УДК 517.9..519.46

А.С. Богатирчук,

A.S. Bogatyrchuk

І.І. Юрик,

I.I Juryk

Національний університет

харчових технологій

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ І ЙОГО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ

HEAT CONDUCTION EQUATION WITH DEGREE NONLINEARITY AND HIS EXACT SOLUTIONS

Розглядається нелінійне диференціальне рівняння вигляду $u_t - u_{xx} = f(u)$*, де* $u = u(t,x)$ *,* $f(u)$ *-деяка фіксована функція від залежної змінної. Якщо* $f(u)$ *-достатньо гладка функція, яка задовільняє співвідношенням* $f(0) = f(1) = 0$*, то дане рівняння є рівнянням Колмогорова-Петровського-Піскунова. Багато робіт було присвячено вивченню симетрійних властивостей, проведенню групової класифікації, а також пошуку точних розв'язків цих рівняннь. У випадку* $f(u) = \lambda u^n$*, використовуючи метод умовної симетрії і підстановку* $u = (z_x / z)^{2/(n-1)}$ *побудовані нові точні розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності і вказаний спосіб побудови нескінченної множини точних розв'язків які виражаються через еліптичні функції Якобі. Одержані розв'язки можуть бути використані у прикладних дослідженнях і стати ефективним інструментом перевірки адекватності математичних моделей.*

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, точні розв'язки, метод умовної симетрії.*

Розглянемо рівняння теплопровідності

$$u_t - u_{xx} = -\lambda u^n , \quad \lambda = \frac{2(n+1)}{(n-1)^2} \ . \qquad (1)$$

Для знаходження розв'язків використаємо анзац

$$u = \left(\frac{z_x}{z} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \qquad (2)$$

який дане рівняння перетворює в рівняння

$$z((n-1)(z_x z_{tx} - z_x z_{xxx}) + (n-3)z_{xx}^2) = z_x^2((n-1)z_t - (n-3)z_{xx}). \qquad (3)$$

Це рівняння є однорідним відносно залежних змінних і містить нелінійності тільки третього порядку. Слід відзначити, що більш загальне рівняння типу Колгоморова-Петровського-Піскунова

$$(n-1)^2(u_t - u_{xx}) = -2(n+1)u^n + 2\lambda_1(n-1)u + 2\lambda_2(n-1)u^{\frac{n+1}{2}} + 2\lambda_3(n-1)u^{\frac{3-n}{2}} + \\ + 2\lambda_4(n-1)u^{2-n}. \qquad (4)$$

При умові

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{n+1}{n-1} \qquad (5)$$

підстановка (2) перетворює в рівняння

$$z\left[(n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2) + (n-3)z_{xx}^2\right] = \\ = z_x^2\left[(n-1)(z_1 + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x) - (n+3)z_{xx}\right]. \qquad (6)$$

Редукція рівняння (6) досягається , якщо прирівняти до нуля обидві частини рівняння . Вважаючи, що $z \neq 0$, $z_x \neq 0$ матимемо таку систему

$$(n-1)(z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x) - (n+3)z_{xx} = 0, \qquad (7)$$

$$(n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2) + (n-3)z_{xx}^2 = 0. \qquad (8)$$

Розв'язавши (7) відносно z_t і підставивши z_t в (8), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для z

$$4z_x z_{xxx} + (n-3)z_{xx}^2 - (n-1)(\lambda_1 z_x^2 + \lambda_2 z_x z_{xx} + \lambda_3 z z_x + \lambda_4 z^2) = 0 . \qquad (9)$$

Отже, ми редукували рівняння (6) до системи рівнянь (7) і (8), одне з яких лінійне, а друге—звичайне диференціальне рівняння.

У випадку $n = 3,\ \lambda_4 = 0$ рівняння (9) також редукується до лінійного

$$2z_{xxx} - \lambda_1 z_x - \lambda_2 z_{xx} - \lambda_3 z = 0 , \qquad (10)$$

а рівняння (7) набуває вигляду

$$z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x - 3z_{xx} = 0 \ . \qquad (11)$$

Система (10), (11) повністю інтегрована і може бути легко розв’язана. Розв’язок залежить від коренів характеристичного рівняння, що відповідає рівнянню (10)

$$2k^3 - \lambda_2 k^2 - \lambda_1 k - \lambda_3 = 3 .$$

Ці корені можуть бути

1) дійсні і різні, тобто

$$\begin{aligned} &\lambda_2 = 2(a+b+c),\ \lambda_1 = -2(ab+ac+bc), \\ &\lambda_3 = 2abc,\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c, \end{aligned} \qquad (12)$$

2) дійсні і два з них рівні, тобто

$$\lambda_2 = 4a + 2b,\ \lambda_1 = -2a^2 - 4ab,\ \lambda_3 = 2a^2 b,\ a \neq b, \qquad (13)$$

3) дійсні і всі три рівні, тобто

$$\lambda_1 = -6a^2, \lambda_2 = 6a, \lambda_3 = 2a^3 , \qquad (14)$$

4) два корені комплексні:

$$\lambda_2 = 4a + 2c,\ \lambda_1 = -2(a^2 + b^2 + 2ac),\ \lambda_3 = 2c(a^2 + b^2) \ . \qquad (15)$$

Розв’язки системи мають такий вигляд

$$\begin{aligned} &z = k_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + k_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + k_3 e^{cx+(c^2+2ab)t} \\ &z = k_1 e^{bx+(b^2+2a^2)t} + (k_2 + k_3(x + 2(a-b)t))e^{ax+(a^2+2ab)t} \\ &z = k_1 e^{ax+3a^2 t}(x^2 + k_2 x + k_3 + 6at) \\ &z = k_1 e^{cx+(c^2+2a^2+2b^2)t} + e^{ax+(a^2-b^2+2ac)t}(k_2 \sin(bx + 2b(a-c)t) + \\ &\quad + k_3 \cos(bx + 2b(a-c)t)) . \end{aligned} \qquad (16)$$

Підставивши (16) в (2), отримаємо точні розв'язки рівняння (4) у випадку

$$n=3,\ \lambda_4=0:$$

$$u_t-u_{xx}=-2u^3+\lambda_1 u+\lambda_2 u^2+\lambda_3, \tag{17}$$

які мають вигляд

$$u=\frac{ak_1e^{ax+(a^2+2bc)t}+bk_2e^{bx+(b^2+2ac)t}+ck_3e^{cx+(c^2+2ab)t}}{k_1e^{ax+(a^2+2bc)t}+k_2e^{bx+(b^2+2ac)t}+k_3e^{cx+(c^2+2ab)t}}, \tag{18}$$

$$u=\frac{bk_1e^{bx+(b^2+2a^2)t}+(ak_2+k_3+ak_3(x+2(a-b)t))e^{ax+(a^2+2ab)t}}{k_1e^{bx+(b^2+2a^2)t}+(k_2+k_3(x+2(a-b)t))e^{ax+(a^2+2ab)t}}, \tag{19}$$

$$u=\frac{2x+k_2}{x^2+k_2x+k_3+6at}+a, \tag{20}$$

$$u=\frac{ck_1e^{(c-a)x+((c-a)^2+3b^2)t}+bk_2\cos(bx+2b(a-c)t)-bk_3\sin(bx+2b(a-c)t)}{k_1e^{(c-a)x+((c-a)^2+3b^2)t}+k_2\sin(bx+2b(a-c)t)+k_3\cos(bx+2b(a-c)t)}. \tag{21}$$

Слід зазначити, що розв'язки (18), (19), (21) за допомогою класичної симетричної редукції отримати неможливо $[1]$.

У випадку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0,\ n=3$ рівняння (4) і (6) мають вигляд

$$z(z_{xt}-z_{xxx})=z_x(z_t-6z_{xx}), \tag{22}$$

$$z_t-z_{xx}=-2u^3. \tag{23}$$

Використовуючи умовну симетрію в $[1]$, було знайдено розв'язок рівняння (23) у вигляді

$$u=2xds(y,\frac{1}{\sqrt{2}}),\ y=x^2+6t, \tag{24}$$

де $ds(y,k)-$еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$(\frac{d\eta}{dy})^2=k^2(k^2-1)+(2k^2-1)\eta^2-\eta^4. \tag{25}$$

Використовуючи наступну теорему, ми знайшли інші розв'язки рівняння (23).

Теорема. Рівняння (22) умовно інваріантне відносно оператора

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x)\frac{\partial}{\partial x}$$

тоді і тільки тоді, коли функція $\xi = \xi(t,x)$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &\xi_t - 3\xi_{xx} + 2\xi\xi_x = 0\,, \\ &\xi_{xt} - \xi_{xxx} + 2\xi_x{}^2 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Теорема доводиться з використанням формул другого продовження оператора $X\ [2]$ і критерію умовної інваріантності рівняння відносно даного оператора $[3,4]$.

Один із розв'язків системи (26) є функція $\xi = -\frac{3}{x}$. Це означає, що рівняння (22) умовно інваріантне відносно оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x}\,,$$

інваріантом якого є функція $y = x^2 + 6t$. Тому є зміст шукати розв'язок у вигляді

$$z = \varphi(y)\,,\ y = x^2 + 6t\,. \tag{27}$$

Підставивши (27) в (22), отримаємо диференціальне рівняння третього порядку

$$\varphi\varphi_{yyy} = 3\varphi_y\varphi_{yy}\,. \tag{28}$$

Поділивши ліву і праву частини на $\varphi\varphi_{yy}$ та про інтегрувавши, матимемо

$$\varphi_{yy} = c\varphi^3, c = 2\ , \tag{29}$$

де $c-$стала, яка може бути зведена до 2 у випадку $c > 0$ і до -2 у випадку $c < 0$, нормуючи φ.

У відповідності з (2), (27) будь-який розв'язок рівняння (29) генерує розв'язок рівняння (22) виду

$$u = \frac{2x\varphi_y}{\varphi}\,. \tag{30}$$

Точним розв'язком рівняння (29) для $c = 2$ є еліптична функція Якобі

$$\varphi(y) = ds(y, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ y = x^2 + 6t, \tag{31}$$

тому розв'язок (30) набуває вигляду

$$u = u_1 = \frac{2xcs(y, \frac{1}{\sqrt{2}})}{ds(y, \frac{1}{\sqrt{2}})}\ . \tag{32}$$

Цей розв'язок новий, і відсутній в списку розв'язків рівняння (23) в еліптичних функціях, який представлено в $[1]$.

Більше того, розв'язок (24) можна записати у вигляді

$$u = y_x \varphi(y), \tag{33}$$

де φ і y є функціями, які визначені формулами (31) і розв'язок (32) можна отримати із формули (33), якщо в ній виконати заміну $\varphi \to \frac{\varphi_y}{\varphi}$.

Це, в свою чергу, відкриває шлях для побудови нескінченної множини точних розв'язків рівняння (23).

Висновки: Таким чином ми отримали нові точні розв'язки і вказали спосіб побудови нескінченного сімейства точних розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Clarkson P., Mansfield E.* Symmetry reductions and exact solutions of class of nonlinear heat equatios // Physica D.—1993.—V. 70—p. 250—288.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978, -400 с.
3. *Levi D., Winternitz P.* Nonclassical symmetry reductions: example of the Boussinesq equation // I. Phys. A: Math.Gcn.—1989. V. 22. –P. 2919—2924.
4. *Nikitin A. G., Barannyk T. A.* Solitery wave and other solutions for nonlinear heat equctions // Centr. Eur. J. Math. –2005.—V.2, №5—p. 840—858.

The nonlinear differential equation of an aspect is considered $u_t - u_{xx} = f(u)$, where $u = u(t,x)$, $f(u)$ - some fixed function from an effect variable. If $f(u)$ smooth enough functions, which satisfies to relations $f(0) = f(1) = 0$, the given equation is by the equation Kolmogorova-Petrovskogo -Piskunova.Many operations were devoted to study of symmetric properties, realization of group classification, and also searching of exact solutions of these equations. In a case $f(u) = \lambda u^n$, using a method conditional symmetry and substitution $u = (z_x / z)^{2/(n-1)}$ the new exact solutions of a nonlinear heat conduction equation are constructed and the mode of construction of an infinite set of exact solutions is indicated which express through elliptic functions of Jacobi. The obtained solutions can be used in applied researches and to become the effective tool of check of adequacy of mathematical models.
Keywords: *heat conduction equation, exact solutions, method of a conditional symmetry.*
Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение вида $u_t - u_{xx} = f(u)$, где $u = u(t,x)$, $f(u)$ -некоторая фиксированная функция от независимой переменной. Если $f(u)$ -достаточно гладкая функция, которая удовлетворяет соотношениям $f(0) = f(1) = 0$, то данное уравнение есть уравнением Колмогорова-Петровского-Пискунова. Много работ было посвящено изучению симметрийных свойств, проведению групповой класификации, а также поиску точных решений этих уравнений. В случае $f(u) = \lambda u^n$, используя метод условной симметрии и подстановку $u = (z_x / z)^{2/(n-1)}$ построены новые точные решения нелинейного уравнения теплопроводности и указан способ построения бесконечного множества точных решений которые выражены через эллиптические функции Якоби. Полученные решения могут быть использованы в прикладных исследованиях и

стать эффективным инструментом проверки адекватности математических моделей.

Ключевые слова: *уравнения теплопроводности, точные решения, метод условной симметрии.*

Одержана редколегією 29 листопада 2011року