

УДК 517.9: 519.46

А. Ф. Баранник (Помор. пед. академія, Слупськ, Польща),

І. І. Юрик (Нац. ун-т харч. технологій, Київ)

## ПРО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ

New extended classes of exact solutions of a nonlinear diffusion equation are constructed.

Побудовано нові класи точних розв'язків нелінійних рівнянь дифузії.

### 1. Вступ. Рівняння

$$u_t = u_{xx} + b(u)u_x + c(u), \quad (1)$$

де  $u = u(t, x)$ ,  $b(u)$ ,  $c(u)$  — гладкі функції, а індекси означають похідні за відповідними змінними, узагальнює велику кількість відомих нелінійних еволюційних рівнянь, які мають фундаментальне значення в моделюванні різноманітних процесів теплопровідності, реакції-дифузії, в математичній біології, генетиці, хімії. Так, частинними випадками рівняння (1) є рівняння Фішера [1]

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u), \quad (2)$$

а також рівняння Маррі [2]

$$u_t = u_{xx} + \lambda uu_x + au^2 + bu, \quad (3)$$

де  $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ , які широко використовуються в біології.

Групову класифікацію рівнянь (1) наведено в [3], а результати умовної симетрії рівняння (1) — в [4].

У даній роботі розглядається рівняння вигляду

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + \varepsilon u^{\frac{n+1}{2}} + b_1 u + b_0 u^{\frac{3-n}{2}}, \quad (4)$$

де  $\lambda \geq 0$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ , яке є узагальненням рівнянь (2), (3), а також нелінійне рівняння дифузії

$$u_t = h_1(u)u_{xx} + h_2(u)u_x + h_3(u), \quad (5)$$

де

$$h_1(u) = \beta_0 + \beta_1 u, \quad h_2(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2, \\ h_3(u) = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$$

є многочленами з дійсними коефіцієнтами степенів 1, 2 і 4 відповідно. Для довільного  $n$  побудовано анзаци, які редукують рівняння (4) до звичайних диференціальних рівнянь. У випадку  $n = 3$  з використанням нелокального перетворення Коула – Хопфа знаходження розв'язків даного рівняння зведено до інтегрування системи двох лінійних рівнянь, одне з яких є звичайним диферен-

ціальним рівнянням. Показано, що для  $n = 3$  рівняння (4) має нетривіальну умовну симетрію, а також побудовано нові точні розв'язки даного рівняння.

З використанням підстановки Коула – Хопфа побудовано також нові точні розв'язки рівняння (5). Зазначимо, що цей підхід було успішно використано [5] для побудови точних розв'язків рівняння Колмогорова – Петровської Піскунова

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

де  $f(u)$  — гладка функція.

**2. Нелінійні розв'язки рівняння (4) для  $n = 3$ .** Розглянемо рівняння у випадку  $n = 3$ :

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + \varepsilon u^2 + b_1 u + b_0.$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (6) є алгебра, породжена операторами

$$P_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Тому всі інваріантні розв'язки (5) мають вигляд

$$u = w(\alpha x + \beta t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ми покажемо, що рівняння (6) має нетривіальну  $Q$ -умовну симетрію [6], і з демо умовно інваріантні розв'язки даного рівняння.

**Теорема 1.** Якщо в рівнянні (6)  $\lambda \neq 0$ , то воно умовно інваріантне відносно оператора

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\lambda u + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial x} + (\varepsilon u^2 + b_1 u + b_0) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Теорема доводиться з використанням формули другого продовження оператора  $X$  [7] і критерію умовної інваріантності відносно деякого оператора  $X$  [6, 8].

**Теорема 2.** 1. Якщо  $4\varepsilon b_0 - b_1^2 > 0$ , то розв'язком рівняння (6) є функція

$$u = \varepsilon \mu_1 \operatorname{tg}(\mu_1 t + k_1) + \frac{k_2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\lambda} x + \left(\frac{1}{\lambda^2} + b_1\right) t\right]}{\cos(\mu_1 t + k_1)},$$

$$\text{де } \mu_1 = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{4\varepsilon b_0 - b_1^2}.$$

2. Якщо  $b_1^2 - 4\varepsilon b_0 > 0$ , то розв'язком рівняння (6) є функція

$$u = \varepsilon \mu_2 \operatorname{th}(\mu_2 t + k_1) + \frac{k_2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\lambda} x + \left(\frac{1}{\lambda^2} + b_1\right) t\right]}{\operatorname{ch}(\mu_2 t + k_1)},$$

$$\text{де } \mu_2 = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{b_1^2 - 4\varepsilon b_0}.$$

3. Якщо  $b_1^2 - 4\varepsilon b_0 = 0$ , то розв'язком рівняння (6) є функція

$$u = -\frac{1}{\varepsilon t + k_1} - \frac{b_1}{2\varepsilon} + \frac{k_2 \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\lambda} x + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{b_1}{2}\right) t\right]}{\varepsilon t + k_1}.$$

У формулах (8) – (10)  $k_1, k_2$  — довільні сталі.

Доведення теореми зводиться до відшукування розв'язків рівняння (6), і

антних відносно оператора (7). Якщо  $u = u(t, x)$  є одним із таких розв'язків, то

$$u_t = -\left(-\lambda u + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)u_x + \varepsilon u^2 + b_1 u + b_0. \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (6), отримуємо

$$u_{xx} + \frac{\varepsilon}{\lambda}u_x = 0. \quad (12)$$

Отже, система рівнянь (6), (11) рівносильна системі рівнянь (6), (12). Інтегруючи систему (6), (12), отримуємо розв'язки (8) – (11) рівняння (6).

Теорему доведено.

Очевидно, що розв'язки (8) – (10) не є інваріантними відносно операторів трансляцій  $P_t + \gamma P_x$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , а тому вони є нелієвськими.

**3. Лієвські розв'язки рівняння (4) для  $n = 3$ .** Побудуємо тепер розв'язки рівняння (6), інваріантні відносно операторів трансляцій. З цією метою використаємо анзац Коула – Хопфа

$$u = k \frac{z_x}{z}, \quad (13)$$

де  $k$  — стала ( $k \neq 0$ ), а  $z = z(t, x)$  — деяка функція. Підставляючи (13) в (6), отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} (kz_{xt} - kz_{xxx} - b_1kz_x - b_0z)z^2 + kz_x(-z_t + (3 - \lambda k)z_{xx} - \varepsilon kz_x)z + \\ + (-2k + \lambda k^2) = 0. \end{aligned}$$

Змінну  $z$  визначимо з умови, що вирази при  $z$  і  $z^2$  у даному рівнянні дорівнюють нулю. Маємо систему

$$kz_{xt} - kz_{xxx} - b_1kz_x - b_0z = 0, \quad (14)$$

$$-z_t + (3 - \lambda k)z_{xx} - \varepsilon kz_x = 0, \quad (15)$$

$$2 - \lambda k = 0. \quad (16)$$

З рівнянь (15) і (16) знаходимо

$$z_t = z_{xx} - \varepsilon kz_x. \quad (17)$$

Підставляючи в рівняння (14), одержуємо

$$\varepsilon k^2 z_{xx} + b_1kz_x + b_0z = 0. \quad (18)$$

Отже, система (14) – (16) є рівносильною системі (16) – (18), яку можна легко проінтегрувати. Тип її розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння

$$\varepsilon k^2 v^2 + b_1kv + b_0 = 0, \quad (19)$$

що відповідає лінійному рівнянню (18). Коренями характеристичного рівняння (19) є  $\frac{1}{k}m_1$ ,  $\frac{1}{k}m_2$ , де  $m_1$ ,  $m_2$  — корені квадратного рівняння

$$\varepsilon v^2 + b_1v + b_0 = 0. \quad (20)$$

Інтегруючи систему (16) – (18) і використовуючи підстановку (13), приходимо до такого результату.

**Теорема 3.** 1. Якщо корені  $m_1$ ,  $m_2$  рівняння (20) є дійсними і різними, то розв'язком рівняння (6) є функція

$$u = \frac{k_1 m_1 \exp \psi_1(t, x) + k_2 m_2 \exp \psi_2(t, x)}{k_1 \exp \psi_1(t, x) + k_2 \exp \psi_2(t, x)}, \quad (21)$$

де

$$\psi_i(t, x) = \frac{\lambda}{2} m_i x + \left( \frac{\lambda^2}{4} m_i^2 - \varepsilon m_i \right) t, \quad i = 1, 2.$$

2. Якщо корені  $m_1 = \alpha + i\beta$ ,  $m_2 = \alpha - i\beta$  рівняння (20) є комплексними, то розв'язком рівняння (6) є функція вигляду

$$u = \frac{(\alpha k_1 + \beta k_2) \cos \phi(t, x) + (\alpha k_2 - \beta k_1) \sin \phi(t, x)}{k_1 \cos \phi(t, x) + k_2 \sin \phi(t, x)}, \quad (22)$$

де

$$\phi(t, x) = \frac{\lambda}{2} \beta x + \left( \frac{\lambda^2}{2} \alpha \beta - \varepsilon \beta \right) t.$$

3. Якщо корені  $m_1, m_2$  рівняння (20) є рівними, то розв'язком рівняння (6) є функція

$$u = -\frac{\varepsilon b_1}{2} \frac{\left\{ k_1 x + \left( -\frac{\varepsilon \lambda b_1}{2} k_1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda} k_1 \right) t + k_2 \right\} + k_1}{k_1 x + \left( -\frac{\varepsilon \lambda b_1}{2} k_1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda} k_1 \right) t + k_2}. \quad (23)$$

У формулах (21)–(23)  $k_1, k_2$  — довільні сталі,  $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ .

4. Розв'язки рівняння (4) для довільного  $n$ . Побудуємо точні розв'язки рівняння (4) для довільного  $n$  при умові, що  $b_0 = 0$ :

$$u_t = u_{xx} + \lambda u \frac{n-1}{2} u_x + \varepsilon u \frac{n+1}{2} + b_1 u. \quad (24)$$

З цією метою використаємо анзац

$$u = k \left( \frac{z_x}{z} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad (25)$$

де  $k$  — стала,  $z = z(t, x)$ . Підставляючи (25) в рівняння (24) і прирівнюючи до нуля вирази при  $z$  і  $z^2$ , отримуємо таку систему для визначення змінної  $z$ :

$$\frac{2}{n-1} z_x z_{xt} - \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z_{xx}^2 - \frac{2}{n-1} z_x z_{xx} - b_1 z_x^2 = 0, \quad (26)$$

$$z_t = \left( \frac{n+3}{n-1} - \lambda k \frac{2}{n-1} \right) z_{xx} - \frac{\varepsilon(n-1)}{2} k \frac{n-1}{2} z_x, \quad (27)$$

$$-\lambda k \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{n-1} = 0. \quad (28)$$

З рівняння (28) знаходимо

$$k \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{\lambda(n-1)}. \quad (29)$$

Підставляючи (29) в (27), маємо

$$z_t = \frac{2}{n-1} z_{xx} - \frac{\varepsilon(n+1)}{2\lambda} z_x. \quad (30)$$

Продиференціювавши обидві частини рівняння (30) за змінною  $x$  і підставивши в рівняння (26), отримуємо

$$\frac{6-2n}{(n-1)^2} z_x z_{xxx} - \frac{\varepsilon(n+1)}{\lambda(n-1)} z_x z_{xx} - \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z_{xx}^2 - b_1 z_x^2 = 0. \quad (31)$$

Отже, система (26) – (28) є рівносильною системі (29) – (31).

**Теорема 4.** Розв'язком рівняння (24) є функція

$$u = \left[ \frac{n+1}{\lambda(n-1)} \right]^{n-1} \times \frac{\exp \left[ -\frac{2\varepsilon\lambda b_1}{n+1} x + \left( \frac{4\lambda^2 b_1^2}{(n+1)^2} + b_1 \right) t \right]}{\left\{ -\frac{\varepsilon(n+1)}{\lambda(n-1)b_1} \exp \left[ -\frac{\varepsilon\lambda b_1(n-1)}{n+1} x + \left( \frac{2\lambda^2 b_1^2}{(n+1)^2} + \frac{b_1}{2} \right) (n-1)t \right] + \tilde{k} \right\}^{\frac{2}{n-1}}}, \quad (32)$$

$\tilde{k}$  — довільна стала.

**Доведення.** Повторюючи міркування, наведені в [5], знаходимо загальний розв'язок системи (29) – (31):

$$z = -\frac{k_1(n+1)}{\lambda\varepsilon(n-1)b_1} \exp \left[ -\frac{\varepsilon\lambda b_1(n-1)}{n+1} x + \left( \frac{2\lambda^2 b_1^2(n-1)}{(n+1)^2} + \frac{b_1(n-1)}{2} \right) t \right] + k_2. \quad (33)$$

Підставляючи (33) в (25), отримуємо розв'язок (32).

Теорему доведено.

Розглянемо рівняння

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + b u^{\frac{n+1}{2}} + \frac{b^2(n+1)}{2\lambda^2}. \quad (34)$$

Анзац

$$u = -\frac{b(n-1)k_1}{2\lambda} \exp \left( -\frac{b(n-1)}{2\lambda} x + \frac{b^2(n-1)(n+3)}{4\lambda^2} t + k_2 \right) w(z), \quad (35)$$

де

$$z = k_1 \exp \left( -\frac{b(n-1)}{2\lambda} x + \frac{b^2(n-1)(n+3)}{4\lambda^2} t + k_2 \right) + k_3, \quad (36)$$

$k_1, k_2, k_3$  — довільні дійсні числа,  $k_1 \neq 0$ , редукує рівняння (34) до звичайного диференціального рівняння

$$w'' + \lambda w^{\frac{n-1}{2}} w' = 0. \quad (37)$$

**Теорема 5.** Якщо  $n = 3$ , то розв'язками рівняння (34) є функції

$$u = -\frac{2bk_1}{\lambda} \frac{\exp \left( -\frac{b}{\lambda} x + \frac{3b^2}{\lambda^2} t + k_2 \right)}{k_1 \exp \left( -\frac{b}{\lambda} x + \frac{3b^2}{\lambda^2} t + k_2 \right) + \lambda k_3 + c},$$

де  $k_1, k_2, k_3$  — довільні дійсні числа,  $k_1 \neq 0$ ;

$$u = \frac{bk_1}{\mu_1 \lambda} \exp\left(-\frac{b}{\lambda}x + \frac{3b^2}{\lambda^2}t + k_2\right) \operatorname{tg}(\mu_1 cz + c_1), \quad (38)$$

де  $\mu_1 = \sqrt{\frac{-\lambda}{2c}}$ ,  $c, c_1$  — довільні сталі,  $c < 0$ ;

$$u = -\frac{bk_1}{\mu_2 \lambda} \exp\left(-\frac{b}{\lambda}x + \frac{3b^2}{\lambda^2}t + k_2\right) \operatorname{th}(\mu_2 cz + c_1), \quad (39)$$

де  $\mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2c}}$ ,  $c, c_1$  — довільні сталі,  $c > 0$ .

У формулах (38), (39)  $z = z(t, x)$  — функція, визначена формулою (36).

Теорема доводиться з використанням редукованого рівняння (37) для  $n = 3$ , а також відповідного анзацу (35), (36).

**5. Точні розв'язки рівняння (5).** Для побудови розв'язків рівняння (5) використаємо підстановку Коула – Хопфа (13). З'ясуємо, для яких значень параметрів  $\beta_0, \beta_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  рівняння (5) має розв'язки вигляду (13). З цієї метою підставимо (13) в (5) і в отриманому рівнянні прирівняємо до нуля вирази при  $z, z^2$  і  $z^3$ . В результаті отримаємо систему

$$kz_{xt} = \beta_0 kz_{xxx} + \lambda_0 kz_{xx} + a_1 kz_x + a_0 z, \quad (40)$$

$$z_t = -\beta_1 kz_{xxx} + (3\beta_0 - \lambda_1 k)z_{xx} + (\lambda_0 - a_2 k)z_x, \quad (41)$$

$$(2\beta_0 - \lambda_1 k + a_3 k^2)z_x + (-3\beta_1 k + \lambda_2 k^2)z_{xx} = 0, \quad (42)$$

$$a_4 k^2 - \lambda_2 k + 2\beta_1 = 0. \quad (43)$$

Підставимо (41) в (40):

$$-\beta_1 k^2 z_{xxx} + k(2\beta_0 - \lambda_1 k)z_{xxx} - a_2 k^2 z_{xx} - a_1 k z_x - a_0 z = 0. \quad (44)$$

Отже, знаходження розв'язків рівняння (5) звелось до інтегрування системи лінійних рівнянь (41) – (44). Проаналізуємо детально випадок  $-3\beta_1 + \lambda_2 k = 0$ . З рівняння (42) випливає  $2\beta_0 - \lambda_1 k + a_3 k^2 = 0$ . Враховуючи (43), отримуємо

$$k = \frac{\lambda_2}{3a_4}, \quad \lambda_1 = \frac{6a_4\beta_0}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2 a_3}{3a_4}, \quad \beta_1 = \frac{\lambda_2^2}{9a_4}. \quad (45)$$

Підставляючи (45) в (44), знаходимо

$$a_4 k^4 z_{xxx} + a_3 k^3 z_{xxx} + a_2 k^2 z_{xx} + a_1 k z_x + a_0 z = 0. \quad (46)$$

Отже, інтегрування системи (41) – (44) у випадку  $-3\beta_1 + \lambda_2 k = 0$  зводиться до інтегрування системи (41), (46) при умові, що виконуються співвідношення (45). Рівняння (5) при цьому має вигляд

$$u_t = \left(\beta_0 + \frac{\lambda_2^2}{9a_4} u\right) u_{xx} + \left[\lambda_0 + \left(\frac{6a_4\beta_0}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2 a_3}{3a_4}\right) u + \lambda_2 u^2\right] u_x + a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0, \quad (47)$$

де значення параметрів  $\beta_0, \lambda_0, \lambda_2, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  є довільними,  $\lambda_2 \neq 0, a_4 \neq 0$ .

Побудуємо точні розв'язки рівняння (47). Тип розв'язку рівняння (47) залежить від коренів характеристичного рівняння

$$a_4 k^4 r^4 + a_3 k^3 r^3 + a_2 k^2 r^2 + a_1 k r + a_0 = 0, \quad (48)$$

що відповідає рівнянню (46). Коренями рівняння (48) є  $\frac{1}{k}m_i$ , де  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , — корені рівняння

$$a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \quad (49)$$

**Теорема 6.** Якщо корені  $m_1, m_2, m_3, m_4$  рівняння (49) є дійсними і різними, то розв'язком рівняння (47) є функція

$$u = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i k_i \exp \phi_i(t, x)}{\sum_{i=1}^4 k_i \exp \phi_i(t, x)},$$

де  $k_i$  — довільні сталі, що одночасно не дорівнюють нулю,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\phi_i(t, x) = \frac{3a_4}{\lambda_2} m_i x + \left[ -a_4 m_i^3 + \left( \frac{9a_4^2 \beta_0}{\lambda_2^2} - a_3 \right) m_i^2 + \left( \frac{3a_4 \lambda_0}{\lambda_2} - a_2 \right) m_i \right] t. \quad (50)$$

**Теорема 7.** Якщо корені  $m_1, m_2, m_3, m_4$  рівняння (49) є дійсними,  $m_1 = m_2$ ,  $m_1 \neq m_3$ ,  $m_1 \neq m_4$ ,  $m_3 \neq m_4$ , то розв'язком рівняння (47) є функція

$$u = \frac{\left[ \frac{\lambda_2}{3a_4} \mu_1 + m_1(\mu_0 + \mu_1 x) \right] \exp \phi_1(t, x) + \sum_{i=3}^4 m_i k_i \exp \phi_i(t, x)}{(\mu_0 + \mu_1 x) \exp \phi_1(t, x) + \sum_{i=3}^4 k_i \exp \phi_i(t, x)},$$

де  $k_i$  — довільні сталі, що одночасно не дорівнюють нулю,

$$\mu_0 = k_2 C t + k_1, \quad \mu_1 = k_2,$$

$$C = -\lambda_2 m_1^2 + \frac{2(9a_4^2 \beta_0 - \lambda_2^2 a_3)}{3a_4 \lambda_2} m_1 + \lambda_0 - \frac{\lambda_2 a_2}{3a_4}, \quad (51)$$

а функції  $\phi_i(t, x)$  визначаються формулою (50).

**Теорема 8.** Якщо корені  $m_1 = \alpha_1 + i\gamma_1$ ,  $m_2 = \alpha_1 - i\gamma_1$ ,  $m_3 = \alpha_2 + i\gamma_2$ ,  $m_4 = \alpha_2 - i\gamma_2$  рівняння (49) є комплексними і різними, то розв'язком рівняння (47) є функція

$$u = \frac{\sum_{i,j=1}^2 l_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(t, x)}{\sum_{i,j=1}^2 k_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(t, x)},$$

де  $k_i^{(j)}$ ,  $i, j = 1, 2$ , — довільні сталі, що одночасно не дорівнюють нулю,

$$l_1^{(1)} = \alpha_1 k_1^{(1)} + \gamma_1 k_1^{(2)}, \quad l_2^{(1)} = \alpha_1 k_1^{(2)} - \gamma_1 k_1^{(1)}, \quad (52)$$

$$l_1^{(2)} = \alpha_2 k_2^{(1)} + \gamma_2 k_2^{(2)}, \quad l_2^{(2)} = \alpha_2 k_2^{(2)} - \gamma_2 k_2^{(1)}, \quad (53)$$

а функції  $\psi_i^{(j)}$ ,  $i, j = 1, 2$ , визначаються формулами

$$\begin{aligned} \psi_1^{(j)}(t, x) = & \exp \left\{ \frac{3a_4 \alpha_j}{\lambda_2} x + \left[ -a_4 (\alpha_j^2 - 3\alpha_j \gamma_j^2) + A(\alpha_j^2 - \gamma_j^2) + B\alpha_j \right] t \right\} \times \\ & \times \cos \left\{ \frac{3a_4 \alpha_j}{\lambda_2} x + \left[ -a_4 (3\alpha_j^2 \gamma_j - \gamma_j^3) + 2A\alpha_j \gamma_j + B\gamma_j \right] t \right\}, \quad j = 1, 2, \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(j)}(t, x) &= \exp\left\{\frac{3a_4\alpha_j}{\lambda_2}x + [-a_4(\alpha_j^2 - 3\alpha_j\gamma_j^2) + A(\alpha_j^2 - \gamma_j^2) + B\alpha_j]t\right\} \times \\ &\times \sin\left\{\frac{3a_4\alpha_j}{\lambda_2}x + [-a_4(3\alpha_j^2\gamma_j - \gamma_j^3) + 2A\alpha_j\gamma_j + B\gamma_j]t\right\}, \quad j=1, 2, \quad (55) \\ A &= \frac{9a_4^2\beta_0}{\lambda_2^2} - a_3, \quad B = \frac{3\lambda_0a_4}{\lambda_2} - a_3. \end{aligned}$$

**Теорема 9.** Якщо корені  $m_1, m_2$  рівняння (49) є дійсними і різними, а корені  $m_3 = \alpha_2 + i\gamma_2, m_4 = \alpha_2 - i\gamma_2$  — комплексними, то розв'язком рівняння (47) є функція

$$u = \frac{\sum_{i=1}^2 k_i m_i \exp \phi_i(t, x) + \sum_{i=1}^2 l_i^{(2)} \psi_i^{(2)}(t, x)}{\sum_{i=1}^2 k_i \exp \phi_i(t, x) + \sum_{i=1}^2 k_i^{(2)} \psi_i^{(2)}(t, x)},$$

де  $k_i, k_i^{(2)} \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ , функції  $\phi_1(t, x)$  і  $\phi_2(t, x)$  обчислюються за формулою (50), функції  $\psi_1^{(2)}(t, x)$  і  $\psi_2^{(2)}(t, x)$  — за формулами (54), (55), а коефіцієнти  $l_i^{(2)}, i = 1, 2$ , — за формулами (53).

**Теорема 10.** Якщо корені  $m_1$  і  $m_2$  рівняння (49) є дійсними і рівними, а корені  $m_3 = \alpha_2 + i\gamma_2, m_4 = \alpha_2 - i\gamma_2$  — комплексними, то розв'язком рівняння (47) є функція

$$u = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{3a_4} \mu_1 + m_1(\mu_0 + \mu_1 x)\right] \exp \phi_1(t, x) + \sum_{i=1}^2 l_i^{(2)} \psi_i^{(2)}(t, x)}{(\mu_0 + \mu_1 x) \exp \phi_1(t, x) + \sum_{i=1}^2 k_i^{(2)} \psi_i^{(2)}(t, x)},$$

де  $k_i^{(2)} \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ , функція  $\phi_1(t, x)$  визначається за формулою (50), функції  $\psi_i^{(2)}(t, x), i = 1, 2$ , обчислюються за формулами (54), (55),  $\mu_0$  і  $\mu_1$  — за формулою (51), а коефіцієнти  $l_i^{(2)}$  — за формулами (53).

**Теорема 11.** Якщо корені  $m_1, m_2, m_3, m_4$  рівняння (49) є дійсними,  $m_1 = m_2 = m_3, m_1 \neq m_4$ , то розв'язком рівняння (47) є функція

$$u = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{3a_4} (\mu_1 + 2\mu_2 x) + m_1 \sum_{i=0}^2 \mu_i x^i\right] \exp \phi_1(t, x) + m_4 k_4 \exp \phi_4(t, x)}{\left(\sum_{i=0}^2 \mu_i x^i\right) \exp \phi_1(t, x) + k_4 \exp \phi_4(t, x)},$$

де  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ , функції  $\phi_1(t, x)$  і  $\phi_4(t, x)$  визначаються за формулою (50), а  $C$  — формулою (51),

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \left\{ k_3 C^2 t^2 + k_2 C t + k_3 \left[ -\frac{2\lambda_2^2}{3a_4} + \frac{2(9a_4^2\beta_0 - \lambda_2^2 a_3)}{9a_4^2} \right] t + k_1 \right\}, \\ \mu_1 &= 2k_3 C t + k_2, \quad \mu_2 = k_3. \end{aligned}$$

**Теорема 12.** Якщо корені  $m_1, m_2, m_3, m_4$  рівняння (49) є комплексними,  $m_1 = m_3, m_2 = m_4, m_1 = \alpha_1 + i\gamma_1, m_2 = \alpha_1 - i\gamma_1$ , то рівняння (47) має розв'язок вигляду (13), де  $k = \frac{\lambda_2}{3a_4}$ ,

$$z = \sum_{i=1}^2 k_i^{(1)} \psi_i^{(1)} + l_1 (S \psi_1^{(1)} - T \psi_2^{(1)}) + l_2 (S \psi_2^{(1)} - T \psi_1^{(1)}),$$

причому  $k_i^{(1)}, l_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ ,

$$S(t, x) = \left[ -\lambda_2 (\alpha_1^2 - \gamma_1^2) + \frac{2(9a_4^2 \beta_0 - \lambda_2^2 a_3)}{3a_4 \lambda_2} \alpha_1 + \lambda_0 - \frac{\lambda_2 a_2}{3a_4} \right] t + x,$$

$$T(t) = \left[ -2\lambda_2 \alpha_1 \gamma_1 + \frac{2(9a_4^2 \beta_0 - \lambda_2^2 a_3)}{3a_4 \lambda_2} \gamma_1 \right] t,$$

а функції  $\psi_i^{(1)}(t, x), i = 1, 2$ , обчислюються за формулами (54), (55).

**Теорема 13.** Якщо корені  $m_1, m_2, m_3, m_4$  рівняння (49) є дійсними і рівними, то рівняння (47) має розв'язок

$$u = \frac{\lambda_2}{3a_4} \frac{\sum_{i=0}^3 i \mu_i x^{i-1}}{\sum_{i=0}^3 \mu_i x^i} + m_1,$$

де  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ ,  $C$  визначається за формулою (51),

$$\mu_0 = k_4 C^3 t^3 + k_3 C^2 t^2 + 3k_4 C D t^2 + k_2 C t + k_3 D t - k_4 E t + k_1,$$

$$\mu_1 = 3k_4 C^2 t^2 + 2k_3 C t + 3k_4 D t + k_2,$$

$$\mu_2 = 3k_4 C t + k_3, \quad \mu_3 = k_3,$$

$$D = -\frac{2\lambda_2^2}{3a_4} m_1 + \frac{2(9a_4^2 \beta_0 - \lambda_2^2 a_3)}{9a_4^2}, \quad E = -\frac{2\lambda_2}{a_4}.$$

1. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Engenics. – 1937. – 7. – P. 353 – 369.
2. Marrey J. D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.
3. Серов М. І., Черніга Р. М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 9. – С. 1262 – 1270.
4. Cherniha R., Serov M. Lie and non-Lie symmetries of nonlinear diffusion equations with convectid term // Proc. Second Int. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (July 7 – 13, 1997, Kyiv). – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 1997. – Vol. 2. – P. 444 – 449.
5. Nikitin A. G., Barannyk T. A. Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations / math-ph/0304004.
6. Фуцич В. И., Штелель В. М., Серов Н. И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
7. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1989. – 22. – P. 2915 – 2924.

Одержано 29.03.2004,  
після доопрацювання — 31.03.2005