МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Євген Тростянський, Микола Кузьмич

Віктор Зубченко, Ольга Сєдих, Світлана Маковецька

Національний університет харчових технологій

Вступ. Комп'ютерне моделювання дає студентам один з найважливіших інструментів, що полегшують проникнення в таємниці науки. Моделювання дозволяє надати наочності абстрактним законам і концепціям, привернути увагу до деталей досліджуваного явища. Графічне відображення результатів моделювання на екрані комп'ютера одночасно з анімацією досліджуваного явища або процесу дозволяє легко сприймати великі обсяги інформації. Вибір механічних коливальних систем для моделювання обумовлений можливістю відобразити їхній рух з екрані комп'ютера. Візуалізація руху з одночасним виведенням графіків значно полегшує розуміння багатьох абстрактних концепцій фізики коливань.

Матеріали і методи. Математичний маятник: матеріальна точка, яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці. Практично це важке тіло підвішене на легкій нитці, довжина якої набагато більша ніж розміри тіла. Коливання відбуваються в одній площині під дією сили тяжіння. Коли маятник перебуває в стані рівноваги, сила тяжіння зрівнюється силою пружності нитки. Якщо маятник відхилити на деякий кут α, то сила пружності нитки зрівноважує складову силу тяжіння F_1, направлену вздовж нитки. Складова

$$F_2 = F_T \sin\alpha - mg\sin\alpha$$

є повертаючою силою. Розкладемо sinα в ряд Тейлора:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - ....$$

Для достатньо малих α маємо sinα=α, то

$$F_2 = mg\alpha = -mg\frac{x}{l},$$

де ми враховуємо, що $\alpha = -\dfrac{x}{l}$,

де x — зміщення маятника з положення рівноваги,

l — довжина нитки.

Таким чином диференційні рівняння, що описує це коливання

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mg}{l}.$$

Тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{l} \cdot x = 0, \qquad \text{або} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

де ω — циклічна частота власних коливань математичного маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Одержане рівняння є рівнянням гармонічного коливання розв'язком якого є

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Амплітуда коливань А і початкова фаза φ_0 визначаються початковими умовами.

За допомогою математичного маятника можна визначити прискорення вільного падіння в будь-якій точці земної поверхні. Оскільки земна кора в різних місцях має неоднаковий склад, то і густина її в різних місцях різна. Там, де густина більша, прискорення вільного падіння буде більшим. Вимірюючи величину g за допомогою фізичного маятника, можна розслідувати поклади корисних копалин.

Результати.

L := 1 — довжина маятник, м

$\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{g}{L}\cdot\sin(x(t)) = 0\right.$ - диференційне рівняння коливань маятника з довільною амплітудою

Початкові умови:

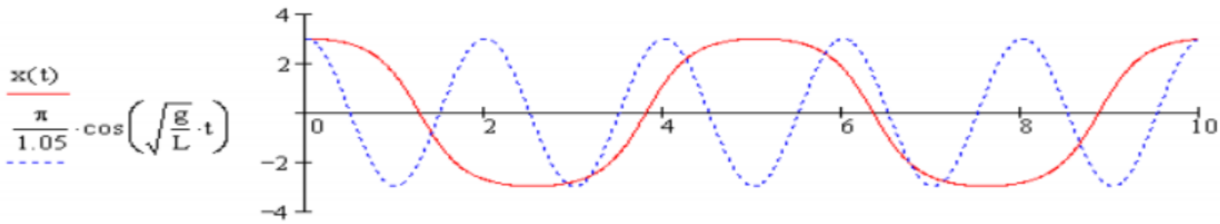

Рис.1.

Висновки. При малих кутах відхилення збіжність між наближеним та точним рішенням задовільна, графіки обох рішень накладаються один на інший протягом декількох періодів. При великих амплітудах рис.1, коливання явно не синусоїдальні. Таким чином, студенти не тільки отримують уяву про точність наближеної формули, але можуть отримати результат для довільних амплітуд.

Література

1. Гурский Д.А., Турбина Е.С. Вычисления в MathCad 12. – СПб.: Питер, 2006