\%,$$

де  $\Delta l_0$  – подовження зразка після розриву.

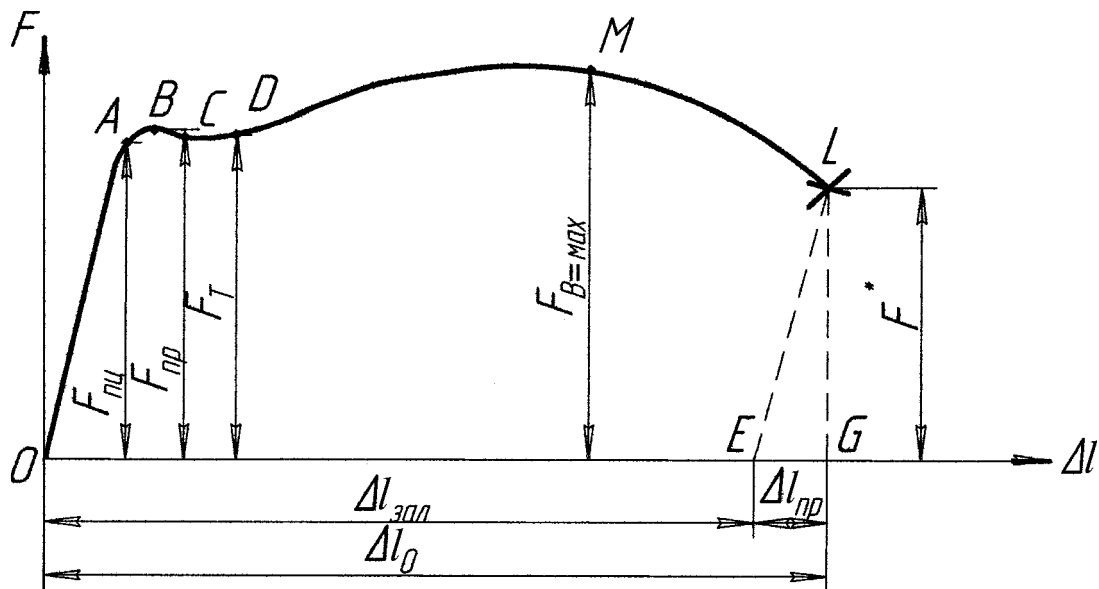
Вона де що менше повного подовження зразка перед самим моментом розриву (через те, що пружні деформації після розриву зразка зникають). Так для вуглецевої сталі Ст.2 –  $\delta \approx 30 \div 31\%$ .

Разом з відносним подовженням визначається і відносне залишкове звуження зразка після розриву, як відношення площі перерізу в місці розриву зразка до початкової площі його перерізу:  $\psi = \frac{\Delta A_0}{A_0} 100\%$ .

Так для тієї ж сталі Ст.2 –  $\psi = (55 \div 65)\%$ . Ці дві характеристики є основними характеристиками матеріалу при визначенні його пластичності.

## 2. Діаграма деформування пластичного матеріалу. Основні характеристики міцності

В процесі випробувань на розтяг по відомих зусиллях і відповідним їм деформаціям будуть так звані діаграми розтягу пластичного матеріалу.



- $\sigma_{\text{мц}}$  – границя пропорційності;
- $\sigma_{\text{пр}}$  – границя пружності;
- $\sigma_{\text{T}}$  – границя текучості;
- $\sigma_{\text{B}}$  – границя міцності, або тимчасовий опір;

OA – ділянка пропорційності, де виконується закон Гука;

AB – ділянка, де зберігаються пружні деформації під дією навантаження.

CD – площадка текучості (ріст деформації проходить при  $F = \text{const}$ ).

Текучість супроводжується підвищенням температури, зміною електромагнітних властивостей матеріалу. Саме тут зароджуються незворотні процеси залишкових деформацій.

DM – ділянка повторного зміцнення, на якій знову для збільшення деформації необхідно зростання діючого навантаження.

ML – ділянка руйнування, де злет деформації відбувається одночасно з падінням величини навантаження.

### Основні характеристики міцності.

$\sigma_{\text{мц}} = \frac{F_{\text{мц}}}{A}$  – границя пропорційності – це те максимальне напруження, при якому ще виконується закон Гука.

$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{A}$  – границя пружності – це те максимальне напруження, при якому в

тілі після розвантаження не залишається залишкових деформацій.

$\sigma_T = \frac{F_T}{A}$  – **границя текучості** – це те мінімальне напруження, при якому ріст деформації відбувається без зміни величини діючого навантаження.

$\sigma_B = \frac{F_B}{A}$  – **границя міцності** (тимчасовий опір) – це те максимальне, яке може витримати зразок (матеріал) не руйнуючись.

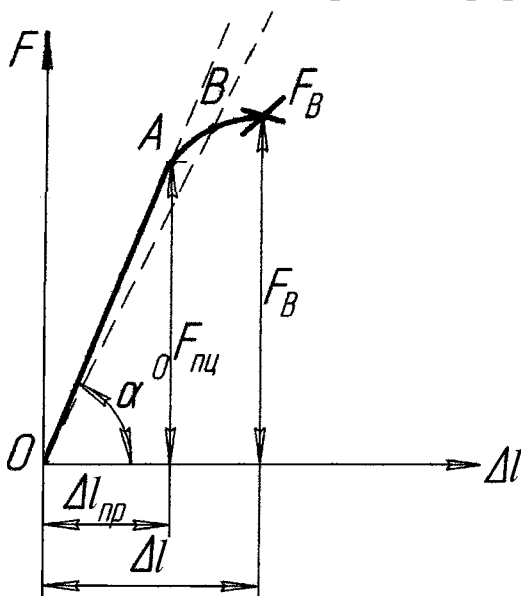
$\sigma_K = \frac{F_K}{A}$  – **напруження руйнування матеріалу**. (Воно може бути значно більше за  $\sigma_B$ , але в розрахунках не враховується).

$$\Delta l_0 = \Delta l_{пр} + \Delta l_{зал} - \text{повне подовження зразка.}$$

$\Delta l_{пр}$  – **пружна деформація**.

$\Delta l_{зал}$  – **пластична (залишкова) деформація**.

### Діаграма деформування крихкого матеріалу



Розрив зразка із крихкого матеріалу відбувається за досить незначних подовжень і практично без появи „шийки”.

Тангенс кута нахилу  $\text{tg}\alpha$  на ділянці пропорційності діаграми деформування характеризує жорсткість зразка, що випробовується.

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_{\text{мн}}}{\Delta l} = \frac{F}{\frac{Fl}{EA}} = \frac{EA}{l}; \quad \text{tg}\alpha = \frac{EA}{l}$$

Діаграма для крихких матеріалів не має явно вираженої прямолінійної ділянки, та все ж на практиці і для цих матеріалів використовують закон Гука. Значення модуля пружності визначають як тангенс кута нахилу прямої, проведеної із початкової точки O діаграми в т. B, що відповідає напруженню, при якому визначають деформацію. Модуль, що так визначається отримав назву *січний*.

Крихкі матеріали не мають площадки текучості на діаграмі деформування і границя текучості визначається умовно. Так за ГОСТом 1497-84 *умовна границя текучості* визначається величиною залишкової деформації, на рівні 0.2% від вимірюваної її довжини і позначається так  $\sigma_{0.2}$ .

### 3. Основні відмінності між крихкими і пластичними матеріалами

1. За характером деформування до розриву;
2. По відношенню до дії розтягуючих і стискаючих зусиль:

- пластичні матеріали майже однаково працюють на розтяг і стиск;
- крихкі матеріали досить добре працюють при дії стискаючих зусиль і погано працюють при дії розтягуючих зусиль.

### Поняття про допустимі напруження

$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{заг}}}{n}$ , де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності, що показує в скільки разів допустиме напруження менше загрозового.

Величина  $n$  вибирається залежно від цілого ряду обставин: від точності умов навантаження; умов експлуатації; розрахункової схеми і того, наскільки добре вивчені властивості матеріалу і наскільки він однорідний за довжиною деталі і т. ін.

$\sigma_{\text{заг}}$  – вибирається залежно від властивостей матеріалу.

#### Так для пластичних матеріалів:

$\sigma_{\text{заг}} = \sigma_T$  – оскільки недопустима поява пластичних деформацій.

$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_T}$ , де  $K_T$  – коефіцієнт запасу міцності, який дорівнює 1.2...1.8.

#### Для крихких матеріалів:

$\sigma_{\text{заг}} = \sigma_B \Rightarrow [\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}$ , де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності по границі міцності, який дорівнює 1.5...3.

### 4. Залежність механічних характеристик матеріалів від дії окремих факторів

1. Швидкість деформування – чим вона вища, тим вище границя текучості і тимчасовий опір (особливо для пластичних матеріалів);

2. Технологічні фактори:

2.1. Прокатка – напрям прокатки робить матеріал (особливо сталь) анізотропною (зерна витягнуті в одну сторону);

2.2. Попередня витяжка за границю текучості – це суттєво підвищує  $\sigma_T$  і  $\sigma_B$ , але знижує  $\Delta l_{\text{залиш}}$  (наклеп). Матеріал стає більш пружним і міцним, але менше пластичним, тобто стає більш крихким;

2.3. Волочіння (проволока, дріт);

2.4. Азотування;

2.5. Дробиструйна обробка і ін.

3. Вплив температури:

При довготривалих умовах експлуатації і високих температурах виділяють такі явища:

3.1. Повзучість – характеризується появою помітних пластичних деформацій при напруженнях менших  $\sigma_T$ ;

3.2. Релаксація – характеризується падінням напружень на протязі часу через наявність повзучості при незначній величині повної деформації.

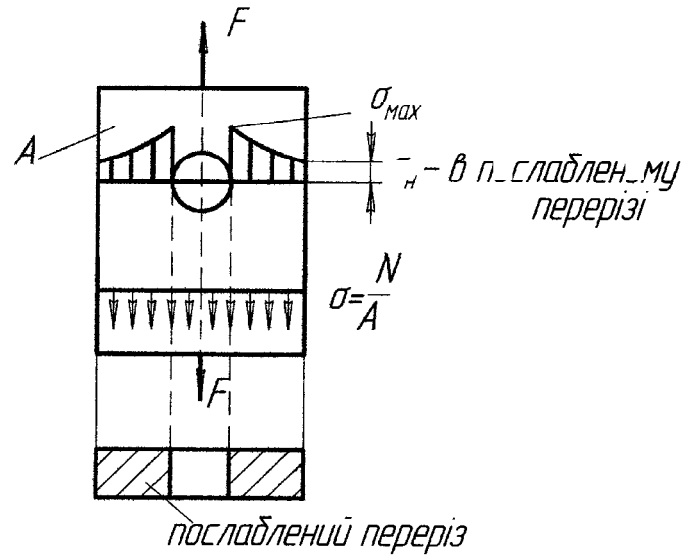
3.3. Тривала міцність – характеризується можливістю руйнування деталі

на протязі часу при напруженнях значно менших  $\sigma_B$  (границя міцності).

### Поняття про концентрацію напружень

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{II},$$

де  $\alpha$  – теоретичний коефіцієнт концентрації напружень, який є табульованою величиною.



$$\sigma_{II} = \frac{N}{A_{\text{послабленого перерізу}}}$$

Різка зміна розмірів і конфігурації профілю (місця) – носить назву *концентратора напружень*. *Концентрація напружень* – це різке їх збільшення в місці наявності концентратора.

## ЛЕКЦІЯ № 7

### Геометричні характеристики плоских перерізів

План лекції:

1. Статичний момент площі поперечного перерізу. Центр ваги. Приклади, визначення.
  2. Моменти інерції площі поперечного перерізу. Основні особливості. Приклади визначення.
- Література:** [1] – с. 15÷21

#### 1. Статичні моменти площі перерізу. Центр ваги площі перерізу

Розглянемо довільний поперечний переріз стержня, що зв'язаний з координатними осями  $zOy$ .

Виділимо елемент площі  $dA$  з координатами  $(y, z)$ , по аналогії з моментом сили відносно якої-небудь осі, і запишемо вираз для моменту площі перерізу, який і буде називатися **статичним моментом площі перерізу**.

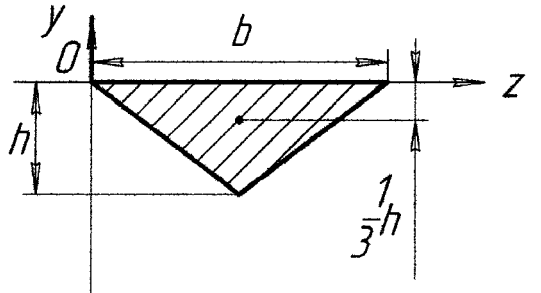
	$dA = dzdy$ $\begin{cases} dS_z = ydA \\ dS_y = zdA \end{cases} \quad (1)$ <p>(1) – статичні моменти елементарної площі перерізу відносно осей <math>oy</math> і <math>oz</math>. Тоді статичні моменти всієї площі перерізу будуть виглядати таким чином:</p> $S_z = \int_A ydA; \quad S_y = \int_A zdA. \quad (\text{см}^3) \quad (2)$
--	--

Для конструкційних елементів, площі перерізів  $A$  і координати центрів ваги  $y_c, z_c$  яких відомі, статичні моменти площ розраховуються за формулами:

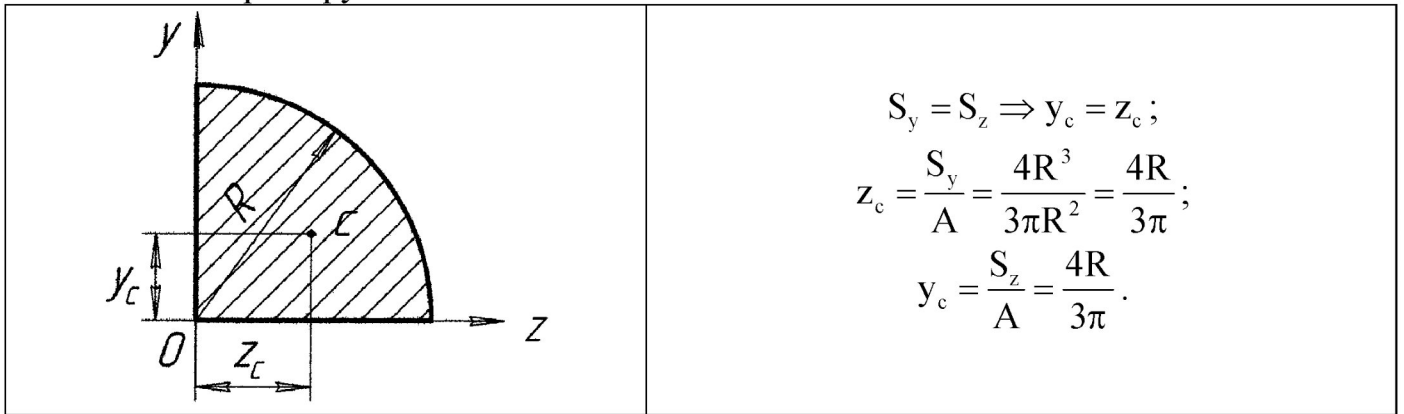
$$S_z = y_c A; \quad S_y = z_c A. \quad (3)$$

Приклад № 1.

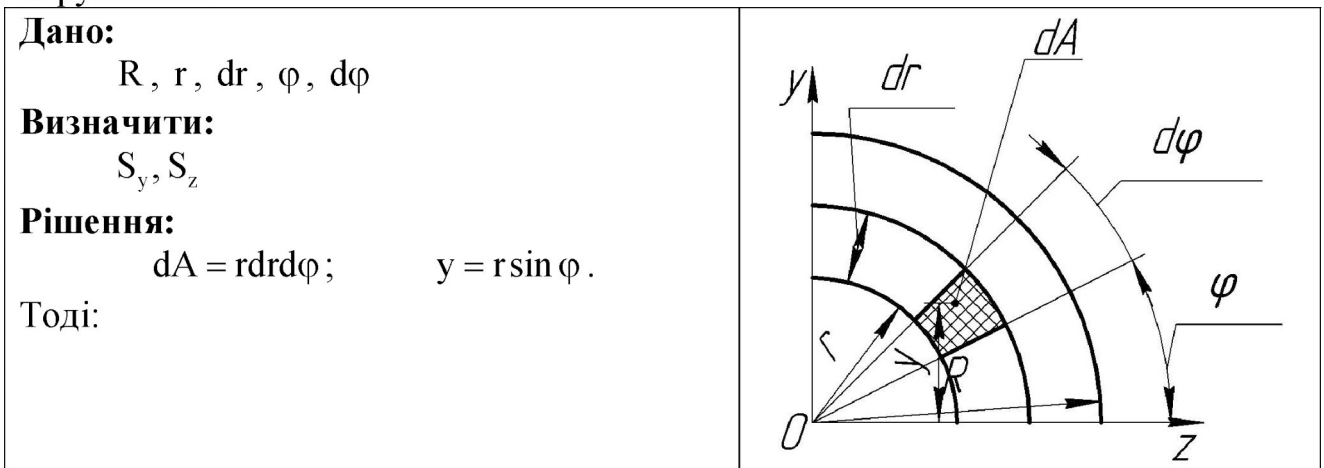
1. Трикутник. Статичний момент площі перерізу трикутника є добутком його площі на відповідну координату центра ваги.

	$S_z = -\frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{2}bh = -\frac{bh^2}{6};$ $S_y = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{hb^2}{4}.$
---	--

## 2. Четверть круга



Якщо необхідно знайти статичний момент площі 1/4 круга відносно осі Oz в полярних координатах, то для цього необхідно виділити елементарний сектор з кутом  $d\varphi$ . Довільними радіусами  $r$  і  $dr$  проведемо дві дуги окружності.

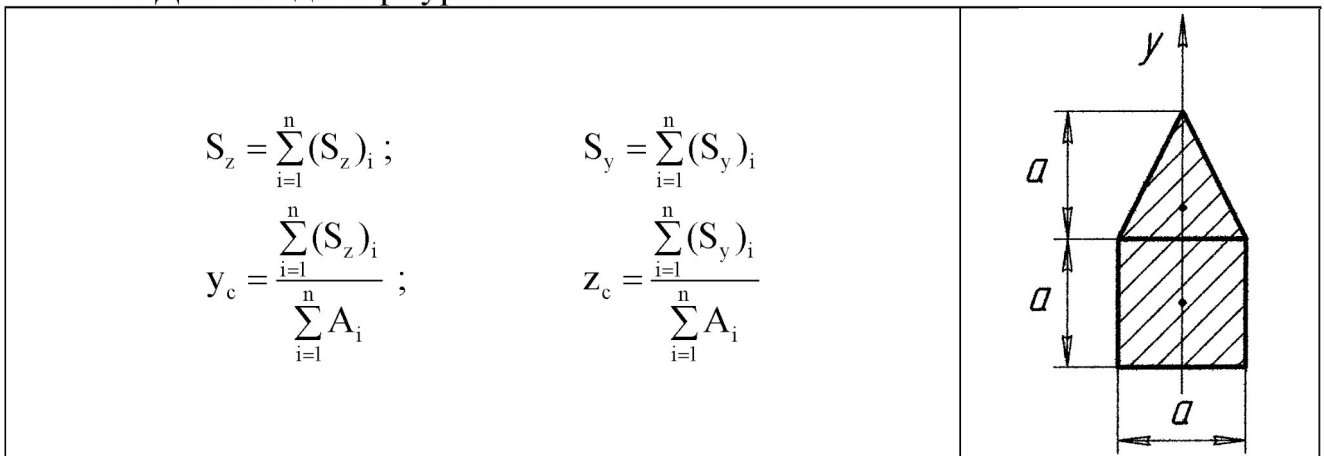


$$S_z = \int_A y dA \Rightarrow S_z = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{R^3}{3} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} (0 + 1)$$

$$S_z = \frac{R^3}{3}.$$

Аналогічно,  $S_y$  відносно осі  $y$  дорівнює:  $S_y = \frac{R^3}{3}.$

## 3. Для складної фігури :



Статичним моментом площі перерізу відносно осі, що розглядається, називається величина, яка чисельно дорівнює інтегралу, вирахованому по всій площі поперечного перерізу від добутку площі елементарної площадки на відстань відрізка (довжину) до осі, що розглядається.

Загальним методом визначення статичних моментів є метод інтегрування. Для простих перерізів, де відомо, як визначити їх площу і положення центру ваги, статичний момент визначається як добуток площі перерізу, що розглядається на відстані від центру її ваги до відповідної осі.

Статичний момент площі перерізу може бути: додатнім, від'ємним і дорівнювати нулеві.

Осі, відносно яких статичні моменти площі перерізу дорівнюють нулю, називаються *центральними*.

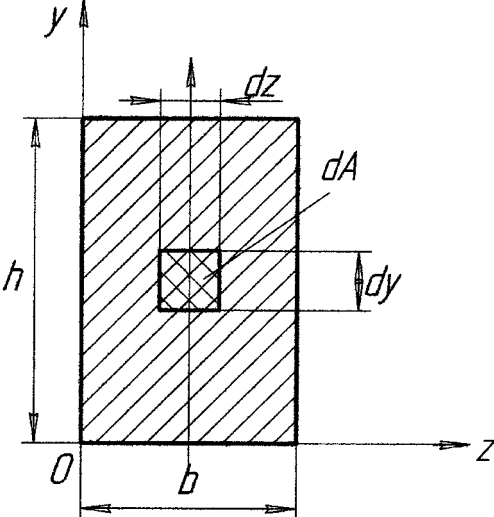
## 2. Моменти інерції плоских фігур

Осьовим моментом інерції площі перерізу відносно осі, що розглядається, називається інтеграл, який розраховується по всій площі поперечного перерізу від добутку площі елементарної площадки на квадрат відстані, до осі, що розглядається.

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA \quad (\text{см}^4)$$

Осьові або екваторіальні моменти інерції  $I_z$  і  $I_y$  завжди більші нуля.

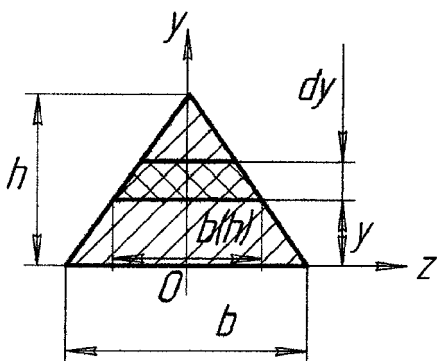
**Приклад:**

	$dA = dydz;$ $I_z = \int_A y^2 dydz = \int_0^b \int_0^h y^2 dydz =$ $= \int_0^b \left( \int_0^h y^2 dy \right) dz = \frac{bh^3}{3}.$ <p>Аналогічно: <math display="block">I_y = \frac{hb^3}{3}</math></p>
---	---

Визначити осьовий момент інерції трикутника  $I_z$  відносно осі

Для визначення моменту інерції відносно осі Oz вибираємо елементарну полоску довжиною  $b(y)$  і висотою  $dy$ . Тоді площа цієї елементарної смужки буде дорівнювати:  $dA = b(y)dy$ .

Із подібності двох трикутників можемо записати:



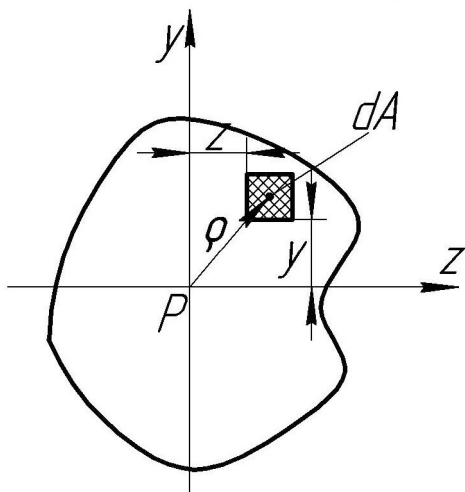
$$\frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow b(y) = \frac{b}{h}(h-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_z = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h (h-y)y^2 dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Проводячи вісь Oz через основу трикутника ми не накладали на його форму ніяких умов. Таким чином, момент інерції любого трикутника відносно осі, що проходить через його основу буде дорівнювати  $\frac{bh^3}{12}$ .

### Полярний момент інерції площі перерізу

Полярним моментом інерції площі перерізу фігури відносно даної точки (що називається полюсом) називається інтеграл, який вираховується по всій площі поперечного перерізу від добутку площі елементарної площадки на квадрат відстані до полюсу.



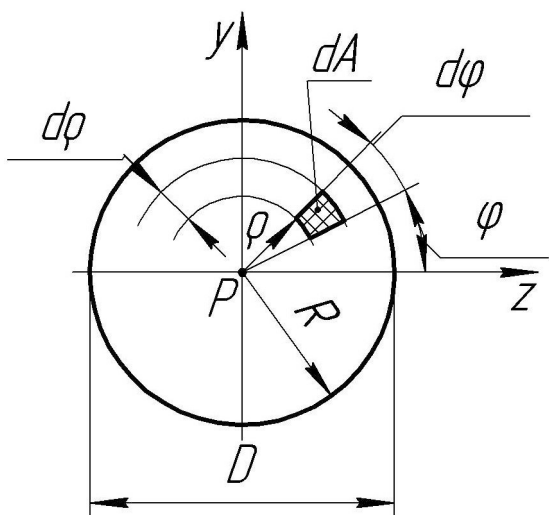
$$\rho^2 = y^2 + z^2$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_z + I_y$$

Іншими словами: **полярний момент інерції** площі перерізу відносно точки перетину двох перпендикулярних осей (полюса) дорівнює сумі осьових або екваторіальних моментів інерції.

### Приклад

Визначити величину  $I_p$  для круга:



$$dA = \rho d\rho d\phi$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \rho^3 d\rho \right) d\phi =$$

$$= \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \Rightarrow I_z = I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi D^4}{64}.$$

### Відцентровий момент інерції.

Відцентровим моментом інерції площі перерізу відносно двох взаємно перпендикулярних осей називається

інтеграл, що розраховується по всій площі поперечного перерізу від добутку площі елементарної площадки на відстані від центру вага цієї площадки до відповідних осей.

$$I_{zy} = \int_A yz dA \quad (\text{см}^4)$$

## Основні особливості відцентрового моменту інерції.

1. Основною особливістю  $I_{zy}$  є те, що він може бути додатнім, від'ємним і дорівнювати нулю.

2. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, носять назву **головних осей інерції**.

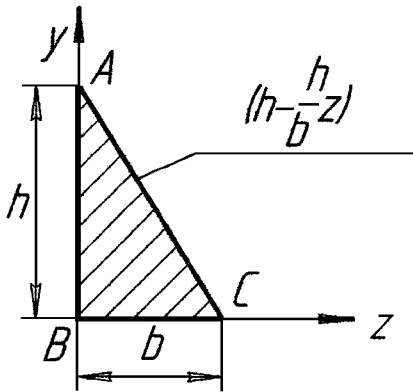
3. Осі, що проходять через центр ваги перерізу і відносно яких одночасно відцентровий момент інерції і статичний момент площі перерізу дорівнюють нулеві, називаються **головними центральними осями інерції**.

4. **Головними центральними моментами інерції** площі перерізу називаються моменти інерції вираховані відносно головних центральних осей.

5. Теореми:

5.1. Якщо переріз, що розглядається, має три і більше осей симетрії, то люба центральна вісь цього перерізу є **головною**.

5.2. Відцентровий момент інерції площі перерізу, що розраховується відносно двох взаємно перпендикулярних осей, із яких одна є віссю симетрії, **буде дорівнювати нулю**



### Приклад:

**Дано:**  $h, b, \angle ABC = 90^\circ$

**Знайти:**  $I_{zy}$

**Рішення:**

$$I_{zy} = \int_0^b \int_0^{\left(\frac{h-h}{b}z\right)} yz dy dz = \int_0^b \left( \int_0^{\left(\frac{h-h}{b}z\right)} y dy \right) z dz =$$

$$= \int_0^b \left( \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\left(\frac{h-h}{b}z\right)} \right) z dz = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2h^2}{b} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{h^2 z^4}{4b^2} \right) \Big|_0^b = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

$$I_{zy} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

## ЛЕКЦІЯ № 8

### Визначення моментів інерції при зміні осей

План лекції:

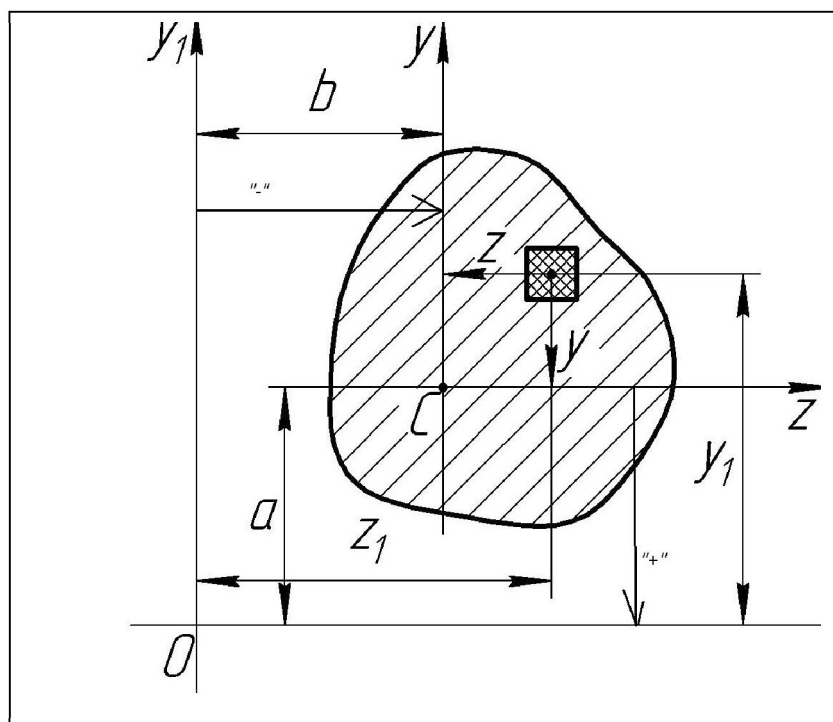
1. Формули переходу до паралельних осей інерції. Приклади визначення.
2. Формули переходу до повернутих осей інерції.
3. Головні і центральні осі інерції і моменти інерції.
4. Поняття про радіуси еліпса інерції. Моменти опору поперечного перерізу.

Література: [1] – с. 22÷21

#### 1. Формули переходу до паралельних осей

За допомогою формул паралельного переходу є можливість здійснювати перехід від вертикальних центральних осей до паралельним їм довільних, або ж навпаки - від довільних до центральних осей.

Перший перехід здійснюється із знаком "+". Другий перехід здійснюється із знаком "-".



Розглянемо це на конкретному прикладі.

**Дано:**

площа перерізу -  $A$ ; осі  $y$  і  $z$  – центральні осі, центральні: відцентровані моменти інерції перерізу -  $I_z$ ;  $I_y$ ;

$I_{zy}$ ;

осі  $y_1$  і  $z_1$  – паралельні осям  $y$  і  $z$  відстані між ними  $a$  і  $b$  відповідно.

**Визначити:**  $I_{z_1}$ ;  $I_{y_1}$ ;  $I_{z_1 y_1}$ .

**Розв'язок:**

Координати будь-якої

точки тіла в нових координатах можливо записати так:  $z_1 = z + b$ ;  $y_1 = y + a$ .

Підставимо ці вирази в формули для моментів інерції площі перерізу.

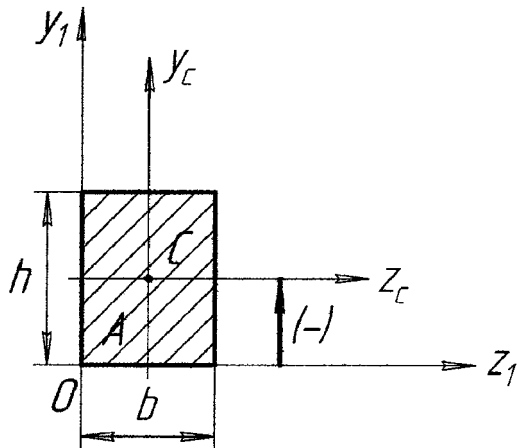
$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A (y^2 + 2ay + a^2) dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = \\ &= I_z + a^2 A \end{aligned}$$

$S_z = \int y dA = 0$  – так як в умові сказано, що осі  $Oy$  і  $Oz$  – центральні.

Аналогічно ми будемо мати такі ж залежності і для  $I_{y_1}$  і  $I_{z_1 y_1}$ .

$$\begin{aligned}
 I_{z_1} &= I_z + a^2 A \\
 I_{y_1} &= I_y + b^2 A \\
 I_{z_1 y_1} &= I_{zy} + abA
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Формули (1) – це формули переходу до паралельних осей (довільних).



**Приклад 1.**

**Дано:**  $I_{yz} = 0$ ;  $I_{z_1} = \frac{bh^3}{3}$ ;  $I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}$

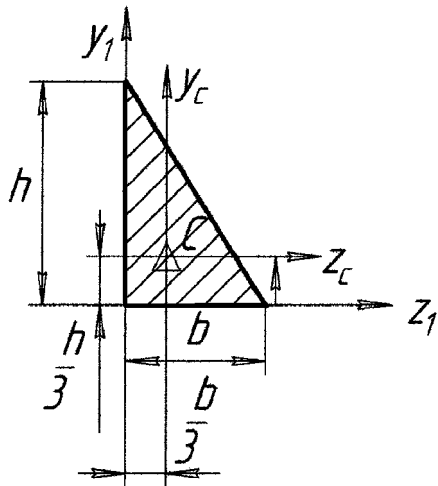
**Визначити:**  $I_z$ –?;  $I_y$ –?

**Розв'язок:**

$$I_z = \frac{bh^3}{3} - bh \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

При визначенні відцентрового ( $I_{zy}$ ) моменту інерції знаки (a) і (b) фіксуються в тій системі координат, до якої переходимо.



**Приклад 2.**

**Дано:**  $I_{z_1}$ ;  $I_{y_1}$ ;  $I_{z_1 y_1}$ ;

**Визначити:**  $I_z$ ;  $I_y$ ;  $I_{zy}$ ;

**Розв'язок:**

$$I_{z_c} = I_{z_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{hb^3}{12} - \frac{hb^3}{18} = \frac{hb^3}{36};$$

$$I_{z_c y_c} = I_{z_1 y_1} - \frac{h}{3} \frac{b}{3} \frac{1}{2} bh = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b^2 h^2}{18} = -\frac{b^2 h^2}{72};$$

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{36}, I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}, I_{z_c y_c} = -\frac{b^2 h^2}{72} \text{ – осьові і відцентровий моменти при переході}$$

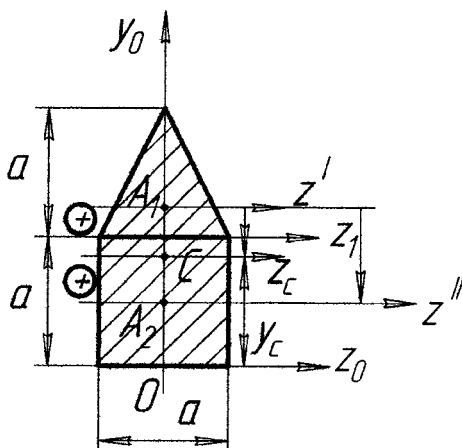
від довільних осей до центральних.

**Приклад 3.**

**Визначити:**  $I_{z_c}$  – осьовий момент інерції складного поперечного перерізу,  $y_c$  – координата центра ваги по осі  $Oy$ .

**Рішення.**

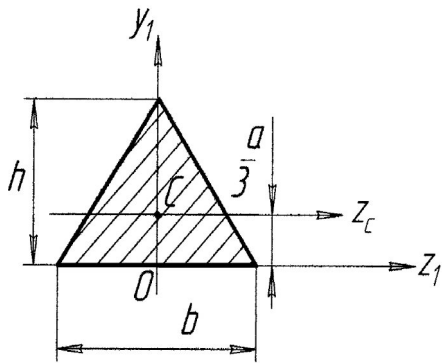
$$S_{z_0} = \sum_{i=1}^n (S_{z_0})_i \Rightarrow y_c = \frac{\sum_{i=1}^n (S_{z_0})_i}{\sum_{i=1}^n A_i};$$



$$J_{z_c} = \sum_{i=1}^n (J_i); \Rightarrow J_{z_c} = [(J_{z_i'}) + (k^2 A)] + [(J_{z_i''}) + (f^2 A_2)], \text{ де } J_{z_i''} = \frac{a^4}{12}.$$

**Приклад 4.**

Якщо трикутник у нас рівнобічний і необхідно визначити осьовий момент інерції відносно центральних осей при співвідношенні основи і висоти.



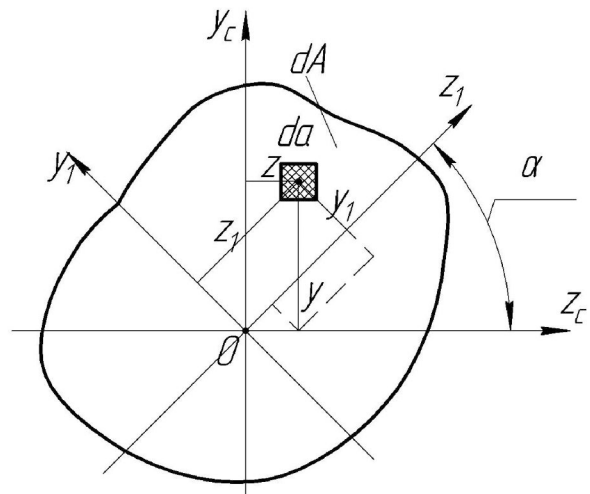
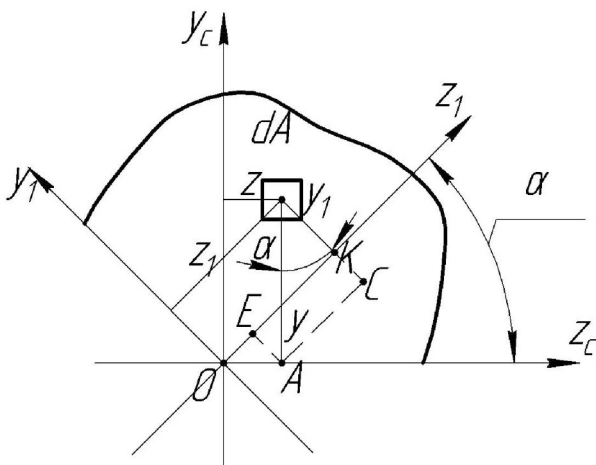
**Якщо:**  $h = b = a$ ;

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12} \Rightarrow J_{z_c} = J_{z_1} - \left(\frac{a}{3}\right)^2 A = \frac{a^4}{12} - \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow J_{z_c} = \frac{a^4}{36}$$

**Якщо:**  $h \neq b$ ;  $\Rightarrow J_{z_c} = \frac{bh^3}{36}$   $I_{y_c} = \frac{hb^3}{48}$ .

**2. Формули переходу до повернутих осей.**



Розглянемо конкретний приклад.

**Дано:**  $z$  і  $y$  – центр. осі

$I_z; I_y; I_{zy}$  – відомі

$\angle \alpha > 0$  – кут повороту осі

**Визначити:**  $I_{z_1}; I_{y_1}; I_{z_1 y_1}$ .

**Рішення:**

Оскільки  $\angle EOM = \angle ABC$  – як кути з взаємно перпендикулярними сторонами в прямокутних трикутниках, то

$$\begin{cases} z_1 = OK = OE + EK = OE + AC = z \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y_1 = BK = BC - CK = BC - EA = y \cos \alpha - z \sin \alpha; \end{cases}$$

Підставимо значення  $z_1$  і  $y_1$  в формули для екваторіальних і відцентрового моментів інерції, будемо мати:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \alpha - 2yz \sin \alpha \cos \alpha + z^2 \sin^2 \alpha) dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - \sin 2\alpha \int_A yz dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA \Rightarrow$$

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A z^2 \cos^2 \alpha dA + \int_A 2yz \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_A y^2 \sin^2 \alpha dA =$$

$$= \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + \sin 2\alpha \int_A yz dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA \Rightarrow$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha \quad (2)$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 dA = \int_A [(z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha)] =$$

$$= \int_A (zy \cos^2 \alpha + y^2 \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \sin \alpha \cos \alpha - zy \sin^2 \alpha) dA =$$

$$= I_{zy} \cos^2 \alpha + I_z \frac{\sin 2\alpha}{2} - I_y \frac{\sin 2\alpha}{2} - I_{zy} \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{zy} \cos 2\alpha + \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha \quad (3)$$

При додаванні осьових моментів інерції в повернутих на кут  $\alpha$  осях координат будемо мати:

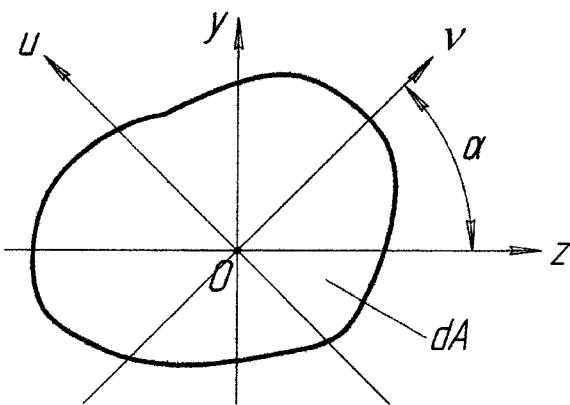
$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_{z_c} + I_{y_c} = I_p \quad (4)$$

### 3. Визначення напрямку головних осей.

#### Головні центральні моменти інерції і формули для їх визначення.

В інженерній практиці розрахунків важливе значення займають головні центральні осі, відцентровий момент інерції відносно яких дорівнює нулеві. Позначають такі осі буквами ( $u$ ) і ( $v$ ). Таким чином:

$$I_{uv} = 0, \text{ а відповідно, } S_y = S_z = 0$$



Візьмемо довільне тіло з прямокутною системою координат, що проходить через центр ваги тіла, повернемо його на деякий довільний кут  $\alpha$  при якому відцентровий момент інерції буде рівний нулеві.

Позначимо осі цієї системи координат через ( $u$ ) і ( $v$ ).

Необхідно відмітити, що серед нескінченної множини центральних осей

існує хоча б одна пара головних центральних осей.

$$I_u = I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{zy} \sin 2\alpha_0 \quad (1)$$

$$I_v = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 + I_{zy} \sin 2\alpha_0$$

$$I_{uv} = I_{zy} \cos 2\alpha_0 + \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow -I_{zy} \cos 2\alpha_0 = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha_0$$

Розділимо цей вираз на  $\cos 2\alpha \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \sin 2\alpha_0 \quad (2)$$

Із формули (2) визначаємо положення головних центральних осей інерції.

Слід нагадати, що додатні кути повороту осей відкладаються проти годинникової стрілки.

Використовуючи формули (1) запишемо вираз для суми і різниці головних центральних моментів інерції:

$$I_u + I_v = I_z + I_y = I_p \Rightarrow \text{const} \quad (3)$$

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \cos 2\alpha_0 - 2I_{zy} \sin 2\alpha_0 \quad (4)$$

Використовуючи відношення (2) рівняння (4) запишемо в такому вигляді:

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \cos 2\alpha_0 + \frac{(I_z - I_y) \sin^2 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0} = (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}$$

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}$$

Оскільки:  $\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}$ , то ми можемо записати:

$I_u - I_v = (I_z - I_y) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}$  і підставимо цей вираз в формулу (2) – будемо мати:

$$I_u - I_v = \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

Додаючи і віднімаючи вирази (3) і (4) будемо мати :

$$\left. \begin{aligned} 2I_{u,v} &= (I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \\ 2I_{v,u} &= (I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I_{u,v} = \frac{1}{2} \left[ (I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right] \quad (5)$$

$$I_{v,u} = \frac{1}{2} \left[ (I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right]$$

Причому верхні знаки необхідно брати при  $I_z > I_y$ , а нижні – при  $I_z < I_y$ .

Таким чином формули (2) і (5) дозволяють визначити напрямки головних осей і величину головних центральних моментів інерції площі перерізу.

Головним центральним моментом інерції притаманна властивість екстремальності, тобто відносно головних осей інерції вони будуть мати **максимальне значення**.

Площина, що проведена через вісь стержня і його головні осі інерції носить назву **головної площини перерізу**.

#### 4. Поняття про радіус інерції.

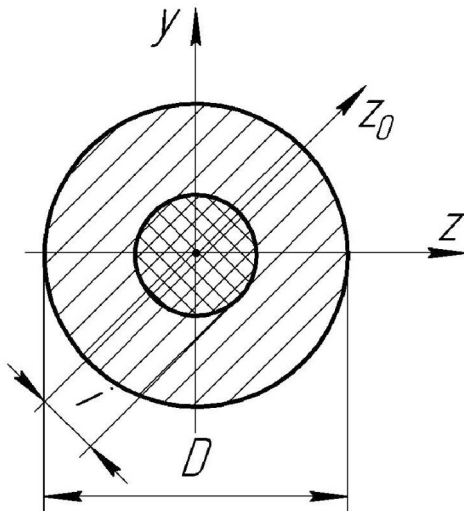
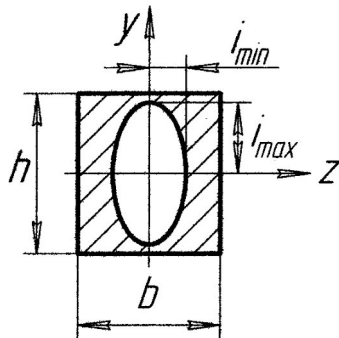
Любий момент інерції відносно осі можливо виразити, як добуток площі перерізу фігури на квадрат деякої відстані до цієї осі.

$$I_z = A i_z^2 \quad I_y = A i_y^2, \text{ де } i - \text{радіус інерції}$$

Звідси:  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ ; одиниці виміру  $i = (\text{см})$

Відносно головних центральних осей:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}$$



**Приклади:**

№1

$$i_{z(\max)} = \sqrt{\frac{bh^3}{12} \div bh} = \frac{h\sqrt{3}}{6} \quad (\text{см})$$

$$i_{z(\max)} = \sqrt{\frac{bh^3}{12} \div bh} = \frac{h\sqrt{3}}{6} \quad (\text{см})$$

$i_z > i_y$  т.як  $h < b$

№2

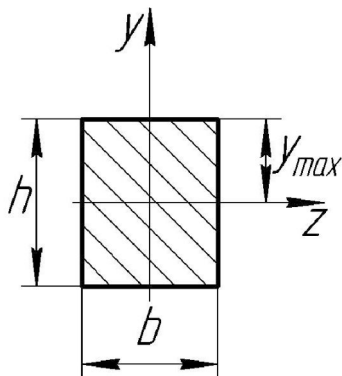
$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$i_z = i_y = i_z = \sqrt{\frac{\pi D^4 / 4}{64 D^2}} = \frac{D}{4}$$

**Момент опору**

**Моментом опору** поперечного перерізу відносно осі наз. частка від ділення моменту інерції перерізу відносно цієї ж осі на відстань до точки максимально віддаленої від осі, що розглядається.



**Полярним моментом опору** наз. частка від ділення полярного моменту інерції перерізу, що розглядається на відстань до точки максимально віддаленої від полюсу.

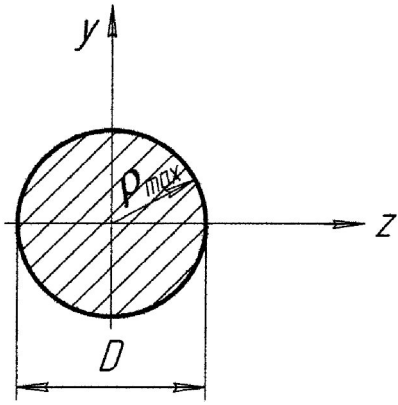
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

$$W_z = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \quad (\text{см}^3)$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} \quad (\text{см}^3)$$

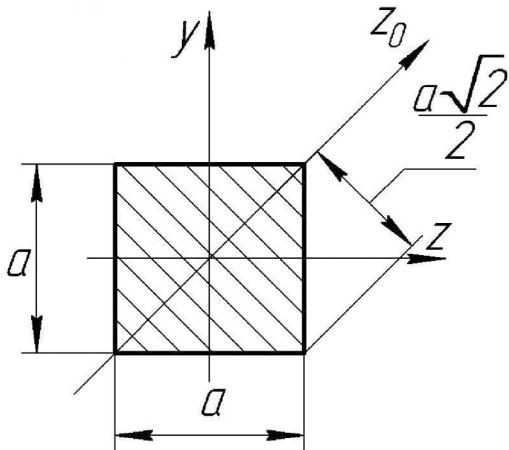
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{16} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$$

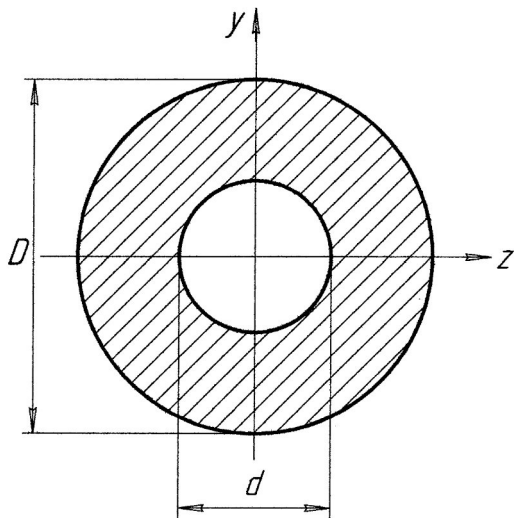
$$I_z = I_y = \frac{a^4}{12}; \text{ то } W_z \neq W_y, \text{ т.як: } W_y = \frac{a^4}{12} \frac{2}{a} = \frac{a^3}{6};$$



$$W_{z_0} = \frac{a^4}{12} \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

$$W_{z_0} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}} \quad W_y = \frac{a^3}{6}$$

$$W_z = \frac{I_z}{\rho_{\max}}; \quad I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}; \quad \rho_{\max} = \frac{D}{2};$$



$$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4), \text{ де } \alpha = \frac{d}{D}$$

## ЛЕКЦІЯ № 9

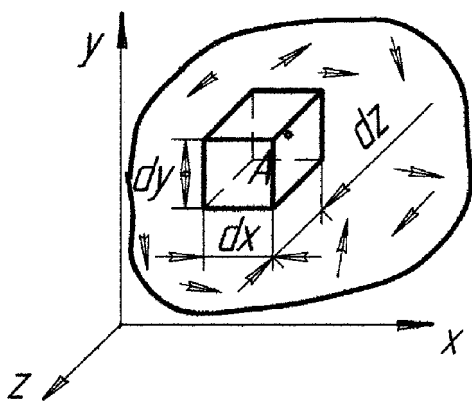
### Дослідження напруженого стану в точці тіла

План лекції:

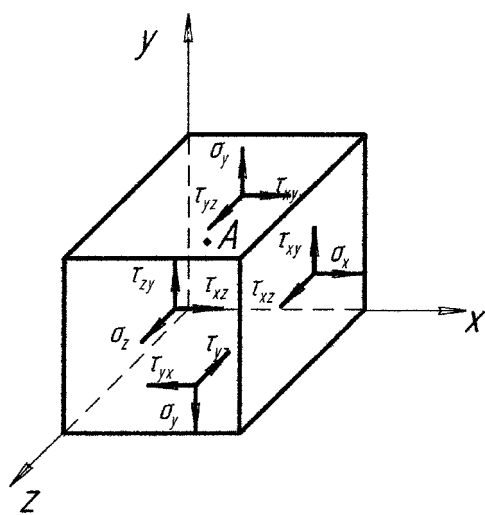
1. Напружений стан в точці тіла. Тензор напружень. Нормальні, дотичні і головні напруження.
2. Лінійний напружений стан в точці тіла. Приклад.
3. Плоский напружений стан в точці тіла. Пряма задача аналітичного розв'язку. Основні закономірності.

**Література:** [1] – с. 152÷162; [2] – с. 118÷125

*Напруженим станом* в точці тіла називається сукупність напружень на всьому нескінченному добутку площадок, проведених через дану точку тіла.



Для оцінки напруженого стану в точці тіла, навкруги неї виділяється нескінченно малий об'єкт в формі куба і вже по його гранях проводять таку оцінку.



В загальному випадку напружений стан тіла виглядає так.

Тут  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальні напруження;

$\tau_{xy}, \tau_{zy}, \dots$  – дотичні напруження.

1-й індекс визначає напрямок нормалі до заданої грані;

2-й індекс визначає напрямок дії дотичного напруження.

Таким чином на гранях елементарного куба діє 9-ть компонентів напружень.

Запишемо їх у вигляді деякої матриці.

$$T = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

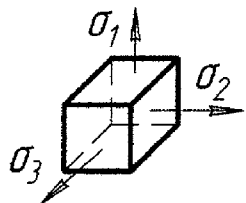
Така сукупність напружень носить назву тензора напружень.

Змінюючи положення елементарного куба відносно т. А ми будемо отримувати картину зміни напруженого стану навколо точки, тобто зміну діючих напружень як по величині, так і по напрямку їх дії на його гранях. При

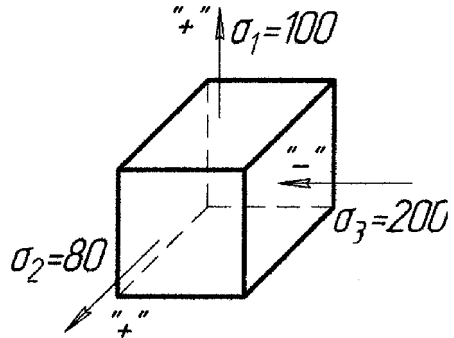
цьому можна добитись такого положення елементів куба коли по його гранях будуть діяти тільки нормальні напруження і ці нормальні напруження носять назву *головних нормальних напружень*, а площадки, або грані на яких діють ці напруження називаються *головними площадками*.

*Довільними* називаються площадки, де наряду з нормальними напруженнями діють і дотичні.

Доведено, що через одну і ту ж т. А можна провести тільки 3-и взаємно перпендикулярні головні площадки. При чому:

	$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
---	----------------------------------

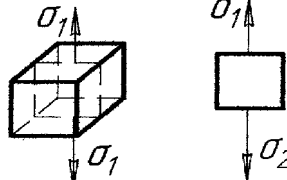
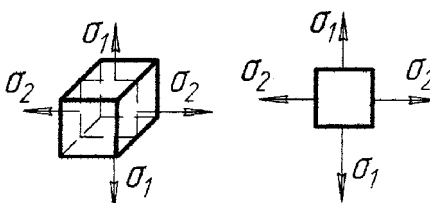
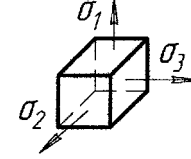
Головні напруження мають властивість, що носять назву – екстремальність. І тільки по величині цих напружень можна робити висновок про міцність і жорсткість конструкції. Головний тензор напружень в цьому випадку записується так:



$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = T_0$$

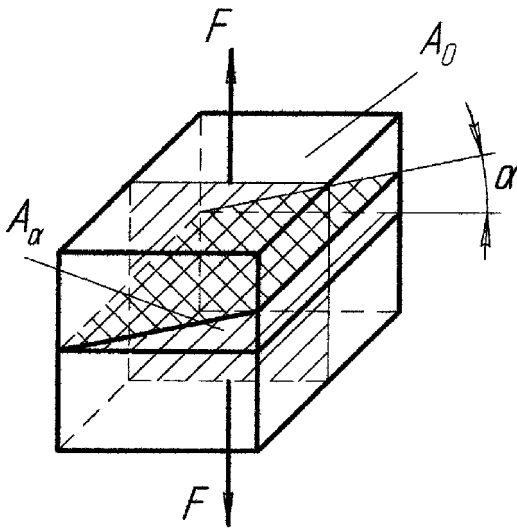
Якщо задано, наприклад, що  $\sigma_1 = 100$  МПа ;  $\sigma_2 = 80$  МПа ;  $\sigma_3 = -200$  МПа, то на головних площадках це буде виглядати так:

Залежно від того, скільки головних напружень відмінно від нуля розрізняють вид напруженого стану тіла в точці: лінійний, плоский і об'ємний.

<b>1. Лінійний стан</b> – $\sigma_1 \neq 0$ ; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .		$\left. \begin{matrix} + \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$
<b>2. Плоский стан</b> – $\sigma_1 \neq 0$ ; $\sigma_2 \neq 0$ ; $\sigma_3 = 0$ .		$\left. \begin{matrix} + \\ + \\ 0 \end{matrix} \right\}$
<b>3. Об'ємний стан</b> – $\sigma_1 \neq 0$ ; $\sigma_2 \neq 0$ ; $\sigma_3 \neq 0$ .		$\left. \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \right\}$

## 2. Лінійний напружений стан.

Лінійним напруженим станом тіла в точці називається напружений стан при якому із трьох головних напружень відмінним від нуля буде тільки одне. Такий стан буває при одноосному розтягу чи стиску; згині.



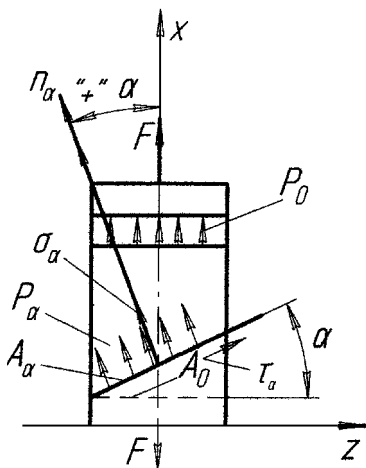
$$\begin{cases} \sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0 - \text{розтяг} \\ \sigma_3 \neq 0; \sigma_1 = \sigma_2 = 0 - \text{стиск} \end{cases}$$

В загальному випадку на головній площадці напруження дорівнюють:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}.$$

Оскільки дотичні напруження в такому випадку відсутні, то будь-який поперечний переріз стержня перпендикулярний його осі буде головним перерізом і головною площадкою.

Перейдемо до визначення напружень на похилих площадках, тобто таких, нормаль до яких буде складати з поздовжньою віссю симетрії стержня деякий кут  $\alpha$ . Домовимось, що кут  $\alpha$  – додатній, якщо він відкладається від осі стержня проти годинникової стрілки.



Тоді і положення елементарної похилої площадки визначається кутом між віссю стержня і перпендикуляром до цієї похилої площадки.

$\alpha > 0 (+)$  – проти годинникової стрілки.

$\alpha < 0 (-)$  – за ходом годинникової стрілки.

Рівнодіючою повних напружень в перерізі  $P_\alpha$  буде осьова сила  $N = F$ . Будемо вважати, що вона спрямована паралельно до осі стержня. Відтак, площа похилого перерізу.

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$N = P_\alpha A_\alpha \Rightarrow P_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{N}{A_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha;$$

Тоді:  $\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha;$

або

$$\tau_\alpha = \sigma_0 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha.$$

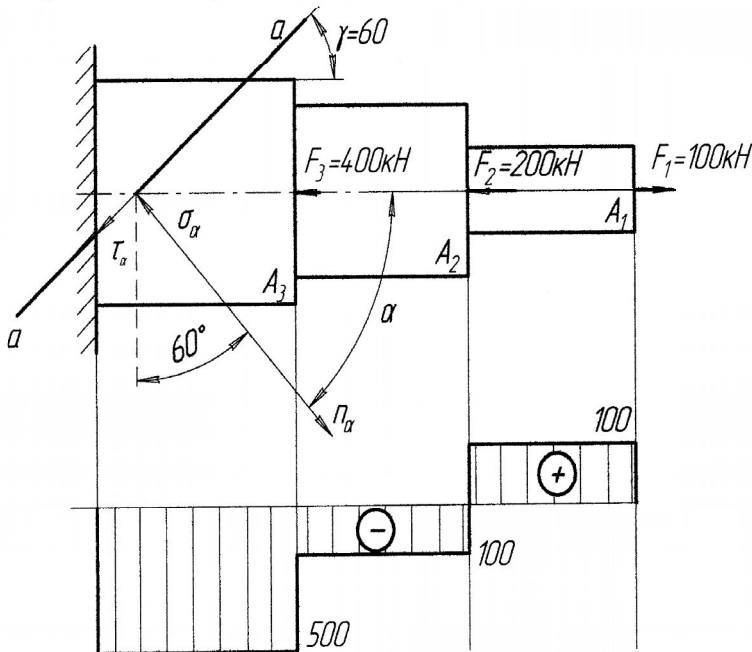
$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha;$$

Таким чином напруження на похилих площадках при одноосному напруженому стані визначається так:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha.$$

З цих формул видно, що максимальні напруження  $\sigma_{\max}$  будуть в тому випадку, коли кут  $\alpha = 0$ . Тобто  $\sigma_{\max} = \sigma_\alpha|_{\alpha=0} = \sigma_0$  – максимальне осьове напруження

направлене по перпендикуляру до головної площадки, а  $\tau_{\max} = \tau_{\alpha}|_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma_0}{2}$  – максимальне дотичне напруження буде діяти на площадках нахилених до осі стержня під кутом  $45^\circ$ .



### Приклад:

Дано:

$$F_1 = 100 \text{ кН}; F_2 = 200 \text{ кН};$$

$$F_3 = 400 \text{ кН}; A_1 = 2500 \text{ мм}^2;$$

$$A_2 = 4000 \text{ мм}^2; A_3 = 5000 \text{ мм}^2.$$

Визначити:

Напруження на похилій площадці, якщо кут нахилу  $\gamma = 60^\circ$ .

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha; \end{cases} \quad \sigma_0 = \frac{N}{A}.$$

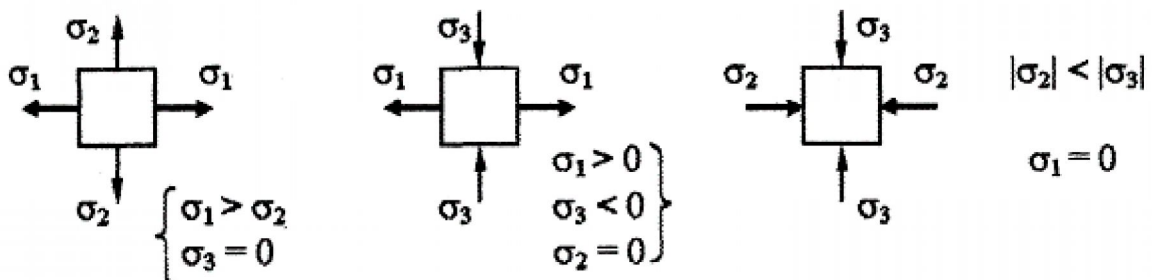
Нам необхідно знайти осьову силу  $N$  в перерізі, що розглядається. Із епюри  $N$  знаходимо  $N_{\max} = 500 \text{ кН}$ . Тоді  $\sigma_3 = -\frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}} = -100 \text{ МПа}$ . Кут  $\alpha$  відкладаємо за ходом годинникової стрілки ( $\alpha = -30^\circ$ ):

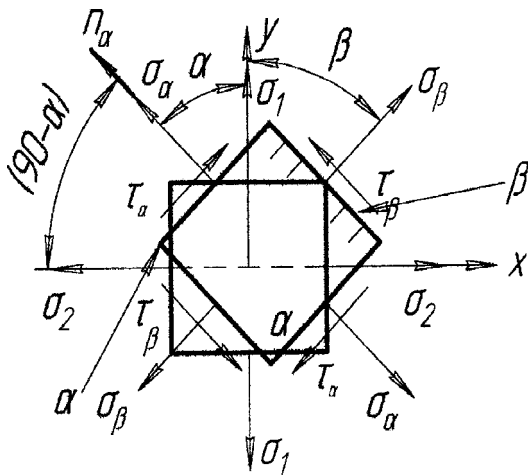
$$\sigma_{\alpha} = -100 \cos^2 30^\circ = -100 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{100 \cdot 3}{4} = -75 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{100}{2} \sin(-60^\circ) = 50 \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \text{ МПа}.$$

### 3. Плоский напружений стан

Плоским називається напружений стан при якому із трьох головних напружень відмінними від нуля є два.





### Пряма задача.

По відомих величинах головних напружень необхідно визначити напруження на площадках, що нахилені по відношенню до більшого головного напруження під кутом  $\alpha$ . В даному випадку це  $\sigma_1$ .

Прийmemo:

1) $\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0$ Тоді: $\begin{cases} \sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \\ \tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha; \end{cases}$	2) $\sigma_1 = 0; \sigma_2 \neq 0$ $\begin{cases} \sigma''_\alpha = \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau''_\alpha = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \end{cases}$
--	--

В загальному випадку, коли:  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq 0$  і, враховуючи принцип суперпозиції, матимемо

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

### Основні закономірності

Із отриманих співвідношень видно, що сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках, проведених через дану точку тіла, є величина постійна, яка дорівнює сумі головних напружень і є інваріантна по відношенню до кута повороту.

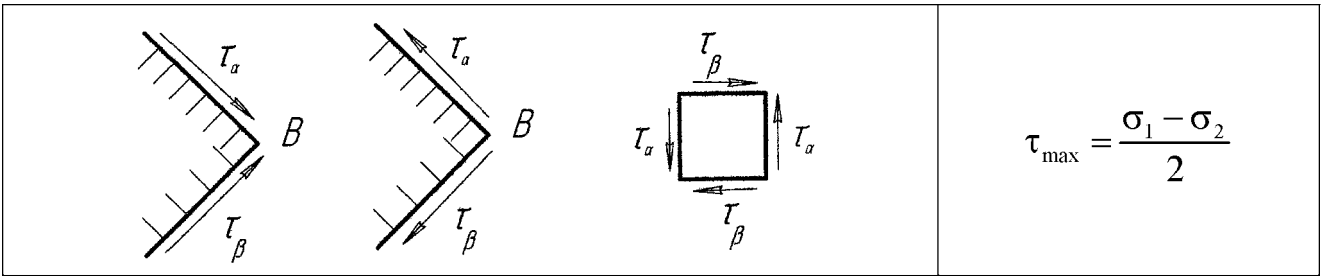
$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}$$

Дотичні напруження відповідно:

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta$$

#### *Закон парності дотичних напружень*

Якщо на одній із похилих площадок, проведених через дану точку тіла, діють визначені по величині і по знаку дотичні напруження, то на площадці, перпендикулярній до заданої і яка проведена через ту саму точку тіла, виникнуть дотичні, напруження, що матимуть таку ж саму величину, але будуть протилежні за напрямком, тобто за знаком.



Максимальні дотичні напруження діють на площадках, що нахилені до головних площадок під кутом  $\alpha = 45^\circ$ .

## Питання для самопідготовки

1. \*Що таке розрахункова схема?
2. У чому суть методу поперечних перерізів?
3. У чому суть принципу Сен – Венана?
4. Назвіть основні гіпотези, прийняті в курсі опору матеріалів.
5. Що таке переміщення, деформація?
6. Що таке абсолютне та відносне подовження, вкорочення стержня?
7. Що являють собою діаграми деформування пластичного та крихкого матеріалу?
8. Що таке коефіцієнт Пуассона, зона пружності, зміцнення?
9. Сформулюйте закон Гука і вкажіть межі його справдження.
10. Як визначити подовження стержня при силовому навантаженні?
11. Як визначаються нормальні напруження при розтязі чи стиску?
12. Як підраховується потенціальна енергія деформації стержня при розтязі – стиску?
13. Дайте основні характеристики пластичних та крихких матеріалів.
14. Поясніть фізичну суть модуля Юнга.
15. Що таке „січний” модуль і для яких матеріалів він визначається?
16. Які прийнято правила знаків для визначення величини внутрішніх зусиль при розтязі – стиску?
17. Дайте визначення гіпотези плоских перерізів.
18. Що таке допустимі напруження і деформації та як вони визначаються для пластичних і крихких матеріалів?
19. Що являє собою поняття „концентратор напружень” і „концентрація напружень”?
20. Назвіть фактори, що впливають на міцність і жорсткість матеріалу.
21. Що таке статичний момент площі поперечного перерізу?
22. Що таке осьовий, відцентровий та полярний моменти інерції площі поперечного перерізу?
23. Яка основна властивість статичного моменту площі перерізу?
24. Як визначаються моменти інерції відносно паралельних осей?
25. Відносно яких осей осьові моменти інерції площі поперечного перерізу досягають екстремального значення?
26. Які осі називаються головними центральними, а які – центральними?
27. Як визначити напрямки головних осей площі перерізу?
28. Що таке складний поперечний переріз?
29. Які знаки можуть мати осьові та відцентровий моменти інерції?
30. Які геометричні характеристики поперечних перерізів вам відомі?
31. Як знаходяться головні центральні моменти інерції?
32. Який зміст має поняття “еліпс інерції” площі поперечного перерізу?
33. Що таке радіус інерції і як його визначити?
34. Як знаходяться координати центра ваги складної площі перерізу?
35. Назвіть основні етапи визначення головних центральних моментів інерції площі складного поперечного перерізу.

36. Які прийнято правило знаків для кута  $\alpha_i$  повороту осей  $x_i O y_i$ ?
37. Який взаємозв'язок існує між довільними центральними і головними моментами інерції площі поперечного перерізу?
38. Що таке момент опору площі поперечного перерізу і як він визначається?
39. Що таке найбільш віддалена точка площі поперечного перерізу?
40. Вкажіть на взаємозв'язок між осьовими і полярним моментами опору площі поперечного перерізу.
41. \*Що таке зосереджена сила?
42. Які види згину ви можете назвати?
43. Який згин називається плоским згином?
44. Що таке силова площина і що таке силова лінія?
45. Що таке епюри внутрішніх силових факторів  $Q$  і  $M$  та їх визначення?
46. Який метод використовується для побудови епюр  $Q$  та  $M$  і в чому його особливість?
47. Назвіть правила знаків для поперечної сили  $Q$  та згинального моменту  $M$  при побудові епюр.
48. Назвіть основні особливості контролю правильності побудови епюр  $Q$  і  $M$ .
49. Які основні особливості поведінки епюр для різноманітних видів зовнішніх навантажень?
50. Що таке "чистий" згин балки і його особливості?
51. Що таке небезпечний переріз і небезпечна точка перерізу балки?
52. Назвіть основні теорії міцності для плоского згину.
53. Назвіть основні етапи розрахунку на міцність.
54. Укажіть диференційні залежності при згині.
55. Що таке головні та довільні площадки,  $i$ , відповідно, напруження?
56. Як визначити напруження в довільній точці поперечного перерізу?
57. Що таке нейтральна лінія поперечного перерізу в балці?
58. Сформулюйте і поясніть основні етапи чотириєдиної задачі опору матеріалів при плоскому згині.
59. Вкажіть характерні особливості розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті перерізу.
60. Що таке раціональна форма перерізу і що таке критерій якості профілю?
61. Що таке зсув і його характерні особливості?
62. Як записується закон Гука при зсуві в абсолютних і відносних величинах?
63. Побудуйте круг Мора при зсуві.
64. Вкажіть основні етапи розрахунку на міцність клепанних та зварних з'єднань, що працюють в умовах зсуву.
65. Що таке деформація кручення?
66. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечних перерізах при закрученні вала?
67. Назвіть основні етапи чотириєдиної задачі опору матеріалів при крученні.
68. Що таке умовний момент опору й умовний момент інерції площі поперечного перерізу?

69. Як визначається максимальний і відносний кут закручення вала?
70. Поясніть суть гіпотези плоских перерізів.
71. Укажіть основні відмінності кручення валів із круглим і некруглим поперечним перерізом.
72. Як визначається  $I_p$  і  $W_p$  суцільного і трубчатого вала?
73. Як визначається діаметр вала із умови міцності та умови жорсткості?
74. Де виникають  $\tau_{\max}$  при крученні вала з некруглим поперечним перерізом?
75. Укажіть основні особливості при крученні вала із складеним поперечним перерізом.
76. Як визначаються напруження, максимальний і відносний кут закручення в тонкостінних замкнутих профілях?
77. Як визначити момент інерції відкритого тонкостінного профілю?
78. Як визначається напруження при крученні відкритого тонкостінного профілю?
79. Як визначити напруження у гвинтовій пружині?
80. Що таке усадка пружини і як вона визначається?