О.А. Лисенко

канд. фіз.-мат. наук, доцент

національний університет харчових технологій, м. Київ, Україна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ НА ПІДПРИЄМСТВАХ ХАРЧОВОЇ ПРОМИСЛОВОСТІ

В сучасних умовах господарювання, не зважаючи на наслідки пандемії COVID-19 та воєнний стан, в який поглинула українська економіка з лютого 2022р., вітчизняні підприємства харчової промисловості прагнуть підвищувати результати свої діяльності. Один із засобів, що застосовує менеджмент підприємств для досягнення цієї мети, пов’язаний із оптимізацією всіх бізнес-процесів, що приймають участь у виготовленні готової продукції. Гостра конкуренція на ринку харчової продукції вимагає постійного впровадження сучасних методів оптимізації, які базуються в першу чергу на останніх розробках економіко-математичного моделювання та програмного забезпечення.

Актуальність дослідження даної тематики підтверджується низкою робіт як вітчизняних так і закордонних вчених. Так, в роботі [2] науковці звертають увагу на необхідність формування механізму оптимізації бізнес-процесів підприємницьких структур, який дозволить їм зберегти економічну ефективність. В роботі [10] зауважено, що підвищення ефективності діяльності підприємства передбачає оптимізацію всіх бізнес-процесів, пов’язаних з виробництвом готової продукції починаючи з замовлень сировини до безпосереднього виробництва продукції. Свірський у своїй роботі [16] доводить, що ефективним інструментом аналізу та оптимізації бізнес-процесів є імітаційне моделювання. Альошкіна Л.П. у своїй роботі [1] наголошує на правильно сформульованій інноваційній логістичній стратегії, що дозволить оптимізувати «проблемні» бізнес-процеси.

Також оптимізації бізнес-процесів вимагають не тільки підприємства, що виробляють готову продукцію, а інших галузей. Так, автори роботи [11] пропонують методологію удосконалення загальної системи оптимізації стратегічних бізнес-процесів сервісної IT-компанії на основі сучасного економіко-математичного інструментарію оцінки й аналізу. А науковці Стеблюк Н. і Волосова Н. визначають практичні рекомендації щодо використання математичного апарату для формалізації бізнес-процесів закладів вищої освіти [17].

Таким чином, в сучасних умовах гострої ринкової конкуренції для суб'єкта господарювання становиться актуальним вдосконалення управління економічними об'єктами, в тому числі впровадження систем підтримки прийняття рішення з використанням комп'ютерних технологій. Такі системи передбачають розробку програмного забезпечення на базі економіко-математичних методів оптимізації економічних процесів та явищ.

Як зауважують Волонтир Л.О та ін. [7, с. 8] основна задача управління суб'єктами господарювання – це виявлення альтернативних рішень та аналіз можливостей виявлення альтернатив за допомогою модельних експериментів. Єдиним науково обґрунтованим засобом досліджень економічних систем є математичне моделювання, один із найбільш ефективних кількісних методів аналізу управлінських рішень, що дозволяє отримати науково обґрунтовані знання про досліджувані економічні процеси.

Кожний суб'єкт господарювання в складанні свого бізнес-плану діяльності об'єкту господарювання відштовхується від плану виробництва продукції чи послуг за певних як внутрішніх так і зовнішніх умов з метою досягнення найкращих фінансових результатів. Побудувати такий план можна тільки на основі теорії оптимізації, оскільки досліджувані економічні процеси мають багато альтернативних планів розвитку в залежності від заданих умов.

Як показують дослідження науковців, математична формалізація основних економічних закономірностей, які використовуються у визначенні оптимальних планів виробництва продукції не суперечить лінійній формі рівнянь та нерівностей [6, с. 20].

Методи лінійного програмування дозволяють отримати не тільки оптимальні значення керованих змінних. Будь-якого суб'єкта господарювання в першу чергу цікавлять дослідження змін економічних систем, які динамічно розвиваються і, в першу чергу, залежить від реальної економічної ситуації, що складається на підприємстві. Зміна умов, в яких побудована модель, призводить до втрати актуальності інформації, що отримана в результаті дослідження моделі. На підприємстві постійно виникають такі ситуації, як зміна запасів ресурсів, впровадження нових технологій виробництва або заміна обладнання, зміни в ціновій політиці на підприємстві, випуск нового виду продукції та припинення випуску невигідного або нерентабельного тощо. Все це може привести до того, що знайдений оптимальний план виробництва стане або неоптимальним або взагалі непридатним в нових умовах, що склалися на виробництві. Для дослідження впливів подібних економічних ситуацій оптимальний план фахівці використовують такий математичний апарат як теорію двоїстості. Вона дає змогу визначати статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів або заміни одного дефіцитного ресурсу іншим. Використання двоїстих оцінок надає можливість визначення рентабельності кожного виду продукції, яка виробляється підприємством. Також в ході проведення математичного аналізу моделі на чутливість можна виявити як можливі зміни параметрів вихідної моделі вплинуть на отримане раніше оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування [13, с. 4].

Як показують дослідження наукової літератури зацікавленість до даної тематики не спадає, економіко-математичні аспекти лінійних моделей оптимізації представляють в своїх роботах такі науковці як Блага Н., Приймак І. [4], Остапенко Я.О., Замота І.О. [15], Іванов С.В. [9], Sukanta Nayak [20], Camarena O.A. [18], Ian En-Hsu Yen із співавт. [19], Журбенко М.Г., Чумаков Б.М. [8], Кузьмичов А.І. із спіавт. [12], Мороз М. із співавт. [14], Балик Н.Р. із співавт. [4] та ін.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план ЗЛП відповідно до змін умов прямої задачі й отримати при цьому такі результати [5, с. 90].

1. Зміна різних коефіцієнтів у вихідній математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

– склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;

– склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;

– змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Введення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв'язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Введення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

При аналізі об'єктивно-обумовлених оцінок часто виникають питання в яких межах можна змінювати дані обсяги ресурсів та як вплине на оптимальний план зміни відповідних обсягів ресурсів.

При розв'язанні лінійної задачі симплекс-методом такий аналіз можна зробити безпосередньо із останньої симплекс-таблиці. Проте на практиці при плануванні фахівці повинні враховувати не один десяток, а то може бути і сотень, найменувань продукції, яка виготовляється. Розрахувати таку задачу лінійного програмування алгоритмом симплекс-методу навіть за допомогою формул у програмному додатку MS Excel виявляється достатньо громіздким, оскільки вимагає крім правильної побудови моделі, також реалізації ітераційного алгоритму тільки для одного розв'язку задачі. Отже, виникає питання як провести економіко-математичний аналіз впливу об'єктивно-обумовлених оцінок на оптимальний план використовуючи тільки можливості надбудови «Пошук розв'язання» електронної таблиці MS Excel.

В теорії двоїстості є декілька способів отримання розв'язків двоїстої задачі, якщо існує розв'язок прямої задачі:

1. Перший спосіб полягає у складанні відповідності між змінними взаємно-двоїстих задач при досягненні оптимуму, тобто за допомогою останньої симплекс-таблиці. Визначається відповідність між основними змінними однієї із двоїстих задач та додатковими змінними іншої задачі. Такий спосіб ефективний при розв'язанні задач невеликої розмірності і використовується при набутті здобувачами навичок на практичних заняттях.

2. Другий спосіб полягає у знаходженні вектору оптимального розв'язку двоїстої задачі (Y*) згідно із співвідношенням двоїстості за першою теоремою за формулою (1):

$$Y* = \bar{C}_{\text{баз}} D^{-1}, \tag{1}$$

де $\bar{C}_{\text{баз}}$ – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані;

D^{-1} – матриця, обернена до матриці *D,* складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі [6, с. 73].

Зазвичай даний спосіб не використовується, оскільки для задач малої розмірності простіше знайти об'єктивно-обумовлені оцінки за першим способом, для задач достатньо великої розмірності використовуються звіти за стійкістю, що створює MS Excel при розв'язанні за допомогою інструменту «Пошук розв'язання».

Проте, провести аналіз впливу на виробництво змін обсягів ресурсів нам якраз і дозволить дана обернена матриця D^{-1}, яка представлена в останній симплекс-таблиці в стовпцях, що відповідали базисним (умовно-базисним) змінним першої таблиці. Це дозволяє не реалізовувати достатньо громіздкий ітераційний процес симплекс-методу з метою знаходження останньої симплекс-таблиці і провести більш глибокий економічний аналіз отриманого оптимального розв'язку двоїстої задачі.

Проведемо аналіз для задачі трьох змінних з використанням останньої симплекс-таблиці та задачі більшої розмірності за допомогою програмного застосунку MS Excel.

Нехай є задача оптимального використання трьох видів сировини для виготовлення трьох видів продукції. Відомий прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду (табл. 1). Заданий також план на виробництво I виду продукції в розмірі 80 од. Мета виробництва – максимізація прибутку підприємства.

Таблиця 1

Вихідні дані до задачі оптимального використання сировини

Вид сировини	Витрати сировини на виготовлення 1 од. продукції			Запаси сировини
	I	II	III	
1	8	3	2	960
2	3	2	4	620
3	2	5	3	680
Прибуток від реалізації одиниці продукції	23	25	28	

Джерело: побудовано автором

Для побудови моделі введемо позначення: нехай x_1, x_2, x_3 – кількість виробленої продукції кожного виду, од. Тоді цільова функція, що формалізує прибуток підприємства від реалізованої продукції, бути мати вигляд:

$Z = 23x_1 + 25x_2 + 28x_3 \rightarrow \max$

Враховуючи вихідні дані щодо виробництва (табл. 1), обмеження на сировину і додаючи план на виробництво I виджу продукції, запишемо систему обмежень економіко-математичної моделі:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 960 - \text{на I вид сировини} \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 620 - \text{ на II вид сировини} \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 680 - \text{на III вид сировини} \\ x_1 \geq 80 - \text{план виробництва I виду продукції} \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$

де x_j – обсяг виробництва продукції j-го виду.

Наявність різних знаків в системі обмежень змушує для розв'язання використовувати метод штучного базису і, у даному випадку, одержуємо редуковані симплекс-таблиці, в яких не містяться штучні змінні у стовпцях, проте присутні додаткові змінні у канонічній формі, які склали умовно-припустимий базис:

$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 960;$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 620;$

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_6 = 680;$

$x_1 - x_7 + y_1 = 80.$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}; y_1 \geq 0.$

Розв'язуючи дану задачу симплекс-методом одержимо такий оптимальний план (табл. 2).

Таблиця 2

Остання симплекс-таблиця розв'язання задачі про використання ресурсів

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Права частина
x_2	0	1	0	0,5	-0,25	0	3,25	65
x_3	0	0	1	-0,25	0,375	0	-0,875	62,5
x_6	0	0	0	-1,75	0,125	1	-11,625	7,5
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	80
Z	0	0	0	5,5	4,25	0	33,75	5215

Джерело: розраховано автором

Використовуючи відповідність між розв'язками взаємо двоїстих задач за другою теоремою двоїстості одержимо з останнього рядка симплекс-таблиці значення об'єктивно-обумовлених оцінок: Y* = (5,5; 4,25; 0; 33,75; 0; 0; 0).

Для використання формули (1) необхідно записати вектор-рядок упорядкованих відповідно до базису останньої симплекс-таблиці коефіцієнтів цільової функції $\bar{C}_{баз}$, тобто $(c_2 \;\; c_3 \;\; c_6 \;\; c_1) = (25 \;\; 28 \;\; 0 \;\; 23)$ та виписати обернену матрицю, яка міститься в останніх чотирьох стовпцях табл. 2.

Отже, за формулою (1) оптимальний розв'язок двоїстої задачі буде дорівнювати:

$$Y^* = (25 \quad 28 \quad 0 \quad 23)\begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 & 0 & 3,25 \\ -0,25 & 0,375 & 0 & -0,875 \\ -1,75 & 0,125 & 1 & -11,625 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (5,5 \quad 4,25 \quad 0 \quad 33,75).$$

Тобто, двома способами отримані однакові оптимальні розв'язки двоїстої задачі до лінійної задачі планування виробництва продукції.

Двоїсті оцінки дозволяють визначити яких змін набуде цільова функція, якщо зміняться відповідні дефіцитні ресурси. Крім цього за допомогою останньої симплекс-таблиці або знайденої оберненої матриці можна знайти як впливають ці зміни не тільки на значення цільової функції, але і на отриманий оптимальний план. Все це дозволяє більш глибше проаналізувати економічний процес.

Так, у нашому випадку, зміна обмеження на першу сировину призведе до таких змін в оптимальному плані (стовпець x_4 табл. 2 або перший стовпець оберненої матриці D^{-1}). Якщо збільшити запас 1-го виду сировини одну одиницю (961 у.о.), то у новому оптимальному плані значення базисної змінної x_2* – обсяг виробництва II виду продукції – збільшиться на 0,5 од., змінної x_3* – обсяг виробництва III виду продукції – зменшиться на 0,25 од., x_6* – залишок 3-го виду сировини – зменшиться на 1,75, а x_1* – обсяг виробництва I виду продукції – не зміниться. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими: X* = (80; 65,5; 62,25; 0; 0; 5,75; 0). За такого плану виробництва максимальне значення цільової функції буде Z = 23·80 + 25·65,5 + + 28·62,25 = 5220,5 тис. умов. од., тобто зросте на y_1 = 5,5.

Для задач більшої розмірності різко зростає кількість додаткових та штучних змінних, що значно ускладнює ітераційний процес розв'язання таких задач симплекс-методом шляхом побудов симплекс-таблиць. В цьому разі ефективно використовують вбудовану процедуру «Пошук розв'язання» в електронній таблиці MS Excel. Дана процедура дозволяє отримати результати, тіньові оцінки ресурсів та навіть виявити інтервали змін правих частин обмежень в яких ці оцінки сталі. Проте, вона не дозволяє провести більш глибокий аналіз, як було показано вище для задачі із трьома змінними. Але для симетричних взаємоспряжених двоїстих задач можна за визначеним алгоритмом виділити закономірність, яка дозволяє, не будуючи симплекс-таблиці, отримати обернену матрицю.

Розглянемо задачу більшої розмірності, збільшивши асортимент удвічі, і проведемо аналіз двоїстих оцінок планування виробництва хлібобулочних виробів. Вихідні дані для моделі оптимального планування наведені в табл. 3-4.

Таблиця 3

Основні показники випуску хлібобулочних виробів за заданим асортиментом

№	Види продукції	Обсяг виробництва	Ціна 1 т, у.о.	Собівартість 1 т, у.о.	Прибуток	Попит, т			№ печі
						Мінім.	Максим.	План	
1	*Батон соціальний*	13,2	3090	2760	330	10	100	13,2	3
2	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	495	1970	1533	437	100	550	495	1
3	*Хліб білий соціальний ф.*	23,76	1530	1558	–28	20	30	23,76	1
4	*Хліб висівковий 0,3*	18,0	3600	2830	770	10	50	18	3
5	*Булка апетитна 0,3*	29,0	4200	3796	404	10	50	29	3
6	*Булка смачна 0,4*	133,0	6600	4666	1934	10	200	133	3

Джерело: розроблено автором

Задана річна продуктивність використовуваного обладнання у вигляді двох печей: №1 та №3 по 600 т/рік кожна.

Таблиця 4

Нормовані значення витрат сировини на 1 т хлібобулочних виробів

Показники, кг	*Батон соц.*	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	*Хліб білий соц. ф.*	*Хліб висівк. 0,3*	*Булка апетитна 0,3*	*Булка смачна 0,4*
Вихід продукції	146	134	134	124,6	136	148,8
Борошно вищого ґатунку	100	0	0	0	100	100
Борошно 1 ґатунку	0	100	100	88	0	0
Борошно житнє	0	0	0	0	0	0
Висівки	0	0	0	12	0	0
Сіль	1,5	1,5	1,5	1,3	1	1,4
Дріжджі конц.	2	1,2	1,2	1,6	1,2	4
Цукор	1	0	0	0	28	17
Маргарин				8		
Яйце						5
Ванілін				12		
Ізюм						
Часник					2,3	
Олія	3	1,7	0	0,85	0	2

Джерело: розроблено автором

Для запису економіко-математичної моделі введемо позначення:

x_1 – *Батон соціальний, т*; x_2 – *Хліб новий пш.ф. І гат., т*;

x_3 – *Хліб білий соціальний ф., т*; x_4 – *Хліб висівковий 0,3, т*;

x_5 – *Булка апетитна 0,3, т*; x_6 – *Булка смачна 0,4, т*.

Зауважимо, що за даними табл. 3 виріб *Хліб білий соціальний формовий* – збитковий. Використовуючи дані табл. 3 записуємо цільову функцію моделі оптимізації прибутку підприємства в такому вигляді:

$$Z = 330x_1 + 437x_2 - 28x_3 + 770x_4 + 404x_5 + 1934x_6 \to \max$$

Обмеження:

– за попитом:

$10 \le x_1 \le 100$; $100 \le x_2 \le 550$;

$20 \le x_3 \le 30$; $10 \le x_4 \le 50$;

$10 \le x_5 \le 50$; $10 \le x_6 \le 200$.

– за продуктивністю ліній:

$x_2 + x_3 \le 600$ – на потужність печі №1;

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \le 600$ – на потужність печі №3.

– за витратами на сировину (розрахунок всіх коефіцієнтів обмеження наведений у табл. 5):

$$890{,}68x_1 + 1268{,}80x_2 + 1268{,}72x_3 + 1243{,}39x_4 + 957{,}62x_5 + 875{,}19x_6 \le 836511{,}8$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2,. \ldots, 6$$

Таблиця 5

Розрахунок вартості сировини для планових значень випуску виробів

Загальна кількість сировини, т	*Батон соц.*	*Хліб новий пш. ф. І гат.*	*Хліб білий соц. ф.*	*Хліб висівк. 0,3*	*Булка апетитна 0,3*	*Булка смачна 0,4*	Всього	*ціна за 1 т, у.о.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Обсяг виробництва, т	13,2	495	23,76	18	29	133	711,96	
Борошно вищого ґатунку	9,04	0,00	0,00	0,00	21,32	89,38	119,75	1300
Борошно 1 ґатунку	0,00	369,40	17,73	12,71	0,00	0,00	399,85	1700
Висівки	0,00	0,00	0,00	1,73	0,00	0,00	1,73	340
Сіль	0,14	5,54	0,27	0,19	0,21	1,25	7,6	1,2
Дріжджі конц.	0,18	4,43	0,21	0,23	0,26	3,58	8,89	5,6

Продовж. табл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цукор	0,09	0,00	0,00	0,00	5,97	15,19	21,26	6,5
Маргарин	0,00	0,00	0,00	1,16	0,00	0,00	1,16	8,3
Яйце	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,47	4,47	16,25
Ванілін	0,00	0,00	0,00	1,73	0,00	0,00	1,73	97
Часник	0,00	0,00	0,00	0,00	0,49	0,00	0,49	20
Олія	0,27	6,28	0,00	0,12	0,00	1,79	8,46	6,5
Загальна вартість сировини, у.о.	11756,95	628057,37	30144,79	22381,03	27770,89	116400,77	**836511,8**	
Витрати сировини на 1 т хлібобулочних виробів, у.о.	890,68	1268,80	1268,72	1243,39	957,62	875,19	1174,94	

Джерело: розраховано автором

Розв’язок побудованої моделі в електронній таблиці MS Excel наведемо за допомогою звітів. Звіт за результатами дає декілька таблиць. Перші дві таблиці містять значення оптимального плану та цільової функції (рис. 1).

14 Клітинка цільової функції (Максимум)

Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення
$H$6	ЦФ Всього	502803,72	628444,45

19 Клітинки змінних

Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення	Ціле число
$B$3	*Батон соціальний*	13,2	100	Продовжити
$C$3	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	495	344,4037784	Продовжити
$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	23,76	20	Продовжити
$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	18	50	Продовжити
$F$3	*Булка апетитна 0,3*	29	50	Продовжити
$G$3	*Булка смачна 0,4*	133	200	Продовжити

Рис. 1. Значення оптимального плану виробництва хлібобулочних виробів на аркуші «Звіт про результати»
Джерело: розраховано автором

За даними, наведеними на рис. 1, можна дійти висновку: в даних обмеженнях щодо сировини, продуктивності печей та попиту на продукцію максимальний прибуток підприємства складе 628,44 тис. у.о. При цьому оптимальний випуск продукції буде мати такі значення:

Батон соціальний – 100 т, *Хліб новий пш.ф. I гат.* – 344,4 т, *Хліб білий соціальний ф.* – 20 т; *Хліб Дарницький подов.* – 20 т; *Хліб висівковий 0,3* – 50 т; *Булка апетитна 0,3* – 50 т; *Булка смачна 0,4* – 200 т. Одразу можна прийти до першого висновку, що асортимент продукції не зміниться, оскільки є попит на всі види продукції, лише змінюються обсяги продукції відповідно до більш оптимального використання сировини. Загальний обсяг виробленої продукції зросте на 7,4%, загальний прибуток від реалізації продукції зросте на 25%. Якщо врахувати зміни загального доходу від реалізації продукції та собівартості виробленої продукції, то одержимо: зростання доходу на 28,8% та собівартості на 30%. В даному випадку собівартість зростає більшими темпами, аніж дохід, що призведе до незначеного падіння як рентабельності продажів на 0,7% так і рентабельності виробництва на 1,2% порівняно з базовим варіантом виробництва. Проте, даний результат, можна також поліпшити, якщо ввести додаткові обмеження на дохід та собівартість. Це буде розглянуто нижче.

За допомогою третьої таблиці (рис. 2) виявимо дефіцитність сировини та економічну ефективність продукції, що випускається, для підприємства.

Як показують дані рис. 2, стосовно сировини, дефіцитним для підприємства є тільки загальна вартість, яку виділено на сировину, яка використовується для виробництво заданого асортименту продукції. Всі печі мають достатньо значні залишки своєї потужності і задіяні для випуску даного асортименту на 60,7% та 66,7%. Отже, у підприємства є можливість розширити асортимент з метою більш повного використання потужності наявних печей.

З приводу обсягу виробництва заданого асортименту продукції за умов повного задоволення максимального попиту найбільш вигідними для підприємства є такі види продукції: *Батон соціальний*, *Хліб висівковий 0,3, Булка апетитна 0,3*, *Булка смачна 0,4*.

29	Обмеження					
30	**Клітинка**	**Назва**	**Значення клітинки**	**Формула**	**Стан**	**Допуск**
31	$H$39	Загальна вартість сировини Всього	836511,80	$H$39<=$J$39	Зв'язування	0
32	$H$43	Піч №1 Всього	364,4	$H$43<=$J$43	Без зв'язування	235,6
33	$H$44	Піч №3 Всього	400	$H$44<=$J$44	Без зв'язування	200
34	$B$3	*Батон соціальний*	100	$B$3<=$B$5	Зв'язування	0
35	$C$3	*Хліб новий пш. ф. I га*	344,4	$C$3<=$C$5	Без зв'язування	205,6
36	$D$3	*Хліб білий соціальний*	20	$D$3<=$D$5	Без зв'язування	10
37	$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	50	$E$3<=$E$5	Зв'язування	0
38	$F$3	*Булка апетитна 0,3*	50	$F$3<=$F$5	Зв'язування	0
39	$G$3	*Булка смачна 0,4*	200	$G$3<=$G$5	Зв'язування	0
40	$B$3	*Батон соціальний*	100	$B$3>=$B$4	Без зв'язування	90
41	$C$3	*Хліб новий пш. ф. I га*	344,4	$C$3>=$C$4	Без зв'язування	244,4
42	$D$3	*Хліб білий соціальний*	20	$D$3>=$D$4	Зв'язування	0
43	$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	50	$E$3>=$E$4	Без зв'язування	40
44	$F$3	*Булка апетитна 0,3*	50	$F$3>=$F$4	Без зв'язування	40
45	$G$3	*Булка смачна 0,4*	200	$G$3>=$G$4	Без зв'язування	190

Рис. 2. Значення обмежень на аркуші «Звіт про результати»
Джерело: розраховано автором

Відповідно невигідними для підприємства є виробництво такого виду хлібобулочних виробів, як *Хліб білий соціальний ф.*, який є нерентабельним. Його виробництво зумовлено наявним попитом, який потрібно задовольнити. Стосовно такого виду продукції, як *Хліб новий пш.ф. І гат.*, його виробництво зумовлено тільки обмеженнями за сировиною, оскільки перевищує мінімальний попит на 244,4 т, а до верхньої межі попиту є ще можливість виробити 205,6 т.

За допомогою звіту про стійкість можна дослідити стійкість отриманих об’єктивно-обумовлених оцінок правих частин обмежень і на сировину і визначити вплив кожного виду продукції на загальний прибуток від реалізації продукції за умов зміни обсягів виробництва (рис. 3).

Так, для дефіцитного ресурсу «Загальна вартість сировини» маємо ненульову тіньову оцінку рівну 0,34. Тобто при збільшенні суми, що виділяється на сировину на 1 тис. у.о. загальний прибуток від реалізації продукції буде зростати на 340 у.о. При цьому, визначена таким чином, рентабельність вартості сировини буде незмінною, якщо загальна вартість сировини буде змінюватися в межах [1375555,8-214402,14;1375555,8+356559,1], тобто від 1161153,66 у.о. до 1732114,9 у.о. Усі інші види обмежень за обладнанням не є дефіцитними, тому двоїсті оцінки дорівнюють нулю.

6 Клітинки змінних

	Клітинка	Назва	Остаточне Значення	Зменшена Вартість	Цільова функція Коефіцієнт	Припустиме Збільшення	Припустиме Зменьшення
9	$B$3	*Батон соціальний*	100	23,2333899	330	1E+30	23,23338992
10	$C$3	*Хліб новий пш. ф. І гат.*	344,4	0	437	33,0967943	437
11	$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	20	-464,9716	-28	464,971598	1E+30
12	$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	50	341,752501	770	1E+30	341,7525013
13	$F$3	*Булка апетитна 0,3*	50	74,1783228	404	1E+30	74,17832282
14	$G$3	*Булка смачна 0,4*	200	1632,56649	1934	1E+30	1632,566491

16 Обмеження

	Клітинка	Назва	Остаточне Значення	Тінь Ціна	Обмеження Права сторона	Припустиме Збільшення	Припустиме Зменьшення
19	$H$39	Загальна вартість сировини Всього	836511,8	0,34441917	836511,8	260861,054	310100,1889
20	$H$43	Піч №1 Всього	364,4	0	600	1E+30	235,5962216
21	$H$44	Піч №3 Всього	400	0	600	1E+30	200

Рис. 3. Аркуш «Звіт про стійкість»
Джерело: розраховано автором

Стосовно асортименту продукції: нерентабельною продукцією є тільки *Хліб білий соціальний ф*. Якщо буде зростати мінімальна межа попиту на даний виріб, то загальний прибуток від реалізації продукції з кожною тонною буде зменшуватися на 464,97 у.о. Причому така невигідна для підприємства з економічної точки зору ситуація буде спостерігатися, якщо прибуток від реалізації даного виду виробу буде змінюватися в межах [-28-∞; -28+464,97], тобто [-∞; 436,97]. Отже, даний вид продукції стане привабливим для підприємства, коли він почне давати прибуток від реалізації на рівні виробу *Хліб новий пш. ф. І гат*. Стосовно останнього виробу: він є достатньо «еластичним» для підприємства і не вимагає оптимізації у виробництві, тобто будь-яка зміна у плануванні виробництва даного виду продукції на 1 т не принесе змін у загальному прибутку. Таке становище буде спостерігатися, якщо прибуток від реалізації виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.* буде змінюватися в межах [437-437; 437+33,1] тобто [0; 470,1].

За звіту виявлено, що найвигідніший для підприємства вид продукції: *Булка смачна 0,4* – зростання обсягів виробництва даного хлібобулочного виробу призведе до зростання загального прибутку на 1934 у.о. з кожної додатково виробленої тони. Аналогічно зростання обсягів виробництва таких видів продукції як *Хліб висівковий 0,3*; *Булка апетитна 0,3* та *Батон соціальний* на 1 т дозволить підвищити загальний прибуток від реалізації продукції на 341,75 у.о., 74,18 у.о. та 23,23 у.о. відповідно, якщо всі інші умови залишаться незмінними. Таке можна стверджувати, якщо прибуток від реалізації цих видів продукції буде збільшуватися до нескінченості, а зменшувати можна не більше ніж на зазначену величину у стовпці «Зменшена вартість» для кожного виробу відповідно.

Використовуючи алгоритм, наведений для задачі із трьома змінними, записуємо канонічну форму поставленої задачі:

$$890{,}68x_1 + 1268{,}80x_2 + 1268{,}72x_3 + 1243{,}39x_4 + 957{,}62x_5 + 875{,}19x_6 + x_7 = 836511{,}8$$

$$x_2 + x_3 + x_8 = 600 \qquad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_9 = 600$$

$$x_1 - x_{10} + y_1 = 10 \qquad x_1 + x_{11} = 100$$

$$x_2 - x_{12} + y_2 = 100 \qquad x_2 + x_{13} = 550$$

$$x_3 - x_{14} + y_3 = 20 \qquad x_3 + x_{15} = 30$$

$$x_4 - x_{16} + y_4 = 10 \qquad x_4 + x_{17} = 50$$

$$x_5 - x_{18} + y_5 = 10 \qquad x_5 + x_{19} = 50$$

$$x_6 - x_{20} + y_6 = 10 \qquad x_6 + x_{21} = 200$$

$$Z - 330x_1 - 437x_2 + 28x_3 - 770x_4 - 404x_5 - 1934x_6 = 0$$

Потрібно зауважити, що з економічної точки зору додаткові змінні в оптимальному плані будуть дорівнювати залишкам сировини (x_7) або величині невикористаної потужності обладнання (x_8, x_9). Стосовно меж попиту на продукцію, то частина змінних (x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{16}, x_{18}, x_{20}) будуть мати значення, що показують обсяг виробництва відповідного хлібобулочного виробу, який більше за мінімальну межу попиту, а значення таких змінних як x_{11}, x_{13}, x_{15}, x_{17}, x_{19}, x_{21} – свідчать про те, що виробництва зазначеного виду продукції не досягає верхньої межі попиту. Таким чином, перша симплекс таблиця буде містити 16 рядків плюс М-рядок та 21 стовпець для змінних (табл. 6).

Таблиця 6

Перша редукована симплекс-таблиця до задачі про планування виробництва хлібобулочних виробів

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	Права частина
x_7	890,68	1268,80	1268,72	1243,39	957,62	875,19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	836511,80
x_8	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	600
x_9	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	600
y_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
x_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
y_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
x_{13}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	550
y_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	20
x_{15}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	30
y_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	10
x_{17}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	50
y_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10
x_{19}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	50
y_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	10
x_{21}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	200
Z	-330	-437	28	-770	-404	-1934	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-M	-M	-M	-M	-M	-M	-M	0	0	0	M	0	M	0	M	0	M	0	M	0	M	0	-160

Джерело: побудовано автором

Тобто при зростанні лише удвічі кількості заданих видів продукції ми отримали утричі більше змінних для розв’язання задачі ітераційним симплекс-методом шляхом побудови симплекс-таблиць. В даному випадку ще можна реалізувати ітераційний симплекс-метод в електронній таблиці і розв’язати поставлену задачу, проте, на практиці, коли асортимент виробленої продукції сягає декількох десятків для малих підприємств і декількох сотень і навіть тисяч видів продукції для великих підприємств, реалізувати алгоритм симплекс-методу становиться практично нереально.

Для використання другого способу знаходження оптимального розв’язку двоїстої задачі за допомогою формули (1) необхідно знайти обернену матрицю. За правилом, обернена матриця обчислюється для матриці D, складеної з векторів-стовпців, які є базисними в останній симплекс-таблиці, що містить оптимальний розв’язок поставленої задачі. З цією метою пропонується наступний алгоритм знаходження упорядкування стовпців першої симплекс-таблиці для запису матриці D та вектор-рядка коефіцієнтів цільової функції $\bar{C}_{\text{баз}}$.

За звітами виявляємо рядки, які залишаться в базисі, оскільки відповідні їм ресурси не є дефіцитними: це рядки x_8 та x_9, які відповідають обмеженням на потужності печей. Весь асортимент продукції виробляється в межах заданого попиту, тому всі штучні змінні підуть із базису, а на їх місце прийдуть відповідні змінні асортименту продукції. Якщо всі змінні, які за звітом про результати, дорівнюють верхній межі попиту, то всі додаткові змінні у відповідних рівностях повинні дорівнювати нулю. В даному випадку, це стосується таких базисних змінних як x_{11}, x_{17}, x_{19}, x_{21}. На зміну їм прийдуть змінні, які будуть показувати на скільки більше від значень нижньої межі попиту виробляється відповідного виду продукції. Для нерентабельного виробу навпаки значення змінної дорівнює ніжній межі попиту, тому змінна не вийде з базису. Також, не піде з базису змінна x_{13}, оскільки відповідний їй вид продукції має значення, яке не дорівнює верхній межі попиту. Залишилась одна змінна x_{12}, яка міняє x_7, що відповідає дефіцитному ресурсу, який заданий як загальна вартість сировини. Зведемо усе вищесказане у таблицю відповідності (табл. 7).

Таблиця 7

Заміна змінних в базисі останньої симплекс-таблиці відповідно до першої симплекс-таблиці

Базис першої симплекс-таблиці	Базис останньої симплекс-таблиці	Пояснення
x_8, x_9	x_8, x_9	Недефіцитні ресурси
$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$	Основні змінні, що мають ненульове значення в оптимальному розв'язку замінюють відповідні їм штучні
$x_{11}, x_{17}, x_{19}, x_{21}$	$x_{10}, x_{16}, x_{18}, x_{20}$	Основна змінна дорівнює максимальному попиту, тому приходить змінна із рівняння нижньої межі попиту
x_{13}	x_{13}	Не міняється, оскільки основна змінна не дорівнює максимальній межі попиту
x_{15}	x_{15}	Не міняється, оскільки основна змінна дорівнює мінімальному попиту
x_7	x_{12}	Остання змінна

Джерело: розроблено автором

Отже, можна записати матрицю *D* з векторів-стовпців із першої симплекс-таблиці (табл. 6), що відповідають базисним змінним останньої симплекс-таблиці (табл. 8).

Таблиця 8

Матриця *D*, складена з векторів-стовпців першої симплекс-таблиці згідно порядку базисних змінних останньої симплекс-таблиці

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_{12} & x_8 & x_9 & x_1 & x_{10} & x_2 & x_{13} & x_3 & x_{15} & x_4 & x_{16} & x_5 & x_{18} & x_6 & x_{20}
\end{array} \\
D = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 890,68 & 0 & 1268,80 & 0 & 1268,72 & 0 & 1243,39 & 0 & 957,62 & 0 & 875,19 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

Джерело: розраховано автором

Відповідно до отриманої матриці D обчислимо обернену матрицю і одержимо наступне (табл. 9).

Таблиця 9

Обернена матриця D^{-1}

$$
D^{-1} = \begin{vmatrix}
0{,}0008 & 0 & 0 & 0 & -0{,}702 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0{,}98 & 0 & -0{,}755 & 0 & -0{,}69 \\
-0{,}0008 & 1 & 0 & 0 & 0{,}702 & 0 & 0 & -0{,}00007 & 0 & 0 & 0{,}98 & 0 & 0{,}755 & 0 & 0{,}69 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0008 & 0 & 0 & 0 & -0{,}702 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0{,}98 & 0 & -0{,}755 & 0 & -0{,}69 \\
-0{,}0008 & 0 & 0 & 0 & 0{,}702 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0{,}98 & 0 & 0{,}755 & 0 & 0{,}69 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{vmatrix}
$$

Джерело: розраховано автором

Тепер використовуючи формулу (1) можна обчислити вектор оптимального розв'язку двоїстої задачі:

$$Y^* = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 330 \quad 0 \quad 437 \quad 0 \quad -28 \quad 0 \quad 770 \quad 0 \quad 404 \quad 0 \quad 1934 \quad 0) * D^{-1} =$$

$$= (0{,}344 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 23{,}23 \quad 0 \quad 0 \quad -465 \quad 0 \quad 0 \quad 341{,}74 \quad 0 \quad 74{,}065 \quad 0 \quad 1632{,}47)$$

Отриманий набір тіньових цін повністю співпадає із результатами, наведеними на рис. 3 на аркуші «Звіт про стійкість». Отже, отримали необхідну матрицю, що дозволить провести більш глибокий аналіз розв'язку задачі оптимізації випуску продукції в рамках заданої вартості сировини (табл. 10).

Як вже було показано вище, при збільшенні загальної вартості сировини на 1000 у.о. (стовпець x_7) загальний прибуток від реалізації продукції зросте на 344 у.о. і це відобразиться таким чином на виробництві: збільшиться виробництво виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.* на 0,8 т, що вимагатиме збільшення використання потужності печі №1 на 0,8 т. Значення x_{12} та x_{13} свідчать про відповідне зростання та зменшення залишків відносно мінімальної та максимальної меж попиту на даний виріб.

Таблиця 10

Остання симплекс-таблиця, що включає тільки обернену матрицю

Базис	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
x_{12}	0,0008	0	0	0	-0,702	-1	0	-1	0	0	-0,98	0	-0,755	0	-0,69
x_8	-0,0008	1	0	0	0,702	0	0	-0,00007	0	0	0,98	0	0,755	0	0,69
x_9	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1
x_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0,0008	0	0	0	-0,702	0	0	-1	0	0	-0,98	0	-0,755	0	-0,69
x_{13}	-0,0008	0	0	0	0,702	0	1	1	0	0	0,98	0	0,755	0	0,69
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
Z	0,344	0	0	0	23,2	0	0	–465	0	0	341,7	0	74,1	0	1632,5
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}

Джерело: побудовано автором

Всі інші об’єктивно-обумовлені оцінки стосуються змін обсягів виробництва хлібобулочних виробів: так зростання загального прибутку від реалізації продукції на 23,2 у.о. (стовпець x_{11}) відбудеться, якщо зросте обсяг виробництва виробу *Батон соціальний* на 1 т за рахунок зменшення виробництва виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.* на 0,7 т, при цьому збільшиться використання потужності печі №3 на 1 т/р та зменшиться відповідно використання потужності печі №1 на 0,7 т/р.

Аналогічно найбільше зростання прибутку від реалізації продукції на 1632,5 у.о. (стовпець x_{21}) відбудеться за рахунок зростання обсягів виробництва виробу *Булка смачна 0,4* на 1 т за рахунок зменшення виробництва виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.* на 0,69 т і відповідного збільшення використання потужності печі №3 на 1 т/р та зменшення використання потужності печі №1 на 0,69 т/р. Для нерентабельного виду продукції *Хліб білий соціальний ф.* (стовпець x_{14}) можна сказати, що при збільшенні його виробництва на 1 т, загальний прибуток від реалізації продукції знизиться на 465 у.о. за рахунок зниження виробництва виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.* на 1 т.

Також, за допомогою побудованої оберненої матриці D^{-1} можна дослідити загальний вплив на шуканий оптимальний прибуток від реалізації продукції одночасної зміни правих частин системи обмежень. Тобто, збільшимо, наприклад, загальну вартість сировини на 15000 у.о., скоротимо потужність печей №1 до 400 т/р та №3 до 420 т/р, змінимо межі попиту на хлібобулочні вироби таким чином: збільшимо максимальні межі попиту на виріб *Булка смачна 0,4* до 220 т; зменшимо на *Хліб висівковий* до 40 т, збільшимо мінімальну межу попиту на *Хліб білий соціальний ф.* до 28 т. Тобто новий вектор стовпець правих частин системи обмежень буде мати такий вигляд (табл. 11).

Таблиця 11

Значення змін правих частин системи обмежень задачі про планування виробництва хлібобулочних виробів

Показники		Вектор-стовпець		Зміни		Нові значення обмежень
загальна вартість сировини, у.о.		$b_1 + \Delta b_1$		836511,80 + 15000		851511,8
Потужність печі №1		$b_2 + \Delta b_2$		600 – 200		400
Потужність печі №3		$b_3 + \Delta b_3$		600 – 180		420
Межі попиту на продукцію, т						
Батон соціальний: min		$b_4 + \Delta b_4$		10		10
max		$b_5 + \Delta b_5$		100		100
Хліб новий пш. ф. І гат.: min		$b_6 + \Delta b_6$		100		100
max		$b_7 + \Delta b_7$		550		550
Хліб білий соціальний ф.: min	$b =$	$b_8 + \Delta b_8$	=	20 + 8	=	28
max		$b_9 + \Delta b_9$		30		30
Хліб висівковий 0,3: min		$b_{10} + \Delta b_{10}$		10		10
max		$b_{11} + \Delta b_{11}$		50 – 10		40
Булка апетитна 0,3: min		$b_{12} + \Delta b_{12}$		10		10
max		$b_{13} + \Delta b_{13}$		50		50
Булка смачна 0,4: min		$b_{14} + \Delta b_{14}$		10		10
max		$b_{15} + \Delta b_{15}$		200 + 20		220

Джерело: розроблено автором

Таким чином, новий оптимальний план виробництва продукції за умов одночасної зміни запасів усіх заданих обмежень (табл. 12) отримаємо множенням знайденої матриці D^{-1} (табл. 9) на вектор-стовпець нових значень обмежень (табл. 11). Отриманий новий оптимальний розв'язок X*= (100; 344,23; 28; 40; 50; 220; 0; 27,77; 10; 90; 0; 244,23; 205,77; 0; 2; 30; 0; 40; 0; 210; 0) має тільки невід'ємні значення, значить і оптимальний план двоїстої задачі залишається таким же:

Y* = (0,344   0   0   0   23,23   0   0   –465   0   0   341,74   0   74,065   0   1632,47).

Таблиця 12

Базис	Показники	Значення
x_8	Залишки потужності печі №1, т/р	27,77
x_9	Залишки потужності печі №3, т/р	10
x_1	Кількість виробленого виробу *Батон соціальний*, т	100
x_{10}	Вироблено більше виробу *Батон соціальний* за мінімальну межу попиту, т	90
x_2	Кількість виробу *Хліб новий пш.ф. I гат.*, т	344,23
x_{12}	Вироблено більше виробу *Хліб новий пш.ф. I гат.* за мінімальну межу попиту, т	244,23
x_{13}	Вироблено менше виробу *Хліб новий пш.ф. I гат.* за максимальну межу попиту, т	205,77
x_3	Кількість виробу *Хліб білий соціальний ф.*, т.	28
x_{15}	Вироблено менше виробу *Хліб білий соціальний ф.* за максимальну межу попиту, т	2
x_4	Кількість виробу *Хліб висівковий 0,3*, т	40
x_{16}	Вироблено більше виробу *Хліб висівковий 0,3* за мінімальну межу попиту, т	30
x_5	Кількість виробу *Булка апетитна 0,3*, т	50
x_{18}	Вироблено більше виробу *Булка апетитна 0,3* за мінімальну межу попиту, т	40
x_6	Кількість виробу *Булка смачна 0,4*, т	220
x_{20}	Вироблено більше виробу *Булка смачна 0,4* за мінімальну межу попиту, т	210

Джерело: розраховано автором

Отже, можна обчислити, як зміниться загальний максимальний прибуток підприємства: ΔZмах $= \sum_{i=1}^{15} \Delta b_i y_i$ = 15000 × 0,344 + (–200) × 0 + (–180) × 0 + + 0 × 0 + 0 × 23,23 + + 0 × 0 + 0 × 0 + 8 × (–465) + 0 × 0 + 0 × 0 + (–10) × 341,74 + + 0 × 0 + 0 × 74,065 + 0 × 0 + 20 × 1632,47 = 5166,28 у.о, тобто за таким змін в обмеженнях загальний прибуток від реалізації продукції зросте на 5166,28 у.о.

Таким чином, за допомогою побудованої оберненої матриці проведений більш глибокий економічний аналіз отриманого розв’язку та зроблений висновок щодо впливу на загальний прибуток від реалізації продукції одночасної зміни декількох обмежень. Проте, для такого типу розв’язку, коли дефіцитним є тільки один вид сировини, все достатньо однозначно. Розглянемо дану задачу, якщо дефіцитним буде декілька видів сировини. Вище було зазначено, що отриманий розв’язок оптимізує асортимент виробництва в рамках заданої вартості використовуваної сировини, проте при збільшенні прибутку підприємства, більшими темпами збільшуються і дохід і собівартість, що призводить до зменшення рентабельності як продажів продукції, так і виробництва. Додамо обмеження на собівартість і розв'яжемо задачу оптимізації виробництва хлібобулочних виробів за умов максимізації прибутку від реалізації продукції в рамках заданої загальної вартості сировини та не збільшуючи собівартість продукції, яку було отримано для вихідного варіанту, тобто додамо обмеження на собівартість у вигляді:

$2760x_1 + 1533x_2 + 1558x_3 + 2830x_4 + 3796x_5 + 4666x_6 \leq 1613887{,}08$.

Також змінимо задану потужність обох печей:

$x_2 + x_3 \leq 380$ – на потужність печі №1;

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 250$ – на потужність печі №3.

$x_j \geq 0, j = 1, 2,. \ldots, 6$.

Наведемо розв'язок зміненої задачі у вигляді звітів, отриманих в результаті розв'язання задачі в електронній таблиці MS Excel за допомогою вбудованої надбудови «Пошук розв'язання» (рис. 4). Як свідчать дані таблиць, наведених на рис. 4, можна дійти висновку, що в результаті оптимізації загальний прибуток від реалізації продукції збільшився на 11,3%, дохід збільшився на 2,7%, стримуючим фактором виявилася собівартість випущеної продукції, що призвело до зменшення загального випуску продукції на 14,1%, проте зросла рентабельність виробництва та продажів пропонованого асортименту продукції на 3,5% та 2% відповідно. Оскільки собівартість тепер стримує виробництво, то всі ресурси використовуються для виробництва найбільш вигідного для підприємства виробу *Булка смачна 0,4*, яку рекомендується виробляти максимально, вичерпуючи повністю весь заданий попит. До компанії невигідних видів продукції, з точки зору отримання найбільшого прибутку від реалізації продукції і обмеження на собівартість, потрапили *Батон соціальний* та *Булка апетитна 0,3*. Тобто виявилися, що дані види продукції, які хоча і рентабельні на відміну від продукції *Хліб білий соціальний ф.*, проте є достатньо витратними для підприємства у порівнянні з іншими хлібобулочними виробами.

Клітинка цільової функції (Максимум)

Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення
$H$6	ЦФ Всього	502803,72	559630,41

Клітинки змінних

Клітинка	Назва	Вихідне значення	Остаточне значення	Ціле число
$B$3	*Батон соціальний*	13,2	10	Продовжити
$C$3	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	495	360	Продовжити
$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	23,76	20	Продовжити
$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	18	11,338	Продовжити
$F$3	*Булка апетитна 0,3*	29	10	Продовжити
$G$3	*Булка смачна 0,4*	133	200	Продовжити

Обмеження

Клітинка	Назва	Значення клітинки	Формула	Стан	Допуск
$H$39	Загальна вартість сировини Всього	689762,90	$H$39<=$J$39	Без зв'язування	146748,9
$H$43	Піч №1 Всього	380	$H$43<=$J$43	Зв'язування	0
$H$44	Піч №3 Всього	231,34	$H$44<=$J$44	Без зв'язування	18,66
$H$8	Собівартість випуску продукції Всього	1613887,08	$H$8<=$K$8	Зв'язування	0
$B$3	*Батон соціальний*	10	$B$3<=$B$5	Без зв'язування	90
$C$3	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	360	$C$3<=$C$5	Без зв'язування	190
$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	20	$D$3<=$D$5	Без зв'язування	10
$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	11,34	$E$3<=$E$5	Без зв'язування	38,66
$F$3	*Булка апетитна 0,3*	10	$F$3<=$F$5	Без зв'язування	40
$G$3	*Булка смачна 0,4*	200	$G$3<=$G$5	Зв'язування	0
$B$3	*Батон соціальний*	10	$B$3>=$B$4	Зв'язування	0
$C$3	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	360	$C$3>=$C$4	Без зв'язування	260
$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	20	$D$3>=$D$4	Зв'язування	0
$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	11,34	$E$3>=$E$4	Без зв'язування	1,34
$F$3	*Булка апетитна 0,3*	10	$F$3>=$F$4	Зв'язування	0
$G$3	*Булка смачна 0,4*	200	$G$3>=$G$4	Без зв'язування	190

Рис. 4 Аркуш «Звіт про результати» до задачі
із зміненими обмеженнями на сировину
Джерело: розраховано автором

Для даної задачі маємо два види дефіцитних ресурсів, що стримують виробництво асортименту виробів: це собівартість та потужність печі №1.

Розглянемо звіт про стійкість отриманих об’єктивно-обумовлених оцінок ресурсів та рентабельності виробленої продукції (рис. 5).

Клітинки змінних

Клітинка	Назва	Остаточне Значення	Зменшена Вартість	Цільова функція Коефіцієнт	Припустиме Збільшення	Припустиме Зменшення
$B$3	*Батон соціальний*	10	-420,95	330	420,954064	1E+30
$C$3	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	360	0	437	1E+30	19,89399293
$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	20	-471,8	-28	471,80212	1E+30
$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	11,34	0	770	36,7253751	431,6304348
$F$3	*Булка апетитна 0,3*	10	-628,83	404	628,833922	1E+30
$G$3	*Булка смачна 0,4*	200	664,45	1934	1E+30	664,4522968

Обмеження

Клітинка	Назва	Остаточне Значення	Тінь Ціна	Обмеження Права сторона	Припустиме Збільшення	Припустиме Зменшення
$H$39	Загальна вартість сирови	689762,9	0	836511,8	1E+30	146748,9035
$H$43	Піч №1 Всього	380	19,8939929	380	2,47037182	34,45069798
$H$44	Піч №3 Всього	231,34	0	250	1E+30	18,66180919
$H$8	Собівартість випуску продукції Всього	1613887,08	0,27208481	1613887,08	52812,92	3787,08

Рис. 5 Аркуш «Звіт про стійкість» до задачі
зі зміненими обмеженнями на сировину
Джерело: розраховано автором

Як показують дані на рис. 5 подальше збільшення обсягу виробництва на 1 т таких видів продукції як *Батон соціальний, Хліб білий соціальний ф.* та *Булка апетитна 0,3* за умов незмінності собівартості буде призводити до зменшення прибутку на 420,95 у.о., на 471,8 у.о. на 628,84 у.о. відповідно. При цьому очевидно, що найбільш невигідною в даних умовах став виріб *Булка апетитна 0,3* на відміну від нерентабельного виробу *Хліб білий соціальний ф*. Отже, додавання нового обмеження на собівартість дозволило виявити, що такий виріб як *Булка апетитна 0,3*, хоча і призводила до зростання прибутку від реалізації продукції за результатами розв'язання задачі в попередній постановці задачі, проте, з іншого боку, виявилося, що більш випереджаючими темпами зростала її собівартість виробництва. Лише зростання обсягів виробництва виробу *Булка смачна 0,4* на 1 т призведе до зростання загального прибутку від реалізації продукції на 664,45 у.о. Зміни обсягів виробництва виробів *Хліб новий пш. ф. 1 гат.* та *Хліб висівковий 0,3* не впливають на загальний прибуток від реалізації продукції. Крім цього, зростання потужності печі №1 на 1 т/р призведе до загального зростання прибутку на 19,89 у.о., а збільшення обмеження на собівартість на 1 у.о. призведе до зростання загального прибутку на 0,27 у.о.

Таким чином, отримуємо аналог рентабельності виробництва, що в даному випадку менша за рентабельність загальної вартості сировини, яка мала значення 0,34. Потужність печі №3 та загальна вартість сировини в цих умовах виявилися недефіцитними і мають залишки.

Побудуємо матрицю D для поставленої задачі. Для цього використаємо аналогічний алгоритм, як і задачі у попередній постановці. Записуємо канонічну форму:

$890,68\,x_1 + 1268,80\,x_2 + 1268,72\,x_3 + 1243,39\,x_4 + 957,62\,x_5 + 875,19\,x_6 + x_7 = 836511,8$

$x_2 + x_3 + x_8 = 380$ $\quad$ $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_9 = 250$

$x_1 - x_{10} + y_1 = 10$ $\quad$ $x_1 + x_{11} = 100$

$x_2 - x_{12} + y_2 = 100$ $\quad$ $x_2 + x_{13} = 550$

$x_3 - x_{14} + y_3 = 20$ $\quad$ $x_3 + x_{15} = 30$

$x_4 - x_{16} + y_4 = 10$ $\quad$ $x_4 + x_{17} = 50$

$x_5 - x_{18} + y_5 = 10$ $\quad$ $x_5 + x_{19} = 50$

$x_6 - x_{20} + y_6 = 10$ $\quad$ $x_6 + x_{21} = 200$

$2760x_1 + 1533x_2 + 1558x_3 + 2830x_4 + 3796x_5 + 4666x_6 + x_{21} = 1613887,08$

$Z - 330x_1 - 437x_2 + 28x_3 - 770x_4 - 404x_5 - 1934x_6 = 0$

Для симплекс-таблиці, побудованої для даної канонічної форми, характерно вже 17 рядків плюс М-рядок та 22 стовпців для основних та додаткових змінних (табл. 13).

Знаходимо порядок векторів-стовпців, які будуть складати останню симплекс-таблицю з оптимальним планом (табл. 14). По-перше, за звітами, виявляємо рядки, які не поміняються, оскільки відповідні їм ресурси не є дефіцитними: це рядки x_7 та x_9, які відповідають обмеженням на загальну вартість сировини та потужність печі №3. Всі штучні змінні міняються на відповідні базисні змінні. Також лише значення змінної x_{21} за звітом про результати, дорівнює верхній межі попиту, тому $x_{21} = 0$, виходить із базису і на її місце приходить змінна x_{20}, яка буде мати значення, що показує на скільки більше від значень нижньої межі попиту виробляється даного виду продукції.

Таблиця 13

Перша редукована симплекс-таблиця до задачі про планування виробництва хлібобулочних виробів

зі зміненими обмеженнями на сировину

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	Права частина
x_7	890,68	1268,80	1268,72	1243,39	957,62	875,19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	836511,80
x_8	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	600
x_9	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	600
y_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
x_{11}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
y_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
x_{13}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	550
y_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	20
x_{15}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	30
y_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	10
x_{17}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	50
y_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	10
x_{19}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	50
y_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	10
x_{21}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	200
x_{22}	2760	1533	1558	2830	3796	4666	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1613887,08
Z	-330	-437	28	-770	-404	-1934	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-M	-M	-M	-M	-M	-M	-M	0	0	0	M	0	M	0	M	0	M	0	M	0	M	0	0	-160

Джерело: побудовано автором

Таблиця 14

Заміна змінних в останній симплекс-таблиці відповідно до першої симплекс-таблиці

Базис першої симплекс-таблиці	Базис останньої симплекс-таблиці	Пояснення
x_7, x_9	x_7, x_9	Недефіцитні ресурси
x_8, x_{22}	x_{12}, x_{16} або x_{16}, x_{12}	Дефіцитні ресурси
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6	Задані основні змінні, що мають ненульове значення в оптимальному розв'язку замінюють відповідні їм штучні
x_{21}	x_{20}	Основна змінна дорівнює максимальному попиту, тому приходить змінна із рівняння нижньої межі попиту
x_{13}, x_{17}	x_{13}, x_{17}	Не міняється, оскільки основна змінна не дорівнює максимальній межі попиту
x_{11}, x_{15}, x_{19}	x_{11}, x_{15}, x_{19}	Не міняється, оскільки основна змінна дорівнює мінімальному попиту

Джерело: розроблено автором

Для всіх хлібобулочних виробів, значення яких дорівнює ніжній межі попиту відповідна змінна не вийде з базису, тобто залишаються x_{11}, x_{15}, x_{19} і додаткові змінні з відповідних рівнянь x_{10}, x_{14} та x_{18} будуть дорівнювати нулю. Також, враховуючи уже все вищевикладене не міняються і базисні додаткові змінні x_{13}, x_{17}, оскільки відповідні їм види продукції в оптимальному плані мають значення, яке не дорівнює верхній межі попиту. Дефіцитним ресурсам відповідають дві змінні x_8 та x_{22}, яких в базисі не буде і замість них повинні прийти x_{12} та x_{16}.

Отже, однозначно обрати змінну як в попередньому випадку неможливо, тому проведемо дослідження: побудуємо два варіанта матриці D, знайдемо для них обернені, обчислимо за формулою (1) двоїсті оцінки та порівняємо.

У першому випадку, записуємо матрицю D з векторів-стовпців із першої симплекс-таблиці (табл. 13), що відповідають базисним змінним останньої симплекс-таблиці в такому порядку (табл. 15).

Відповідно до отриманої матриці D обчислимо обернену матрицю і одержимо наступне (табл. 16).

Отриману матрицю записуємо аналогічно у вигляді останньої симплекс-таблиці, яка включає тільки обернену матрицю (табл. 17).

Таблиця 15

Матриця *D*, складена з векторів-стовпців першої симплекс-таблиці згідно порядку базисних змінних останньої симплекс-таблиці

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} x_7 & x_{12} & x_9 & x_1 & x_{11} & x_2 & x_{13} & x_3 & x_{15} & x_4 & x_{17} & x_5 & x_{18} & x_6 & x_{20} & x_{16} \end{array} \\
D = & \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 890{,}68 & 0 & 1268{,}8 & 0 & 1268{,}72 & 0 & 1243{,}39 & 0 & 957{,}62 & 0 & 875{,}19 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2760 & 0 & 1533 & 0 & 1558 & 0 & 2830 & 0 & 3796 & 0 & 4666 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

Джерело: побудовано автором

Таблиця 16

Обернена матриця D^{-1}

$$
D^{-1} = \begin{vmatrix}
1 & -595{,}26 & 0 & 321{,}957 & 0 & 0 & 0 & 11{,}066 & 0 & 0 & 0 & 710{,}196 & 0 & 0 & 1174{,}863 & -0{,}439 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}542 & 1 & -0{,}025 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0088 & 0 & 0 & 0 & 0{,}341 & 0 & 0 & 0{,}649 & -0{,}0004 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0{,}542 & 0 & -0{,}975 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0088 & 0 & 0 & 0 & -1{,}341 & 0 & 0 & -1{,}649 & 0{,}0004 \\
0 & 0{,}542 & 0 & 0{,}975 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0088 & 0 & 0 & 1 & 1{,}341 & 0 & 0 & 1{,}649 & -0{,}0004 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -0{,}542 & 0 & -0{,}975 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0088 & 0 & -1 & 0 & -1{,}341 & 0 & 0 & -1{,}649 & 0{,}0004
\end{vmatrix}
$$

Джерело: розраховано автором

Для порівняння, запишемо матрицю *D* з векторів-стовпців із першої симплекс-таблиці (табл. 13), відповідно до базисних змінних останньої симплекс-таблиці в другому порядку (табл. 18).

Таблиця 17

Остання симплекс-таблиця, що включає тільки обернену матрицю

Базис	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_2	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}
x_7	1	-595,26	0	321,957	0	0	0	11,066	0	0	0	710,196	0	0	1174,863	-0,439
x_{12}	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_9	0	0,542	1	-0,025	0	0	0	0,0088	0	0	0	0,341	0	0	0,649	-0,0004
x_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{13}	0	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	-0,542	0	-0,975	0	0	0	-0,0088	0	0	0	-1,341	0	0	-1,649	0,0004
x_{17}	0	0,542	0	0,975	0	0	0	0,0088	0	0	1	1,341	0	0	1,649	-0,0004
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
x_{16}	0	-0,542	0	-0,975	0	0	0	-0,0088	0	-1	0	-1,341	0	0	-1,649	0,0004
Z	0	19,89	0	-420,95	0	0	0	-471,8	0	0	0	-628,8	0	0	664,45	0,272
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}

Джерело: побудовано автором

Таблиця 18

Матриця *D*, складена з векторів-стовпців першої симплекс-таблиці згідно порядку базисних змінних останньої симплекс-таблиці

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccc}
x_7 & x_{16} & x_9 & x_1 & x_{11} & x_2 & x_{13} & x_3 & x_{15} & x_4 & x_{17} & x_5 & x_{18} & x_6 & x_{20} & x_{12}
\end{array} \\
D = \left|\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 890,68 & 0 & 1268,8 & 0 & 1268,72 & 0 & 1243,39 & 0 & 957,62 & 0 & 875,19 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2760 & 0 & 1533 & 0 & 1558 & 0 & 2830 & 0 & 3796 & 0 & 4666 & 0 & 0
\end{array}\right|
\end{array}
$$

Джерело: розраховано автором

До отриманої матриці *D* обчислимо обернену матрицю (табл. 19).

Таблиця 19

Обернена матриця D^{-1}

$$
D^{-1} = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|ccccccccc}
1 & -595{,}26 & 0 & 321{,}957 & 0 & 0 & 0 & 11{,}066 & 0 & 0 & 0 & 710{,}196 & 0 & 0 & 1174{,}863 & -0{,}439 \\
0 & -0{,}542 & 0 & -0{,}975 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0088 & 0 & -1 & 0 & -1{,}341 & 0 & 0 & -1{,}649 & 0{,}0004 \\
0 & 0{,}542 & 1 & -0{,}025 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0088 & 0 & 0 & 0 & 0{,}341 & 0 & 0 & 0{,}649 & -0{,}0004 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0{,}542 & 0 & -0{,}975 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0088 & 0 & 0 & 0 & -1{,}341 & 0 & 0 & -1{,}649 & 0{,}0004 \\
0 & 0{,}542 & 0 & 0{,}975 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0088 & 0 & 0 & 1 & 1{,}341 & 0 & 0 & 1{,}649 & -0{,}0004 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right|
$$

Джерело: розраховано автором

Аналогічно записуємо отриману матрицю у вигляді останньої симплекс-таблиці (табл. 20).

Таблиця 20

Остання симплекс-таблиця, що включає тільки обернену матрицю

Базис	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_2	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}
x_7	1	-595,26	0	321,957	0	0	0	11,066	0	0	0	710,196	0	0	1174,9	-0,439
x_{16}	0	-0,542	0	-0,975	0	0	0	-0,0088	0	-1	0	-1,341	0	0	-1,649	0,0004
x_9	0	0,542	1	-0,025	0	0	0	0,0088	0	0	0	0,341	0	0	0,649	-0,0004
x_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{13}	0	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	-0,542	0	-0,975	0	0	0	-0,0088	0	0	0	-1,341	0	0	-1,649	0,0004
x_{17}	0	0,542	0	0,975	0	0	0	0,0088	0	0	1	1,341	0	0	1,649	-0,0004
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
x_{12}	0	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
Z	0	19,89	0	-420,95	0	0	0	-471,8	0	0	0	-628,8	0	0	664,5	0,272
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}

Джерело: побудовано автором

При порівнянні значень табл. 17 та 20 виявилося, що таблиці відрізняються одна від одної тільки порядком запису рядків x_{12} та x_{16}. Вектор оптимального розв’язку двоїстої задачі для обох матриць є однаковим, оскільки x_{12} та x_{16} є базисними і мають відповідні нульові значення у двоїстому розв’язку.

Таким чином, розташування базисних змінних і відповідних їм стовпців в матриці D не впливає на визначення об’єктивно-обумовлених оцінок ресурсів поставленої задачі і несуть в обох випадках однаковий економічний зміст. Це можна пояснити лінійністю характеру поставленої задачі, однією із головних властивостей якої є адитивність отриманого розв’язку.

Використовуючи формулу (1) розрахуємо вектор оптимального розв’язку двоїстої задачі:

$Y^* = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 330 \quad 0 \quad 437 \quad 0 \quad -28 \quad 0 \quad 770 \quad 0 \quad 404 \quad 0 \quad 1934 \quad 0 \quad 0) * D^{-1} =$
$= (0 \quad 19{,}89 \quad 0 \quad -420{,}95 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -471{,}8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -628{,}8 \quad 0 \quad 0 \quad 664{,}45 \quad 0{,}272)$

Отримані набір тіньових цін повністю співпадає із результатами, наведеними на рис. 5 на аркуші «Звіт про стійкість».

Проведемо аналіз отриманого розв’язку задачі оптимізації випуску продукції в рамках заданих обмежень на собівартість та потужність печі №3 (табл. 20).

Розглянемо як зміниться план виробництва хлібобулочних виробів в залежності від змін дефіцитних запасів ресурсів:

1. При зростанні потужності печі №1 на 1 т/р загальний прибуток від реалізації продукції зросте на 19,89 у.о. за рахунок зростання обсягів виробництва виробу *Хліб новий пш. ф. 1 гат.* на 1 т. Для цього буде потрібно додатково витратити сировини на 595,26 у.о. та зменшити обсяг виробництва виробу *Хліб висівковий 0,3* на 0,542 т, що призведе до зростання залишків потужності печі №3 на 0,542 т/р. Всі інші змінні показують зміну відносно нижньої та верхньої меж попиту (стовпець x_8).

2. Якщо збільшити собівартість на 1000 у.о. (стовпець x_{22}) загальний прибуток підприємства зросте на 272 у.о. і це дозволить збільшити виробництво виробу *Хліб висівковий 0,3* на 0,4 т, для якого буде використано 439 у.о. із

залишків грошей, що виділялися на сировину та задіяна на відповідну величину піч №3. Всі інші двоїсті оцінки показують вплив на загальний прибуток від реалізації продукції при зміні обсягів виробництва окремих видів продукції за рахунок зміни виробництва інших видів продукції, які мають нульовий вплив на прибуток від реалізації продукції при зміні їх обсягу виробництва. Так, при зростанні обсягів виробництва виробу *Булка смачна 0,4* на 1 т загальний прибуток підприємства зросте на 664,5 у.о. (стовпець x_{21}) за рахунок зменшення виробництва виробу *Хліб висівковий 0,3* на 1,649 т, що призведе до зменшення витрат на сировину на суму 1174,9 у.о. та збільшиться простій печі №3 на 0,649 т/р.

Також за допомогою побудованої оберненої матриці D^{-1} виявимо як зміниться загальний прибуток від реалізації продукції при одночасній зміні запасів ресурсів та меж попиту на задані вироби в асортименті. Так, збільшимо, наприклад, загальну собівартість продукції на 10000 у.о., збільшимо потужність печі №1 до 390 т/р та скоротимо потужність печі №3 до 240 т/р, змінимо межі попиту на хлібобулочні вироби: зменшимо максимальний попит на виріб *Булка смачна 0,4* до 180 т; збільшимо мінімальний попит на *Хліб висівковий 0,3* до 25 т та на виріб *Булка апетитна 0,3* до 20 т. Тобто новий вектор стовпець правих частин системи обмежень буде мати такий вигляд (табл. 21).

Таблиця 21

Значення змін правих частин системи обмежень задачі про планування виробництва хлібобулочних виробів

Показники		Вектор-стовпець		Зміни		Нові значення обмежень
1	2	3	4	5	6	7
Загальна вартість сировини, у.о.		$b_1 + \Delta b_1$		836511,80		836511,80
Потужність печі №1, т/р		$b_2 + \Delta b_2$		380 + 10		390
Потужність печі №3, т/р		$b_3 + \Delta b_3$		250 – 10		240
Межі попиту на продукцію, т						
Батон соціальний: min		$b_4 + \Delta b_4$		10		10
max	$b =$	$b_5 + \Delta b_5$	=	100	=	100
Хліб новий пш. ф. І гат.: min		$b_6 + \Delta b_6$		100		100
max		$b_7 + \Delta b_7$		550		550
Хліб білий соціальний ф.: min		$b_8 + \Delta b_8$		20		20
max		$b_9 + \Delta b_9$		30		30

Продовж. табл. 21

1	2	3	4	5	6	7
Хліб висівковий 0,3: min		$b_{10} + \Delta b_{10}$		10+15		25
max		$b_{11} + \Delta b_{11}$		50 – 10		40
Булка апетитна 0,3: min		$b_{12} + \Delta b_{12}$		10+10		20
max		$b_{13} + \Delta b_{13}$		50		50
Булка смачна 0,4: min		$b_{14} + \Delta b_{14}$		10		10
max		$b_{15} + \Delta b_{15}$		200-20		180
Собівартість виробленої продукції, у.о.		$b_{16} + \Delta b_{16}$		1613887,08+10000		1623887,08

Джерело: розроблено автором

Новий оптимальний план виробництва продукції за умов одночасної зміни запасів усіх заданих обмежень отримаємо аналогічним способом, тобто множенням матриці D^{-1} на вектор-стовпець нових значень обмежень (табл. 22).

Таблиця 22

Оптимальний план виробництва хлібобулочних виробів за умов одночасної зміни запасів усіх заданих обмежень

Базис	Показники	Значення
x_7	Залишки виділених грошей на сировину, у.о.	120007,4
x_9	Залишки потужності печі №3, т/р	0,98
x_1	Кількість виробленого виробу *Батон соціальний*, т	10
x_{11}	Вироблено менше виробу *Батон соціальний* за максимальну межу попиту, т	90
x_2	Кількість виробленого виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.*, т	370
x_{13}	Вироблено менше виробу *Хліб новий пш. ф. І гат.* за максимальну межу попиту, т	180
x_{12}	Вироблено більше виробу *Хліб новий пш.ф. І гат.* за мінімальну межу попиту, т	270
x_3	Кількість виробленого виробу *Хліб білий соціальний ф.*, т	20
x_{15}	Вироблено менше виробу *Хліб білий соціальний ф.* за максимальну межу попиту, т	10
x_4	Кількість виробленого виробу *Хліб висівковий 0,3*, т	29,02
x_{17}	Вироблено менше виробу *Хліб висівковий 0,3* за максимальну межу попиту, т	10,98
x_5	Кількість виробленого виробу *Булка апетитна 0,3*, т	20
x_{18}	Вироблено більше виробу *Булка апетитна 0,3* за мінімальну межу попиту, т	30
x_6	Кількість виробленого виробу *Булка смачна 0,4*, т	180
x_{20}	Вироблено більше виробу *Булка смачна 0,4* за мінімальну межу попиту, т	170
x_{16}	Вироблено більше виробу *Хліб висівковий 0,3* за мінімальну межу попиту, т	4,02

Джерело: розраховано автором

Отриманий новий оптимальний розв’язок X*= (10; 370; 20; 29,02; 20; 180; 120007,4; 0; 0,98; 0; 90; 270; 180; 0; 10; 4,02; 0; 30; 0; 170; 0; 0) має всі невід’ємні значення, значить і оптимальний план двоїстої задачі залишається таким же:

Y* = (0 19,89 0 –420,95 0 0 0 –471,8 0 0 0 –628,8 0 0 664,45 0,272).

Відповідно, загальний максимальний прибуток підприємства зміниться таким чином: $\Delta Z_{мах} = \sum_{i=1}^{16} \Delta b_i y_i$ = 0 × 0 + 19,89 × 10 + 0 × (–10) + (–420,95) × 0 + + 0 × 0 + 0 × 0 + + 0 × 0 +(–471,8) × 0 + 0 × 0 + 0 × 15 + 0 × (–10) +(–628,8) × 10 + + 0 × 0 + 0 × 0 + 664,45 × (–20) + 0,272 × 10000 = –16657,6 у.о., тобто знизиться на 16657,6 у.о.

Розглянемо цю ж задачу на мінімум собівартості продукції за умов повного використання заданої сировини. Тобто цільового функція відповідно до табл. 1 буде мати такий вигляд:

$$Z = 2760x_1 + 1533x_2 + 1558x_3 + 2830x_4 + 3796x_5 + 4666x_6 \rightarrow \min$$

Обмеження:

– за попитом:

$10 \le x_1 \le 100$; $100 \le x_2 \le 550$;

$20 \le x_3 \le 30$; $10 \le x_4 \le 50$;

$10 \le x_5 \le 50$; $10 \le x_6 \le 200$.

– за продуктивністю ліній:

$x_2 + x_3 \le 600$ – на потужність печі №1;

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \le 600$ – на потужність печі №3.

– за витратами на сировину:

$$890{,}68x_1 + 1268{,}80x_2 + 1268{,}72x_3 + 1243{,}39x_4 + 957{,}62x_5 + 875{,}19x_6 \ge 836511{,}8$$

$$x_j \ge 0, j = 1, 2,. \dots, 6.$$

Звіт за стійкістю для даної задачі наведений на рис. 6.

Згідно з алгоритмом для побудови оберненої матриці записуємо канонічну форму:

$890{,}68\, x_1 + 1268{,}80\, x_2 + 1268{,}72\, x_3 + 1243{,}39\, x_4 + 957{,}62\, x_5 + 875{,}19\, x_6 - x_7 + y_7 =$
$= 836511{,}8$

$x_2 + x_3 + x_8 = 600$ $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_9 = 600$

$x_1 - x_{10} + y_2 = 10$ $\qquad x_1 + x_{11} = 100$

$x_2 - x_{12} + y_3 = 100$ $\qquad x_2 + x_{13} = 550$

$x_3 - x_{14} + y_4 = 20$ $\qquad x_3 + x_{15} = 30$

$x_4 - x_{16} + y_5 = 10$ $\qquad x_4 + x_{17} = 50$

$x_5 - x_{18} + y_6 = 10$ $\qquad x_5 + x_{19} = 50$

$x_6 - x_{20} + y_7 = 10$ $\qquad x_6 + x_{21} = 200$

Клітинки змінних

Клітинка	Назва	Остаточне Значення	Зменшена Вартість	Цільова функція Коефіцієнт	Припустиме Збільшення	Припустиме Зменьшення
$B$3	*Батон соціальний*	22,58	0	2760	770,6534787	732,7855758
$C$3	*Хліб новий пш. ф. I гат.*	550	-2398,72	1533	2398,718643	1E+30
$D$3	*Хліб білий соціальний ф.*	30	-2373,46	1558	2373,463111	1E+30
$E$3	*Хліб висівковий 0,3*	50	-1022,97	2830	1022,971796	1E+30
$F$3	*Булка апетитна 0,3*	10	828,57	3796	1E+30	828,5719975
$G$3	*Булка смачна 0,4*	10	1953,98	4666	1E+30	1953,982271

Обмеження

Клітинка	Назва	Остаточне Значення	Тінь Ціна	Обмеження Права сторона	Припустиме Збільшення	Припустиме Зменьшення
$H$39	Загальна вартість сировини Всього	836511,8	3,0987627	836511,8026	68956,76179	11204,2656
$H$43	Піч №1 Всього	580	0	600	1E+30	20
$H$44	Піч №3 Всього	92,58	0	600	1E+30	507,4205217

Рис. 6 Аркуш «Звіт про стійкість» до задачі на мінімум собівартості виробленої продукції
Джерело: розраховано автором

Відповідно до симплекс-методу та з урахуванням властивості задач лінійного програмування для задачі на min цільова функція набуде такого вигляду:

$0 = –Z + 2760x_1 + 1533x_2 + 1558x_3 + 2830x_4 + 3796x_5 + 4666x_6.$

В такому вигляді представлену задачу можна розв’язувати за алгоритмом симплекс-методу, що застосовується для задач максимізації [6, с. 47].

В даній канонічній формі буде сім штучних змінних, 15 рядків плюс М-рядок та 21 стовпець основних та додаткових змінних. Виявляємо базисні змінні, які в останній симплекс-таблиці підуть з базису, оскільки їх значення дорівнюють нулю: змінні, що відповідають дефіцитним ресурсам (x_7) та вигідним для підприємства видам продукції, оскільки вичерпують попит за верхньою межею (x_{13}, x_{15}, x_{17}). Всі штучні, що знаходяться в рівностях на попит продукції поміняються на відповідні змінні продукції, що виробляється ($y_2 \leftrightarrow x_1$, $y_3 \leftrightarrow x_2$, $y_4 \leftrightarrow x_3$, $y_5 \leftrightarrow x_4$, $y_6 \leftrightarrow x_5$, $y_7 \leftrightarrow x_6$). Також дорівнюють нулю додаткові змінні в рівностях за нижньою межею так званих невигідних для підприємства видів продукції (x_{18}, x_{20}).

Залишаться базисними в останній симплекс-таблиці змінні недефіцитних видів ресурсів (x_8, x_9), а також додаткові змінні, що входили до рівностей обмежень на попит продукції, яка не виробляється, відповідно до верхньої межі (x_{11}, x_{19}, x_{21}). На місце змінних x_{13}, x_{15}, x_{17} прийдуть додаткові змінні із рівностей за нижньою межею попиту відповідних хлібобулочних виробів ($x_{13} \leftrightarrow x_{12}$, $x_{15} \leftrightarrow x_{14}$, $x_{17} \leftrightarrow x_{16}$). Отже, залишається тільки одна змінна x_{10}, яка замінить базисну додаткову змінну x_7, яка пішла з базису.

Таким чином, матриця D буде мати такий вигляд, наведений в табл. 23.

Таблиця 23

Матриця D, складена з векторів-стовпців першої симплекс-таблиці згідно порядку базисних змінних останньої симплекс-таблиці

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_{10} & x_8 & x_9 & x_1 & x_{11} & x_2 & x_{12} & x_3 & x_{14} & x_4 & x_{16} & x_5 & x_{19} & x_6 & x_{21} \end{matrix} \\
D = \left|\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 890,68 & 0 & 1268,80 & 0 & 1268,72 & 0 & 1243,39 & 0 & 957,62 & 0 & 875,19 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{matrix}\right|
\end{array}$$

Джерело: побудовано автором

Відповідно до отриманої матриці D обчислимо обернену матрицю і представимо у вигляді табл. 24.

Таблиця 24

Обернена матриця D^{-1}

$$D^{-1} = \begin{vmatrix}
0,00112 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1,425 & 0 & -1,424 & 0 & -1,396 & -1,075 & 0 & -0,983 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0,00112 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1,425 & 0 & 1,424 & 0 & 0,396 & 0,075 & 0 & -0,017 & 0 \\
0,00112 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,425 & 0 & -1,424 & 0 & -1,396 & -1,075 & 0 & -0,983 & 0 \\
-0,00112 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1,425 & 0 & 1,424 & 0 & 1,396 & 1,075 & 0 & 0,983 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{vmatrix}$$

Джерело: розраховано автором

Для остаточного формування останньої симплекс-таблиці перемножимо вектор-рядок з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані, тобто $\bar{C}_{баз}$ = (0 0 0 2760 0 1533 0 1558 0 2830 0 3796 0 4666 0) і отриману матрицю.

Отже, в результаті одержимо такий розв'язок двоїстої задачі Y* = (3,099 0 0 0 0 0 –2398,72 0 –2373,46 0 –1022,97 828,57 0 1953,98 0). Отримані тіньові оцінки повністю співпадають із результатами наведеними у звіті про стійкість задачі на мінімум собівартості виробленої продукції (рис. 6).

Результати зведемо в таблицю, яка для зручності включає тільки обернену матрицю (табл. 25).

Проведемо більш детальний аналіз впливу змін обмежень задачі на мінімум собівартості виробленої хлібобулочної продукції: так при збільшенні загальної вартості сировини на 1000 у.о. (стовпець x_7) зросте собівартість виробленої продукції на 3099 у.о. за рахунок збільшення обсягів виробництва виробу *Хліб білий соціальний ф.* на 1,12 т, що призведе до збільшення використання потужності печі №3 на 1,12 т/р. За даними табл. 24 можна дійти висновку, що зростання виробництва будь-якого хлібобулочної виробу, як прибуткового, так і збиткового, зміни в оптимального розв’язку будуть відбуватися лише за рахунок зміни виробництва виробу *Хліб білий соціальний ф.*, що, відповідно, потребує зміни використання потужності печі №3.

Таблиця 25

Остання симплекс-таблиця, що включає тільки обернену матрицю

Базис	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_2	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
x_{10}	0,00112	0	0	-1	0	0	-1,425	0	-1,424	0	-1,396	-1,075	0	-0,983	0
x_8	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_9	-0,00112	0	1	0	0	0	1,425	0	1,424	0	0,396	0,075	0	-0,017	0
x_1	0,00112	0	0	0	0	0	-1,425	0	-1,424	0	-1,396	-1,075	0	-0,983	0
x_{11}	-0,00112	0	0	0	1	0	1,425	0	1,424	0	1,396	1,075	0	0,983	0
x_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{14}	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
x_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_{21}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
Z	3,0988	0	0	0	0	0	-2398,7	0	-2373,5	0	-1023	828,6	0	1954	0
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}

Джерело: побудовано автором

Аналогічно можна розрахувати як зміниться загальна собівартість виробленої продукції при одночасній зміні декількох заданих обмежень (табл. 26). Отже, новий оптимальний план виробництва продукції за умов одночасної зміни запасів усіх заданих обмежень одержимо множенням матриці D^{-1} на новий вектор-стовпець обмежень, тобто X*= (148,81; 550; 30; 40; 10; 10; 0; 40; 91,19; 0; 1,19; 350; 0; 8; 0; 30; 0; 0; 50; 0; 170). Знайдений вектор має тільки невід’ємні значення, тобто оптимальний план двоїстої задачі залишається незмінним: Y*= (3,099 0 0 0 0 0 –2398,72 0 –2373,46 0 –1022,97 828,57 0 1953,98 0). Загальна мінімальна собівартість виробленої продукції зросте на величину: $\Delta Z\min=\sum_{i=1}^{15} \Delta b_i y_i$= 100000 × 3,099 + 20 × 0 + (–300) × 0 + 5 × 0 + 50 × × 0 + 100 × 0 + 0 × (–2398,72) + 2 × 0 + 0 × (–2373,46) + 0 × 0 + (–10) × (–1022,97)+ + 0 × 828,57 + 10 × 0 + 0 × 1953,98 + (–20) × 0 = 320106 у.о.

Таблиця 26

Значення змін правих частин системи обмежень задачі про планування виробництва хлібобулочних виробів

Показники		Вектор-стовпець		Зміни		Нові значення обмежень
Загальна вартість сировини		$b_1 + \Delta b_1$		836511,80+100000		936511,80
Потужність печі №1		$b_2 + \Delta b_2$		600 + 20		620,00
Потужність печі №3		$b_3 + \Delta b_3$		600 – 300		300,00
Межі попиту на продукцію						
Батон соціальний: min		$b_4 + \Delta b_4$		10 + 5		15,00
max		$b_5 + \Delta b_5$		100 + 50		150,00
Хліб новий пш. ф. 1 гат: min		$b_6 + \Delta b_6$		100 + 100		200,00
max	$b =$	$b_7 + \Delta b_7$	=	550	=	550,00
Хліб білий соціальний ф.: min		$b_8 + \Delta b_8$		20 + 2		22,00
max		$b_9 + \Delta b_9$		30		30,00
Хліб висівковий: min		$b_{10} + \Delta b_{10}$		10		10,00
max		$b_{11} + \Delta b_{11}$		50 – 10		40,00
Булка апетитна: min		$b_{12} + \Delta b_{12}$		10		10,00
max		$b_{13} + \Delta b_{13}$		50 + 10		60,00
Булка смачна: min		$b_{14} + \Delta b_{14}$		10		10,00
max		$b_{15} + \Delta b_{15}$		200 – 20		180,00

Джерело: побудовано автором

Отже, як показали результати дослідження, можна проводити більш глибокий аналіз лінійних оптимізаційних задач планування з достатньо великою кількістю змінних та обмежень за таким алгоритмом:

1. Знайти розв’язок лінійної моделі в електронній таблиці MS Excel за допомогою надбудови «Пошук розв’язання». Створити звіти про результати та про стійкість.

2. Зі звіту про результати виявити види нерентабельної продукції (в оптимальному розв’язку такі види продукції отримують нульові значення). Для визначених видів продукції додати до моделі як окремий вид обмежень нерівності, що визначають ненульові характеристики для змінних, що відповідають зазначеним змінним. Ці обмеження будуть враховані при побудові канонічної форми.

3. Записати канонічну форму побудованої моделі лінійної задачі.

4. Записати першу симплекс-таблицю.

5. Визначити базисні змінні симплекс-таблиці, що містить оптимальний план, причому порядок змінних неважливий, оскільки представлена модель є лінійною, наступним чином:

5.1 Визначити додаткові змінні, що відповідають дефіцитним ресурсам, невигідним або нерентабельним для підприємства видам продукції в обмеженнях зі штучними змінними. Визначити додаткові змінні, що відповідають тим видам продукції, які виробляються, повністю вичерпуючи попит (задана верхня межа попиту), тобто такі види продукції є прибутковими для підприємства або найбільш вигідними у виробництві при заданих обмеженнях на матеріальні ресурси. Такі змінні не будуть базисними в симплекс-таблиці, що містить оптимальний розв'язок, і, відповідно, будуть дорівнювати нулю.

5.2 Штучні змінні замінюються на відповідні їм в рівностях канонічної форми основні змінні задачі, що мають ненульове значення.

5.3 Визначити додаткові змінні, що відповідають недефіцитним ресурсам та видам продукції, виробництво яких не дорівнює верхній межі попиту. Такі змінні залишаться в базисі.

5.4 Також в базис ввійдуть основні змінні задачі, які мають ненульове значення та не визначені у попередній пунктах.

6. Записати матрицю D з векторів-стовпців із першої симплекс-таблиці відповідно до знайденої системи базисних змінних.

7. Знайти обернену матрицю D^{-1}. Зважаючи на її розмірність краще використовувати, наприклад, вбудовані функції MS Excel.

8. Перевірити коректність знайденої оберненої матриці шляхом обчислення системи об'єктивно-обумовлених оцінок за формулою (1) та порівняння із тіньовими цінами у звіті про стійкість.

9. Провести аналіз впливу об'єктивно-обумовлених оцінок на значення цільової функції та впливу одночасної зміни декількох обмежень.

Єдиним зауваженням щодо використання даного алгоритму є обмеження, що стосується генерації коректних звітів про стійкість. Відповідно до положень теорії двоїстості даний процес може застосований тільки у випадку завдання невироджених взаємо-спряжених двоїстих задач лінійного програмування, що мають непорожню множину припустимих розв'язків. Представлений алгоритм можна ефективно використовувати для дослідження будь-яких бізнес-процесів, які можливо описати у вигляді лінійної моделі.

Отже, використання економіко-математичних методів теорії двоїстості дозволило отримати більш глибокий аналіз задач планування, що може стати для менеджера більш вагомим підґрунтям для прийняття рішення при плануванні виробництва харчової промисловості.

Список використаних джерел:

1. Альошкіна Л.П. Інноваційна логістична стратегія як інструмент оптимізації бізнес-процесів аграрних підприємств. *Науковий вісник Мукачівського державного університету*. *Серія Економіка*. 2019. Вип. 2(12). С. 57-61. (14)

2. Бавико О.Є., Бавико О. О. Стратегічні аспекти та механізм організаційної оптимізації бізнес-процесів підприємницьких структур в умовах зростання соціально-економічної турбулентності. *Економіка: реалії часу. Науковий журнал*. 2021. №5 (57). С. 5-12. URL : https://economics.net.ua/files/archive/2021/No5/5.pdf.

3. Блага Н., Приймак І. Побудова моделей вибору стратегії розвитку підприємства в умовах конкуренції. *Формування ринкової економіки в Україні*. 2019. Вип. 41. С. 38-49.

4. Вибрані питання комп'ютерного моделювання процесів і явищ : колект. монограф. / За ред. Н. Р. Балик. Тернопіль : Підручники і посібники, 2022. 272 с. URL : http://dspace.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/26038/1/DeDiMaMo.pdf.

5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. К.: КНЕУ, 2001. 248 с.

6. Вітлінський В.В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні

методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.

7. Волонтир Л.О., Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., Чіков І.А. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: навч. посібник. Вінницький національний аграрний університет. Вінниця: ВНАУ, 2020. 334 с.

8. Журбенко М.Г., Чумаков Б.М. До задачі планування багатопродуктових потоків і модернізації транспортної мережі. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2021. №4. С. 5-11. URL : https://web.archive.org/web/20220209191032id_/http://cctech.org.ua/images/docs/Articles/2021/paper_21_4_1.pdf. (17)

9. Іванов С.В. Використання апарату економіко-математичного моделювання в практиці виробничо-торгівельного підприємства [Електронний ресурс]. *Економіка: реалії часу. Науковий журнал*. 2015. №2 (18). С. 94-100. URL : http://economics.opu.ua/files/archive/2015/n2.html.

10. Карінцева, О. І., Харченко, М. О., Пономарьова, Г. С. Підвищення ефективності бізнес-процесів на виробничому підприємстві. *Механізм регулювання економіки*. 2020. №4. С. 58-69. URL : https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/83754.

11. Клебанова Т. С., Баликов О. Г. Загальна система оптимізації стратегічних бізнес-процесів сервісної ІТ-компанії. *Проблеми економіки*. 2018. №4 (38) С. 351-359. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pekon_2018_4_44.

12. Кузьмичов А. І., Чернецька Ю. В., Шестаков В. А. Пошук і аналіз чутливості часових оптимальних планів постачання енергетичних ресурсів із застосуванням надбудови SolverTable. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*. 2022. Т. 24, № 2. С. 62-71. URL : http://drsp.ipri.kiev.ua/article/view/275103.

13. Ладогубець Т. С., Фіногенов О. Д. Двоїстість в лінійному програмуванні: практикум з дисципліни «Методи оптимізації» [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Наука про дані та математичне моделювання». Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 59 с. URL : https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/43414/1/DvLP_Praktykum.pdf.

14. Мороз М., Загорянський В., Гайкова Т., Кузєв І. Використання методів дослідження операцій для оптимізації автомобільних перевезень масових вантажів в агропромисловому комплексі. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях*. 2022. №1(11). С. 44-50. URL : http://vestnik2079-5459.khpi.edu.ua/article/view/256979.

15. Остапенко Я.О., Замота І.О. Моделювання оптимального виробництва продукції на виробничому підприємстві. *Математичне моделювання в економіці*. 2018. №1(10). С. 139-151.

16. Свірський Ю. В. Сутність і принципи управління бізнес-процесами на засадах імітаційного моделювання. *Наукові записки Львівського університету бізнесу та права*. 2023. №37. С. 113-118. URL : https://nzlubp.org.ua/index.php/journal/article/view/787.

17. Стеблюк Н., Волосова Н. Використання економіко-математичного моделювання для оптимізації бізнес-процесів організації. *Review of transport economics and management*. 2022. №6(22). С. 111-117. https://doi.org/10.15802/rtem2021/243563.

18. Camarena Omar Antolín Math 340: Linear Programming. 2018. September 10. URL : https://www.matem.unam.mx/~omar/math340/math340notes.pdf.

19. Ian En-Hsu Yen, Kai Zhong, Cho-Jui Hsieh, Pradeep K. Ravikumar, Inderjit S. Dhillon Sparse Linear Programming via Primal and Dual Augmented Coordinate Descent. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 28 (NIPS 2015). 2015. URL: https://proceedings.neurips.cc/paper/2015/file/0966289037ad9846c5e994be2a91bafa-Paper.pdf.

20. Sukanta Nayak Fundamentals of Optimization Techniques with Algorithms. 2020. India, Coimbatore, Academic Press. 320 p. URL : https://shop.elsevier.com/books/fundamentals-of-optimization-techniques-with-algorithms/nayak/978-0-12-821126-7.