

29. ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМУ КОМПОЗИЦІЙНОМУ ПЛАНУВАННІ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Т.В. Зінченко

Національний університет харчових технологій

Ю.В. Боднарчук

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Центральне композиційне планування експерименту (ЦКП) набуло широкого застосування для оптимізації рецептур кондитерських виробів. Розрізняють два види ЦКП — ортогональне та ротатабельне, які відрізняються кількістю точок експерименту, які представляються у спеціальній кодованій формі, та їх взаємним

розташуванням. Для аналізу результатів експерименту частіше всього застосовують методи математичної статистики. Рівняння регресії при ЦКП представляють у вигляді многочлена першого чи другого порядку (рідко — третього).

Рівняння множинної регресії I порядку (лінійне) має вигляд

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m, \quad (1)$$

де m — кількість факторів. Оцінка параметрів цього рівняння — коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ — виконується за даними вибірки (за результатами N дослідів) $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, y_i, i=1, 2, \dots, N$, за методом мінімальних квадратів. У загальному випадку коефіцієнти рівняння регресії (1) обчислюються за формулою

$$\bar{b} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot \bar{y}, \quad (2)$$

де $\bar{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ — вектор оцінок параметрів-коефіцієнтів, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ — вектор значень досліджуваної характеристики (критерію) в N дослідях, X — матриця розміром $N \times (m+1)$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nm} \end{pmatrix}.$$

Можна довести, що у випадку, наприклад, трифакторного моделювання ($m=3$) коефіцієнти функції регресії першого порядку при ортогональному ЦКП визначаються за формулами:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad (3)$$

$$b_0 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i; \quad b_1 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_{i1} y_i; \quad b_2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_{i2} y_i; \quad b_3 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_{i3} y_i.$$

Часто для аналізу результатів експерименту використовують функцію регресії другого порядку в неповній формі

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3. \quad (4)$$

Якщо трифакторну функцію регресії (4) розглядати як лінійну функцію шести змінних (по кількості змінних доданків), то, застосовуючи формулу (2) стосовно нових змінних, можна знайти співвідношення для обчислення коефіцієнтів функції регресії.

У випадку трифакторного ротатбельного ЦКП число дослідів факторного планування та дослідів в «зіркових точках» з розміром «зіркового плеча» α разом становить чотирнадцять. Матриця кодованих значень факторів експерименту має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -\alpha & +\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -\alpha & +\alpha & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & +\alpha \end{pmatrix}^T.$$

Для повного статистичного дослідження математичної моделі додатково виконують певну кількість дослідів в точці центру факторного плану, так що загальна кількість дослідів становить $N = 2^n + 2n + n_0$, де n — кількість факторів, 2^n — кількість точок факторного експерименту, $2n$ — кількість «зіркових точок», n_0 — кількість повторних дослідів у центрі плану. Можна довести, що для функції регресії другого порядку

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2$$

коефіцієнти обчислюються за формулами:

$$b_0 = \frac{w+16}{A}I_0 - \frac{v}{A}(I_{11} + I_{22} + I_{33}); b_1 = \frac{1}{v}I_1; b_2 = \frac{1}{v}I_2; b_3 = \frac{1}{v}I_3;$$

$$b_{12} = \frac{1}{8}I_{12}; b_{13} = \frac{1}{8}I_{13}; b_{23} = \frac{1}{8}I_{23}; b_{11} = -\frac{v}{A}I_0 + \frac{B}{qA}I_{11} - \frac{C}{qA}(I_{22} + I_{33});$$

$$b_{22} = -\frac{v}{A}I_0 + \frac{B}{qA}I_{22} - \frac{C}{qA}(I_{11} + I_{33}); b_{33} = -\frac{v}{A}I_0 + \frac{B}{qA}I_{33} - \frac{C}{qA}(I_{11} + I_{22}),$$

$$\text{де } I_0 = \sum_{i=1}^N y_i; I_j = \sum_{i=1}^N x_{ij}y_i; I_{jk} = \sum_{i=1}^N x_{ij}x_{ik}y_i; I_{jj} = \sum_{i=1}^N x_{ij}^2y_i; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n,$$

$$w = 8 + 2\alpha^4; v = 8 + 2\alpha^2;$$

$$A = 20(w+16) - 3v^2; B = 20(w+8) - 2v^2; C = 20 \cdot 8 - v^2; q = 2\alpha^4.$$

За допомогою матричного рівняння (2) отримано розв'язок загальної m — факторної задачі знаходження коефіцієнтів функції регресії другого порядку для ротатбельного ЦКП в кодованій формі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Грачев Ю.П. Математические методы планирования экспериментов. — М.: Пищевая промышленность. — 1979. — 200 с.

2. Мартиненко М.А., Нецадим О.М., Радзісвська О.І., Сяфонов В.М. Математична статистика: Навчальний посібник. — К.: Четверта хвиля. — 2005. — 208 с.