УДК 517.9:519.46

Юрик І.І. канд. фіз.-мат. наук, доцент

ПРО МАКСИМАЛЬНІ ПІДАЛГЕБРИ КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ AC(1,n).

Одержана класифікація І-максимальних підалгебр рангу n конформної алгебри AC(1,n), які не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів і алгебр, які в $R_{2,n+1}$ мають одномірні інваріантні ізотропні підпростори.

We obtain the classification of I-maximal subalgebras of rank n of the conformal algebra AC(1,n), which don't leave invariant isotropic subspaces in $R_{2,n+1}$ and of the subalgebras possessing one-dimensional invariant isotropic subspace in $R_{2,n+1}$.

Згідно теореми Ліувілля конформне перетворення є композицією руху, дилатації і інверсії або композицією руху і дилатації. Під рухами розуміють елементи псевдоортогональної групи O(1,n) і зсуви (трансляції) T_a ; $x \to x+a$, а під дилатаціями (розтягами) - відображення $\lambda \to \lambda x$ ($\lambda \in R$; $\lambda > 0$), а інверсіями називають відображення:

$$\hat{S}: x \to \left(\frac{x_0}{x^2}, \frac{x_1}{x^2}, \cdots, \frac{x_n}{x^2}\right), \hat{S}T_a,$$

де $x=(x_0, x_1,\ldots,x_n)$, $x^2= x^2_0 - x_1^2 - \ldots - x_n^2$.

Алгебра Лі AC(1,n) групи C(1,n) конформних перетворень простору $R_{1,n}$ породжуються векторними полями [1] :

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{0a} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_0}$$

$$J_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b}, \qquad D = -x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$K_\alpha = 2 g^{\beta}_{\alpha} x_\beta x_\upsilon \frac{\partial}{\partial x_0} g^{\beta\upsilon} x_\beta x_\upsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \qquad (1)$$

де $\alpha=0, 1,\ldots,n$; $a, b = 1,\ldots,n$.

Ці генератори задовольняють таким комутаційним співвідношенням:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\upsilon\delta}] = g_{\alpha\beta} J_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\upsilon} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\upsilon};$$

$$[P_\alpha, J_{\beta\upsilon}] = g_{\alpha\beta} P_\upsilon - g_{\alpha\upsilon} P_\beta; \qquad [P_\alpha, P_\beta] = 0$$

$$[K_\alpha, J_{\beta\upsilon}] = g_{\alpha\beta} K_\upsilon - g_{\alpha\upsilon} K_\beta$$

$$[K_\alpha, K_\beta] = 0; [D, P_\alpha] = P_\alpha, \qquad [D, K_\alpha] = -K_\alpha;$$

$$[D, J_{\alpha\beta}] = 0; [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta} D - J_{\alpha\beta}),$$

$$(\alpha, \beta, \upsilon, \delta = 0, 1, \ldots, n).$$

Нехай $O(2,n+1)$ - група ізометрій псевдоевклідового простору $R_{2,n+1}$ з метрикою ρ_{ab} $(a,b = 1,2,\ldots,n+3)$, де $\rho_{11}=\rho_{22}=-\rho_{33}=\ldots=-\rho_{n+3,n+3}=1$, $\rho_{ab}=0$ при $a\neq b$. Позначимо через I_{ab} матрицю порядку $n+3$, яка має одиницю на перетині a-го рядку і b-го стовпця, і нулі на всіх решта місцях $(a, b = 1,\ldots,n+3)$. Базис алгебри $AO(2,n+1)$ утворюють матриці:

$$\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}, \quad \Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ba} \quad (a < b;\ a,b=3,\ldots,n+3),$$

$\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}$ $(i=1,2;\ a=3,\ldots,n+3)$. Вони зв'язані між собою такими комутаційними співвідношеннями:

$$[\Omega_{ab},\Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac},$$

де $a,b,c,d=1,\ldots,n+3$. Алгебра AO(2,n+1) діє в псевдоевклідовому просторі $R_{2,n+1}$, який складається з $(n+3)$ - мірних стовпців, способом множення стовпця $X\in R_{2,n+1}$ зліва на матрицю $A\in AO(2,n+1)$. Базис $R_{2,n+1}$, елементи якого є одиничні стовпці, позначимо через $\{Q_1,\ldots,Q_{n+3}\}$. Відображення $f: AO(2,n+1)\to AC(1,n)$ алгебри Лі AO(2,n+1) на алгебру Лі AC(1,n), яке задається за допомогою таких співвідношень: $J_{\alpha\beta} = f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2})$, $\quad P_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,n+3})$,

$$K_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,n+3}) \qquad (2),$$

$D = -f(\Omega_{1,n+3})$ **є ізоморфізмом. Тому AO(2,n+1) і AC(1,n)можна ототожнити. В результаті цього одержуємо два набори позначень для одного і того ж базису**

$$\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta}, \qquad \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha)$$

$$\Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha), \qquad \Omega_{1,n+3} = -D, \qquad (3)$$

$(\alpha<\beta;\ \alpha,\beta=0,1,\ldots,n)$.

Задача класифікації підалгебр алгебри AC(1,n) з точністю до C(1,n) - спряженості рівносильна задачі класифікації підалгебр алгебри AO(2,n+1) з точністю до O(2,n+1) - спряженості. Це означає, що якщо Φ_1 - повний список C(1,n) - неспряжених підалгебр алгебри AC(1,n), то замінивши генератори в кожній підалгебрі $L\in\Phi_1$ відповідними генераторами алгебри AO(2,n+1) згідно співвідношенням (3), одержимо повний список Φ_2 O(2,n+1) - неспряжених підалгебр алгебри AO(2,n+1) і навпаки.

Група O(2,n+1) породжує дію алгебри AO(2,n+1) на просторі $R_{2,n+1}$. Це дозволяє множину всіх підалгебр алгебри AO(2,n+1) розбити на такі три класи .

1). Перший клас складається з усіх підалгебр , які не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів .

2). Другий клас складається з підалгебр , які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності одиниця . Цей клас включає підалгебри , які спряжені з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, що породжена генераторами P_α , $J_{\alpha\beta}$, D , де $\alpha < \beta$ $\alpha,\beta=0,1,\ldots,n$. Прикладом підалгебри алгебри $A\tilde{P}(1,n)$ є класична алгебра Галілея $A\tilde{G}(n-1)$ породжена генераторами P_a, $\tilde{G}_a$, M, T, J_{ab}, де $G_a= J_{oa}- J_{on}$, $M = P_0 + P_n$, $T=\frac{1}{2}(P_0 - P_n)$, (a<b ; a,b = = 1,...,n-1).

3). Третій клас складають підалгебри , які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності два і не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів розмірності одиниця . Нехай Aopt(1,n) - підалгебра алгебри AC(1,n) породжена генераторами

M , P_a , G_a , J_{ab} , C , S , T, Z (a < b і a,b=1,...,n-1) , де

$$G_a = J_{oa}- J_{an} , \qquad C = - (J_{on} + D) ,$$

$$Z = J_{on} - D , \qquad S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n) .$$

Цей клас складають ті підалгебри алгебри Aopt(1,n) , які не спряжені з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,n)$.

В даній роботі будуть використовуватись такі позначення :

$$AO[r,s] = \langle J_{ab} ;\ a,b = r,\ldots,s \rangle ;$$

$$AE[r,s] = \langle P_r,\ldots,P_s\rangle \oplus AO[r,s] ;$$

$$AE_1[r,s] = \langle G_r,\ldots,G_s \rangle \oplus AO[r,s] ;$$

$$\Phi(r, s, \gamma) = \langle G_r + \gamma P_r, \ldots, G_s + \gamma P_s \rangle \oplus AO[r,s],$$

де $r \leq s$, $\gamma \in R$. Позначимо через $d_1, \ldots, d_t$ натуральні числа, які задовольняють співвідношенням : $0 = d_1 < \ldots < d_t = m \leq n$.

При дослідженні I-максимальних підалгебр конформної алгебри AC(1,n) ми використаємо метод [3-5], який дозволяє описати I-максимальні підалгебри алгебри Лі групи перетворень псевдоевклідового простору $R_{1,n}$. За допомогою цього методу була проведена, зокрема, класифікація I-максимальних підалгебр рангу n і n-1 алгебри Пуанкаре AP(1,n) [3,6], а також класифікація I-максимальних підалгебр рангу n і n-1 розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$ [3,4]. Цей метод годиться для описання I-максимальних підалгебр конформної алгебри AC(1,n) і не залежить від реалізації цієї алгебри диференціальними операторами першого порядку.

Підалгебри різних класів неспряжені відносно групи C(1,n)- автоморфізмів і кожен з них інваріантний при дії любого автоморфізму. Тому доцільно проводити класифікацію підалгебр кожного класу окремо. При цьому виключимо із розгляду ті підалгебри алгебри AC(1,n), які з точністю до спряженості містять P_0+P_n або P_0.

Теорема 1. Нехай L- максимальна підалгебра рангу n алгебри AC(1,n) першого класу і $L \cap V \subset \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$. Тоді L C(1,n)- спряжена з однією із наступних алгебр:

1) $L_1 = \langle K_1 - P_1 \rangle$, якщо n=1;

2) $L_2 = \langle K_1 - P_1, \ldots, K_n - P_n \rangle$ Ð $AO[1,n]$, якщо n >

3) $L_3 = \langle P_0 + K_0 \rangle$, якщо n=1;

4) $L_4 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1,n]$, якщо $n \geq 2$;

5) $L_5 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1,n-1] \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $n \geq 3$

6) $L_6 = \langle P_0 + K_0 \rangle \oplus AO[1,t-2] \oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1},\ldots,K_n - P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[t-1,n])$, де $t=4,\ldots,n;\ n \geq 4;$

7) $L_7 = (\langle P_1+K_1,\ldots,P_{t-2}+K_{t-2} \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[1,t-2]) \oplus \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta = 0,\ t-1,\ldots,n \rangle$, $t=4,\ldots,n+1;\ n \geq 4;$

8) $L_8 = (\langle P_1+K_1,\ldots,P_{t-2}+K_{t-2} \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[1,t-2] \oplus \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta=0,\ t-1,\ldots,n-1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle$, $t=4,\ldots,n-1;\ n \geq 5;$

9) $L_9 = (\langle P_1+K_1,\ldots,P_{t-2}+K_{t-2} \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[1,t-2]) \oplus \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta=0,t-1,\ldots,t+s-2 \rangle \oplus (\langle K_{t+s-1} - P_{t+s-1},\ldots,K_n - P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta=n+s-1,\ldots,n \rangle$, $t=4,\ldots,n-2,\ s=2,\ldots,n-t;\ n \geq 6;$

10) $L_{10} = \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta=0,1,\ldots,n-1 \rangle \oplus \langle K_n - P_n \rangle,\ n \geq 3;$

11) $L_{11} = \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta=0,1,\ldots,t-2 \rangle \oplus (\langle K_{t-1} - P_{t-1},\ldots,K_n - P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ \langle J_{\alpha\beta};\ \alpha<\beta;\ \alpha,\beta = t-1,\ldots,n \rangle),\ t=4,\ldots,n;\ n \geq 4;$

12) $L_{12} = \langle P_0 + K_0 + \alpha(K_1 - P_1) \rangle,\ 0 < \alpha < 1,\ n=1.$

13) $L \oplus AO(2,k_1)$, де L - незвідна I- максимальна підалгебра рангу $k_2 - 2$ алгебри $AO(k_2)$, $k_1+k_2=n+1,\ k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 3;$

14) $\langle P_1 - K_1 + 2J_{03},\ P_2 + K_2 - K_0 - P_0,\ 2J_{12} + K_3 - P_3 \rangle$.

Доведення.

Позначимо через $Q_1,\ldots,Q_{n+3}$ ортогональний базис псевдоевклідового простору $R_{2,n+1}$, який задовольняє умовам: $(Q_1,Q_2)=1$, $(Q_2,Q_2)=1$, $(Q_3,Q_3)=-1,\ldots,(Q_{n+3},Q_{n+3})=-1$. Тут (Q_i,Q_j) - скалярний добуток векторів Q_i і Q_j $(i,j=1,\ldots,n+3)$. Нехай L деяка підалгебра рангу n алгебри $AO(2,n+1)$ з першого класу, і

$$R_{2,n+1} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s \qquad [4]$$

розклад простору $R_{2,n+1}$ в пряму ортогональну суму незвідних L- підпросторів. Якщо $s=1$, то L є незвідною підалгеброю алгебри $AO(2,n+1)$. У випадку, коли $n+1$- непарне число і $n+1>3$, незвідна підалгебра L алгебри $AO(2,n+1)$ співпадає з $AO(2,n+1)$ [7]. Оскільки ранг алгебри $AO(2,n+1)$ дорівнює $n+2$, а ранг підалгебри L дорівнює n, то розглянутий випадок неможливий. Якщо $n+1=3$, то незвідна підалгебра L алгебри AO(2,3) спряжена з підалгеброю [7]:

$$\langle \Omega_{14}+ \sqrt{3}\,\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\,\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45} \rangle,$$

а значить ранг підалгебри L дорівнює 3, що також неможливо. Якщо $n+1=2k$ парне число, то L спряжена з одною з таких алгебр [7].

1) AO(2,n+1); 2) ASU(1,k);

3) $AS(1,k) \oplus \langle Z \rangle$.

У всіх трьох випадках ранг підалгебри L відмінний від n. Тому в (4) $s\geq 2$. Припустимо, що в розкладі (4) існують два одномірні підпростори V_1 і V_2, які мають різні сигнатури. Можна припустити при цьому, що $V_1=\langle Q_1 \rangle$ і $V_2=\langle Q_3 \rangle$. Але тоді $V_1 \oplus V_2$ містить L- інваріантний ізотропний підпростір $\langle Q_1 + Q_3 \rangle$ або $\langle Q_1 - Q_3 \rangle$, а це неможливо.

Припустимо, що $V_1= \langle Q_1, Q_2, Q_3,..., Q_t \rangle$, де $t \geq 3$, і $L= L_1+...+L_s$- розклад алгебри L в пряму суму незвідних підалгебр $L_1,...,L_s$. В цьому випадку L_1, як незвідна підалгебра алгебри $AO(V_1)$, виділяється прямим доданком в алгебрі L [1]. Отже, L містить підалгебру $\langle \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23} \rangle$, яка спряжена з $\langle \Omega_{12}, \Omega_{1,n+3}, \Omega_{2,n+3} \rangle$. Відповідною їй підалгеброю алгебри AC(1,n) є підалгебра $\langle P_0, K_0, D \rangle$, це неможливо, оскільки за умовою $P_0 \notin L$.

Нехай в розкладі (4) S=3. З попередніх досліджень і на основі теореми Віта, можна припустити, що розклад (4) простору $R_{2,n+1}$ є одним із наступних:

1) $R_{2,n+1}= \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3,...,Q_{n+3} \rangle$;

2) $R_{2,n+1}= \langle Q_1,Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3 \rangle \oplus \langle Q_4 \rangle$, n=1;

3) $R_{2,n+1}= \langle Q_1,Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3,...,Q_{n+2} \rangle \oplus \langle Q_{n+3} \rangle$, $n \geq 2$;

4) $R_{2,n+1}= \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3,...,Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle$, $n \geq 3$;

5) $R_{2,n+1}= \langle Q_1, Q_2 \rangle \oplus \langle Q_3,...,Q_t \rangle \oplus \langle Q_{t+1},...,Q_{n+3} \rangle$, t=4,...,n; $n \geq 4$;

6) $R_{2,n+1}= \langle Q_1, Q_3, Q_4,...,Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1},...,Q_{n+2} \rangle \oplus \langle Q_{n+3} \rangle$, t= 4,...,n+1; $n\geq 4$;

7) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle$, $t=4,\dots n-1$; $n \geq 5$;

8) $R_{2,n+1} = \langle Q_1, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{t+s} \rangle \oplus \langle Q_{t+s+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle$, $t=4,\dots,n-2$; $s=2,\dots,n-t$; $n \geq 6$;

9) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2, Q_3, \dots, Q_{n+1} \rangle \oplus \langle Q_{n+2}, Q_{n+3} \rangle$, $n \geq 3$;

10) $R_{2,n+1} = \langle Q_1 \rangle \oplus \langle Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_t \rangle \oplus \langle Q_{t+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle$, $t=4,\dots,n$; $n \geq 4$.

У випадку 1) $L = \langle \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+2,n+3} \rangle = AO[3, n+3]$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1,n)$ є підалгебра $\langle K_1-P_1 \rangle$, якщо $n=1$ і $\langle K_1-P_1, \dots, K_n-P_n \rangle \supset\!\!\!\!+ AO[1,n]$, якщо $n>1$.

У випадку 2) $L = \langle K_0-P_0 \rangle$. Якщо маємо розклад 3) , то одержуємо підалгебру $L = \langle \Omega_{12} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n+1,n+2} \rangle$. Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1,n)$ є підалгебра $\langle P_0+K_0 \rangle \oplus AO(1,n)$, $n \geq 2$. У випадку 4) $L = \langle \Omega_{12} \rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \dots, \Omega_{n,n+1} \rangle \oplus \langle \Omega_{n+2,n+3} \rangle$, а значить їй відповідає підалгебра $\langle P_0+K_0 \rangle \oplus AO[1,n-1] \oplus \langle K_n-P_n \rangle$, $n \geq 3$. Якщо маємо розклад 5) , то алгебра L належить до виду 6) теореми 1 . У випадку 6) одержуємо таку підалгебру алгебри $AO(2,n+1)$:

$$L = \langle \Omega_{13}, \dots, \Omega_{1t}, \Omega_{34}, \dots, \Omega_{t-1,t} \rangle \oplus \langle \Omega_{2,t+1}, \dots, \Omega_{2,n+2}, \dots, \Omega_{n+1,n+2} \rangle .$$

Відповідною їй підалгеброю алгебри $AC(1,n)$ є підалгебра виду 4) теореми 1. Решту випадків 7)-10) розглядаються аналогічно .

Нехай далі в розкладі 5) $S=2$. Підалгебра L є підпрямою сумою двох незвідних підалгебр L_1 і L_2 , де $L_1 \subset AO(V_1)$, $L_2 \subset AO(V_2)$. Якщо $n=1$, то $L = \langle P_0+K_0 + \alpha(K_1-P_1) \rangle$, $0<\alpha<1$. Якщо $n>1$ і підалгебри L_1 і L_2 неізоморфні , то $L = L_1 \oplus L_2$. При цьому можна вважати , що ранг підалгебри L_1 дорівнює $\dim V_1-2$, а ранг підалгебри L_2 $\dim V_2-1$. Таким чином , підалгебра L відноситься до виду (13) теореми 1. Якщо підалгебри L_1 і L_2 ізоморфні , то $L \neq L_1 \oplus L_2$. В цьому випадку $L_1 = AO(V_1) \cong AO(V_2) = =L_2$. Можна припустити , що $V_1 = \langle Q_1, Q_3, \dots, Q_t \rangle$, $V_2 = \langle Q_2, Q_{t+1}, \dots, Q_{n+3} \rangle$.

Оскільки ранг підалгебри L дорівнює t-1 , то $t=1+n$. Отже , $n=3$, а тому

$L = \langle \Omega_{13} + \Omega_{25}, \Omega_{14} + \Omega_{16}, \Omega_{34} + \Omega_{56} \rangle$.

Відповідною підалгеброю алгебри $AC(1,n)$ є підалгебра $\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+K_0-P_0, 2J_{12}+K_3-P_3 \rangle$. Теорема доведена.

Максимальні класифіковані підалгебри рангу n алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ з точністю до $\widetilde{P}(1,n)$ - спряженості в [4]. Оскільки конформна спряженість більш сильна спряженість, то тут виникає задача класифікації підалгебр алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ з точністю до $C(1,n)$ - спряженості. Дослідження підалгебр алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ на спряженість відносно групи $C(1,n)$ - автоморфізмів було проведено в [8]. З цих результатів, зокрема, випливає: якщо L_1 і L_2 дві довільні підалгебри алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ спряжені відносно групи $C(1,n)$ - автоморфізмів, то $L_1 = \varphi(L_2)$, де $\varphi = \varphi_h \varphi_1$, φ_1 є $\widetilde{P}(1,n)$ автоморфізмом, а φ_h - $C(1,n)$ - автоморфізмом, визначеним елементом $h = \exp\frac{\pi}{4}(K_0 + P_0 + K_n - P_n)$. Автоморфізм φ_h є автоморфізмом алгебри $\langle P_0 + P_n, P_a, G_a, J_{ab}, J_{on}, D \rangle$ ($a < b$; $a,b = 1, 2, ..., n-1$) і діє на її елементи таким чином:

$$h G_a h^{-1} = P_a, \quad h P_a h^{-1} = -G_a, \quad h J_{on} h^{-1} = D,$$

$$h D h^{-1} = -J_{on}, \quad h M h^{-1} = M, \quad h J_{ab} h^{-1} = J_{ab}.$$

Застосовуючи його, наприклад, до алгебри $AE_1[1,n-1] \dashv\!\!\!\!\supset \langle D \rangle$ одержуємо, що розглядувана підалгебра спряжена з $AE[1,n-1] \dashv\!\!\!\!\supset \langle J_{on} \rangle$.

Це дозволяє скоротити перелік підалгебр рангу n алгебри $AC(1,n)$ розгалужуваних з точністю до $\widetilde{P}(1,n)$ - спряженості.

Теорема 2. Нехай L - максимальна підалгабра рангу n алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ другого класу і $L \cap V \subset \langle P_1, ..., P_n \rangle$. Тоді L $C(1,n)$ - спряжена з однією із наступних алгебр:

I. Підалгебри алгебри $AP(1,n)$.

1) $AE[1,n]$ $(n \geq 1)$;

2) $\langle J_{01} \rangle$ $(n=1)$;

3) $AE\,[1,n-1] + \langle J_{0n} \rangle$ $(n>1)$;

4) $AO[0,n]$ $(n\geq 2)$;

5) $AO[0,k] \oplus AE[k+1,n]$ $(k = 2,\dots,n-1\,;\ n\geq 3)$;

II . Підалгебри алгебри $A\widetilde{P}(1,n)$ з ненульовою проекцією на $\langle D \rangle$.

1) $AE[1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n\geq 2)$;

2) $AE[1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$ $(\alpha \neq 0\,;\ n\geq 2)$;

3) $AE[1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + D + M \rangle$ $(n\geq 2)$;

4) $AO[1,n] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$;

5) $(\,AO[1,m] \oplus AE[m+1,n]\,) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$; $(m=2,\dots,n-1\,;\ n\geq 3)$;

6) $(\,AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]\,) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$; $(m=1,\dots,n-2\,;\ n\geq 3)$;

7) $(\,AE_1[1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n\geq 2)$;

8) $(\,AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]\,) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$; $(m=1,\dots,n-2\,;\ n\geq 3\,;\ \alpha \neq 0)$;

9) $AE_1[1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + \alpha D \rangle$; $(n\geq 2\,;\ \alpha \neq 0)$;

10) $(\,AE_1[1,m] \oplus AE[m+1,n-1]\,) \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + D + M \rangle$; $(m=1,\dots,n-2\,;\ n\geq 3)$;

11) $AE_1[1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle J_{0n} + D + M \rangle$; $(n\geq 2)$;

12) $(\,AO[1,m] \oplus AE[m+1,n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle\,) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$; $(m=1,\dots,n-2\,;\ n\geq 3)$;

13) $(\,AO[1,n-1] \oplus \langle J_{0n} \rangle\,) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$ $(n\geq 2)$;

14) $(\,AO[0,m] \oplus AE[m+1,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$; $(m=2,\dots,n-2\,;\ n\geq 4)$;

15) $AO[0,n-1] \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$; $(n\geq 3)$;

16) $(\,\langle G_1 + P_0 - P_n \rangle \oplus AE[2,n-1]\,) \hat{\supset\!\!\!\!+} \langle J_{0n} - 2D \rangle$; $(n\geq 3)$;

17) $\langle G_1 + P_0 - P_2 \rangle \supset\!\!\!\!+ \langle J_{02} - 2D \rangle$; $(n=2)$;

18) $(\,AO[0,m] \oplus AO[m+1,q] \oplus AE[q+1,n]\,) \supset\!\!\!\!+ \langle D \rangle$;

$(m=2,\dots,n-2; q=m+1,\dots,n\,;\ n\geq 4)$;

Література .

1. Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгруповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1991.- 304с.
2. Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука , 1978.- 400с.
3. Фущич В.И., Баранник А.Ф. Максимальные подалгебры ранга n-1 алгебры AP(1,n) и редукция нелинейных волновых уравнений. I// Укр. мат. журн.- 1990.- 42, № 11.- С. 1250-1256.
4. Фущич В.И., Баранник А.Ф. Максимальные подалгебры ранга n-1 алгебры AP(1,n) и редукция нелинейных волновых уравнений. II// Укр. мат. журн.- 1990 - 42, № 12.- С. 1693-1700.
5. Баранник А.Ф., Марченко В.А., Фущич В.И. О редукции и точных решениях нелинейных многомерных уравнений Шредингера // Теорет. и мат. физика.- 1991.- 87, № 2.- С. 220-234.
6. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция общего волнового уравнения кдвумерным уравнениям // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, № 10.- С.
7. Тауфик М.С. О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа.- Ярославль: Ярославль. ун-т, 1980.- С. 86-115.
8. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Связные подгрупы конформной группы C(1,4) // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, № 7-8.- С. 870-884.
9. Джекобсон Н. Алгебры Ли.- М.: Мир, 1964.- 356 с.

Надійшло до редколегії 8.12.1997р.