УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Ткачук

Киевский национальный университет им.Тараса Шевченка, Киев, Украина

В работе исследуется вопрос существования и устойчивости инвариантных множеств системы разностных уравнений следующего вида

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hX(x_n^h), \tag{1}$$

где $h > 0$ — шаг разностного уравнения, $n \in \mathbb{Z}$.

$$x_n^h = x^h(t_0 + nh), \quad x_0^h(t_0) = x_0,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Вектор-функция $X(x)$ определена в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица.

Определение 1. . Множество $M \subset D$ будем называть инвариантным множеством системы (1), если решение $x_n^h(x_0)$ системы (1), с начальными данными $x_0 \in M$, имеет свойство: $x_n^h(x_0) \in M$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Если $n \in \mathbb{Z}^+$, то множество M назовем положительно инвариантным множеством системы (1).

Определение 2. . Положительно инвариантное множество M системы (1) будем называть устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\rho(x_0, M) < \delta$, то $\rho(x_n^h(x_0), M) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$. Если множество M устойчиво и удовлетворяет предельному соотношению $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n^h(x_0), M) = 0$ для всех x_0 с некоторой δ_0-окрестности множества M, тогда назовем его асимптотически устойчивым.

Пусть D_1 — ограниченная область, которая находится в D вместе с некоторой своей окресностью, $\overline{D}_1 = D_1 \cup \partial D_1$.

Определение 3. . Функцию $V_h(x)$, определенную в $\overline{D}_1$, будем называть знакопостоянной в D_1, если для всех $x \in \overline{D_1}$, ненулевые значения функции $V_h(x)$ имеют один и тот же знак. Знакопостоянную в D_1 функцию $V_h(x)$ назовем знакоопределенной в D_1, если множество ее нулей непусто и компактно в D_1.

Инвариантные множества системы (1) будем исследовать в терминах знакопостоянных функций Ляпунова аналогично дифференциальным уравнениям [2]. Пусть $\triangle V_h(x) = V_h(x + hX(x)) - V_h(x)$.

Теорема 1. *. Если $V_h(x)$ знакоопределенная в D_1 функция, для которой $\triangle V_h(x)$ знакопостоянна в D_1 и множество $N_0(h)$:*

$$V_h(x) = 0, \qquad x \in D_1, \tag{2}$$

равномерно отделено по h от границы области ∂D_1, т.е.

$$\exists h_0 > 0, \quad \exists \gamma > 0, \quad \text{что} \quad \rho(N_0(h), \partial D_1) > \gamma, \quad \forall h \leq h_0, \tag{3}$$

тогда множество (2) положительно инвариантное и устойчиво, когда знаки $V_h(x)$ и $\triangle V_h(x)$ разные.

Теорема 2. *. Если функции $V_h(x)$ и $\triangle V_h(x)$ знакоопределенные в D_1, множества их нулей для каждого шага $h > 0$ в D_1 совпадают и выполнено условие (3), тогда положительно инвариантное множество (2) асимптотически устойчиво, когда знаки $V_h(x)$ и $\triangle V_h(x)$ разные.*

Список литературы

1. Ткачук А.М. Інваріантні множини різницевих систем та їх стійкість//Нелінійні коливання.Ин-т мат-ки НАН Украины. - 2005.- т.- 8 , №2.-с.258-264.
2. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1987.-304с.

STABILITY OF INVARIANT SETS OF SYSTEMS DIFFERENCE EQUATIONS

A.N.Tkachuk

National Taras Shevchenko University of Kyiv, Ukraine

For the systems of difference the equations it is received conditions of existence and stability of invariant sets in terms of the Lyapunov functions of constant signs.