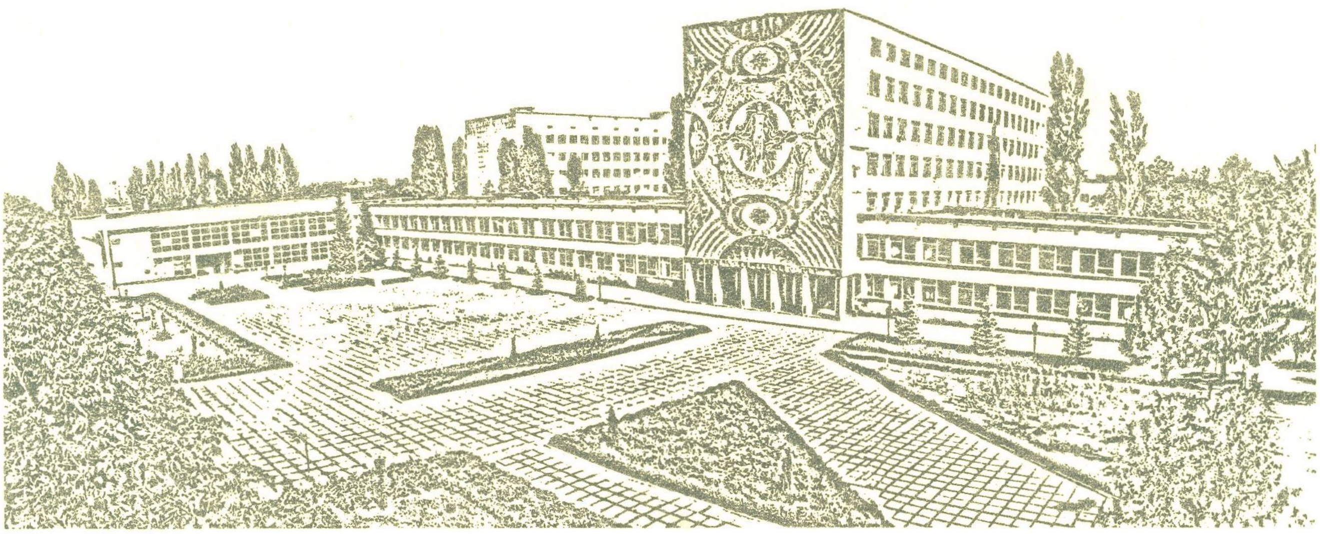
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кіровоградський національний технічний університет

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ КІРОВОГРАДСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ТЕХНІКА В СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОМУ ВИРОБНИЦТВІ, ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ, АВТОМАТИЗАЦІЯ

Випуск 27



Кіровоград · 2014

УДК 681.513.5

Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук
Національний університет харчових технологій
Л.Г. Віхрова, канд. техн. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Синтез оптимального мінімаксного оцінювання та керування лінійними багатовимірними об'єктами за умови неточного і неповного їх вимірювання

Розглянута задача мінімаксного оцінювання та керування лінійними багатовимірними об'єктами за умови неповного і (або) неточного вимірювання деяких координат його стану. Викладені суть та послідовність такого підходу. Сформульована задача синтезу оптимального мінімаксного оцінювання та керування відновленими значеннями у вказаних об'єктах. Наведена матрична матмодель температурного режиму теплового об'єкта (пекарної камери) та сформульований критерій оптимальності спостереження та керування. Викладена послідовність математичних перетворень та замін, щоб шляхом розв'язання оптимізаційної задачі врешті отримати вирази оптимального оцінювання (спостерігача) та керувального діяння (регулятора) за умови неповного або неточного вимірювання координат стану об'єкта у вигляді матриці зворотного зв'язку і матриці коефіцієнтів моделі спостережень координат стану об'єкта. Викладене полегшить застосування в харчовій промисловості методу мінімаксного підходу для практичного розв'язання оптимізаційних задач оцінювання та керування відновленими значеннями параметрів.
оптимізаційна задача, лінійна динамічна система, мінімаксне оцінювання, мінімаксне керування, математична модель, багатовимірний об'єкт керування, допустимі збурення, квадратичний критерій оптимальності, матричне диференціювання, матричний принцип максимуму, функція Гамільтона

Б.Н. Гончаренко, д-р техн. наук
Национальный университет пищевых технологий
Л.Г. Вихрова, канд. техн. наук
Кировоградский национальный технический университет
Синтез оптимального минимаксного оценивания и управления линейными многомерными объектами в условиях неточного и неполного их измерения

Рассмотрена задача минимаксного оценивания и управления линейными многомерными объектами в условиях неполного и (или) неточного измерения некоторых координат его состояния. Изложены суть и последовательность такого подхода. Сформулирована задача синтеза оптимального минимаксного оценивания и управления восстановленными значениями в указанных объектах. Приведена матричная матмодель температурного режима теплового объекта (пекарной камеры) и сформулирован критерий оптимальности наблюдения и управления. Изложена последовательность математических преобразований и замен, чтобы путём решения оптимизационной задачи наконец получить выражения оптимального оценивания (наблюдателя) и управляющего действия (регулятора) в условиях неполного или неточного измерения координат состояния объекта в виде матрицы обратной связи и матрицы коэффициентов модели наблюдений координат состояния объекта. Изложенное должно облегчить применение в пищевой промышленности метода минимаксного подхода для практического решения оптимизационных задач оценивания и управления восстановленными значениями параметров состояний.
оптимизационная задача, линейная динамическая система, минимаксное оценивание, минимаксное управления, математическая модель, многомерный объект управления, допустимые возмущения, квадратичный критерий оптимальности, матричное дифференцирование, матричный принцип максимума, функция Гамильтона

Вступ. При розгляді оптимізаційних задач керування більшість величин (координат стану об'єкта) недоступні для безпосереднього, повного і (або) точного вимірювання, а лише для спостереження або відновлення, причому ці оцінки отримуються також з певними похибками.

Мета та постановка проблеми. Необхідно розглянути задачу мінімаксного спостереження за наявності похибок вимірювання у відповідних вимірювальних каналах (або за умови неповних і неточних вимірювань вектора стану об'єкта), а потім і керування за відновленими значеннями (оцінками) координат стану об'єкта.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо матричну модель лінійного теплового об'єкта керування (наприклад, пекарної камери) [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f_1(t), \\ x(t_0) = Lx^0, \end{cases} \tag{1}$$

де $A(t)$ – матриця коефіцієнтів вектора $x(t)$ стану об'єкта;

$B(t)$ – матриця коефіцієнтів при керуванні $u(t)$;

$K(t)$ – матриця коефіцієнтів вектора $f_1(t)$ похибок вимірювань стану об'єкта;

L – матриця, що визначає, які з координат вектора стану $x(t_0)$ є збуреними в початковий момент t_0.

При цьому спостереження описується співвідношенням:

$$y(t) = C(t)x(t) + M(t)f_2(t), \tag{2}$$

де $C(t)$ – матриця, яка визначає елементи вектора стану об'єкта $x(t)$, які вимірюються з похибками (неповно, неточно); $f_2(t)$ – вектор похибок спостережень; $M(t)$ – матриця коефіцієнтів при складових вектора $f_2(t)$ похибок спостережень [2].

Відносно збурювальних чинників f_1, f_2 і початкових умов x^0 припустимо, що вони обмежені областю S_λ у вигляді гіпереліпсоїда [3]:

$$(x^0, f)\ \mathrm{O}\ S_{\lambda(t)} = \left\{ x^{0T} P_0 x^0 \div \int_{t_0}^{t} f^T(\tau)P(\tau)f(\tau)d\tau \le \lambda^2(t) \right\}, \tag{3}$$

де $P(t)$ – додатно визначені симетричні вагові матриці з відомими коефіцієнтами;

$\lambda(t)$ – відома скалярна функція, що визначає об'єм і динаміку змінювання розміру еліпсоїда.

Критерій (функціонал) оптимальності для математичної моделі (1) при спостереженнях (2) може мати наступний вигляд:

$$I_c(u) = \int_{t_0}^{T} r^T(t)H_c(t)r(t)d(t) + r^T(T)V_c r(T); \tag{4}$$

де $H(t), D(t), V$ – відомі додатно визначені симетричні вагові матриці [4];

$H_c(t) = T^T\,\overline{H}(t)T,\ \overline{V} = T^T\overline{V}T.\ r(t) = Tz(t); \Rightarrow z(t) = T^{-1}r(t) = T\,r(t).$

Як і у випадку повного і точного вимірювання, елементи вагових матриць $H(t), D(t), V$ визначають «вагу» відповідної складової у критерії якості (4).

Оптимальне керування для даного випадку визначається як:

$$u(t) = R(t)\hat{x}(t) + Q(t)y(t), \tag{5}$$

де $R(t)$ – матриця зворотного зв'язку (матриця підсилення);

$Q(t)$ – шукана матриця коефіцієнтів при спостереженнях $y(t)$;

$y(t)$ – спостереження вимірюваних координат стану об'єкта $x(t)$;

$\hat{x}(t)$ – оцінки координат стану об'єкта $x(t)$, отримані на виході фільтра Калмана-Бюсі:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t), \\ \hat{x}(t_0) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $F(t), G(t)$ – невідомі шукані матриці, що визначають структуру мінімаксного фільтра [5].

Оптимальне керування (5) повинно задовольняти умову мінімізації наступного критерію:

$$J_c(u) = \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_\lambda} I_c(u), \tag{7}$$

де $I_c(u)$ – критерій (функціонал) якості, який визначається (4).

Основну задачу мінімаксної оптимізації можна представити так:

$$J_c(u) \to \min_u . \tag{8}$$

Підставимо у (5) співвідношення (2):

$$u(t) = R(t)\hat{x}(t) + Q(t)C(t)x(t) + Q(t)M(t)f_2(t). \tag{9}$$

Повторимо останню операцію і для першого рівняння (6):

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)C(t)x(t) + G(t)M(t)f_2(t). \tag{10}$$

Отримане співвідношення (9) підставимо у перше рівняння (1).

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)Q(t)C(t)x(t) + B(t)R(t)\hat{x}(t) + K(t)f_1(t) + B(t)Q(t)M(t)f_2(t). \tag{11}$$

Покладемо у (5) $Q = 0$, тоді оптимальне керування буде таким:

$$u(t) = R(t)\hat{x}(t). \tag{12}$$

Враховуючи (12), можна сформувати наступну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)R(t)\hat{x}(t) + K(t)f_1(t), \\ \dfrac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)C(t)x(t) + G(t)M(t)f_2(t). \end{cases} \tag{13}$$

Використовуючи позначення, що випливають з поняття блочної матриці (квадратної матриці, кожний елемент якої є квадратною підматрицею меншої, кратної розмірності) систему (13) можна переписати так:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \overline{A(t)}x(t) + \overline{B(t)}f(t), \\ z(t_0) = \overline{L}x^0. \end{cases} \tag{14}$$

Розглянемо матрицю

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} E & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ E & \vdots & -E \end{bmatrix} = T \quad (T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = E) \tag{15}$$

і перетворимо (14) з врахуванням (15):

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = \overline{A(t)}x(t) + \overline{B(t)}f(t), \\ z(t_0) = \overline{L}x^0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dr(t)}{dt} = T\overline{A(t)}T^{-1}r(t) + T\overline{B(t)}f(t), \\ r(t_0) = T\overline{L}x^0. \end{cases} \tag{16}$$

Позначимо $A_c(t) = T\overline{A(t)}T^{-1}$, $B_c(t) = T\overline{B(t)}$, $L_c = T\overline{L}$, тоді отримаємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dr(t)}{dt} = A_c(t)r(t) + B_c(t)f(t), \\ r(t_0) = L_c x^0, \end{cases} \tag{17}$$

де

$$A_c(t) = T\overline{A(t)}T^{-1} = \begin{bmatrix} A(t) + B(t)R(t) & \vdots & -B(t)R(t) \\ \dots & \vdots & \dots \\ A(t) - G(t)C(t) + B(t)R(t) - F(t) & \vdots & -B(t)R(t) + F(t) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$L_c = T\overline{L} = \begin{bmatrix} E & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ E & \vdots & -E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ \dots \\ L \end{bmatrix}, \tag{20}$$

або покомпонентно:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = (A(t)+B(t)R(t))x(t) - B(t)R(t)e(t) + K(t)f_1(t), \\ \dfrac{de(t)}{dt} = (A(t)-G(t)C(t)+B(t)R(t)-F(t))x(t) + (F(t)-B(t)R(t))e(t) + K(t)f_1(t) - \\ -G(t)M(t)f_2(t). \end{cases} \quad (21)$$

Друге рівняння системи (21) описує динаміку похибки оцінювання стану системи. Похибка оцінювання $e(t)$ не залежить від стану системи $x(t)$, а лише від завад $f_1(t)$ і $f_2(t)$. Якщо завади відсутні, тобто, то похибка оцінювання $e(t)$ повинна дорівнювати 0, що можливо лише за умови:

$$A(t)-G(t)C(t)+B(t)R(t)-F(t)=0, \quad (22)$$

звідки, перенісши $-F(t)$ в праву частину рівняння, матимемо:

$$F(t)=A(t)-G(t)C(t)+B(t)R(t). \quad (23)$$

Підстановка (23) у (18) дає:

$$A_c(t)=\begin{bmatrix} A(t)+B(t)R(t) & -B(t)R(t) \\ 0 & A(t)\_G(t)C(t) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

З нерівності Коші-Шварца можна отримати наступне рівняння:

$$\sup_{(x^0,f)\in S_{\lambda(t)}} (a(t),r(t))^2 = \sup_{(x^0,f)\in S_{\lambda(t)}} \left(a^T(t)r(t)\right)^2 = \lambda^2(t)(S(t)a(t),a(t)) = \\ = \lambda^2(t)a^T S(t)a(t), \ \forall a(t), \quad (25)$$

де $S(t)$ задовольняє рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = A_c(t)S(t) + S(t)A_c^T(t) + B_c(t)P^{-1}(t)B_c^T(t), \\ S(t_0) = L_c P_0^{-1} L_c^T. \end{cases} \quad (26)$$

Знайдемо тепер супремум:

$$\sup_{(x^0,f)\, \text{o}\, S_{1}(t)} [r^T(t)H_c(t)r(t)] \le \lambda^2(t)\, tr[S(t)\textstyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i w_i^T] \le \lambda^2(t)\, tr[S(t)H_c(t)]. \quad (27)$$

У виразі (27) сума $\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i w_i^T = H_c(t)$ є не що інше, як спектральний розклад матриці $H_c(t)$. Застосуємо (27) для перетворення (7) з врахуванням (4):

$$J_c(u) = \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} I_c(u) = \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} \left[\int_{t_0}^{T} r^T(t) H_c(t) r(t) dt + r^T(T) V_c r(T) \right] \le$$
$$\le \int_{t_0}^{T} \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} \left[r^T(t) H_c(t) r(t) \right] dt + \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} \left[r^T(T) V_c r(T) \right] \le \tag{28}$$
$$\le \underbrace{\int_{t_0}^{T} \lambda^2(t) tr[S(t) H_c(t)] dt + \lambda^2(T) tr[S(T) V_c]}_{L_c(R(t),G(t))}.$$

і тоді (28) набуває вигляду:

$$J_c(u) \text{ J } L_c(R(t),G(t)). \tag{29}$$

Для врахування похибок оцінювання стану системи до складу $J_c(u)$ (29) введемо в розгляд функціонал вигляду:

$$J_e(\hat{x}) = \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} I_e(\hat{x}), \tag{30}$$

де

$$I_e(\hat{x}) = \int_{t_0}^{T} [x(t) - \hat{x}(t), W(t)(x(t) - \hat{x}(t))] dt = \int_{t_0}^{T} r^T(t) W_c(t) r(t) d(t), \tag{31}$$

де $W_c(t) = T^T \overline{W(t)} T$, а $W(t) = W^T(t) > 0$ – додатно визначена симетрична матриця.

Після підстановки (31) в (30):

$$J_e(\hat{x}) = \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} I_e(\hat{x}) = \sup_{(x^0,f_1,f_2)\in S_\lambda} \int_{t_0}^{T} r^T(t) W_c(t) r(t) dt \le \int_{t_0}^{T} \lambda(t) tr[S(t) W_c(t)] dt. \tag{32}$$

Тоді узагальнений критерій можна представити як суму (29) і (32):

$$L\ R\ t\ ,G\ t\ \ = L_c\ R\ t\ ,G\ t\ \ + L_e\ R\ t\ ,G\ t\ \ =$$
$$= \int_{t_0}^{T} [\lambda^2\ t\ tr\left[S\ t\ \ H_c\ t\ + W_e\ t\ \ \right] dt + \lambda^2(T) tr[S(T) V_c] \tag{33}$$

Таким чином, приходимо до задачі:

$$L(R(t),G(t)) \to \min_{R(t),G(t)} \cdot \tag{34}$$

за умови (26).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо матричний принцип максимуму Понтрягіна і формуємо функцію Гамільтона:

$$\Gamma(R(t),G(t),S(t),\psi(t)) = -\lambda^2(t)tr[S(t)(H_c(t)+W_c(t))]+ \\ +tr[\psi(t)(A_c(t)S(t)+S(t)A_c^T(t)+B_c(t)P^{-1}(t)B_c^T(t)], \tag{35}$$

де $\psi(t)=\psi^T(t)$ – спряжена матриця.Матриці $R(t),G(t)$ знаходяться з умови максимізації функції Гамільтона (35):

$$R(t),G(t):\Gamma(R(t),G(t),S(t),\psi(t)) \to \max_{R(t),G(t)} \cdot \tag{36}$$

Перетворення рівняння для $S(t)$ системи (26) з врахуванням сформованої функції Гамільтона дає такий кінцевий вигляд системі

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = A(t)S(t)+S(t)A^T(t)-S(t)C^T(t)P_2(t)C(t)S(t)+K(t)P_1^{-1}(t)K^T(t), \\ S(t_0)=LP_0^{-1}L^T. \end{cases} \tag{37}$$

Таким чином, на основі векторно-матричних перетворень і з врахуванням заміни $\psi(t) \to -\psi(t)$ врешті одержана матриця керування (зворотного зв'язку або матриця підсилення) в оптимальному керуванні (12);

$$R(t) = -\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t), \tag{38}$$

$$G(t) = S(t)C^T(t)P_2(t), \tag{39}$$

де $\lambda(t)$ – відома скалярна функція;

$D(t)$ – відома додатно визначена симетрична вагова матриця критерію оптимальності (4);

$B(t)$ – матриця коефіцієнтів при керуванні в математичної моделі (1);

$C(t)$ – матриця коефіцієнтів моделі спостережень координат стану об'єкта (2);

$G(t)$ – одна з шуканих матриць фільтру (6), яка визначає його структуру;

$P_2(t)$ – додатно визначена симетрична вагова матриця з відомими коефіцієнтами в області допустимих збурень;

$S(t)$ – матриця, яка задовольняє матричне рівняння (37);

у (t) – спряжена матриця, яка задовольняє наступне матричне рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t)-\psi(t)A(t)+\lambda^{-2}(t)\psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)-\lambda^2(t)H(t); \\ \psi(T)=\lambda^2(T)V, \end{cases} \tag{40}$$

де $H(t), V$ – відомі додатно визначені симетричні вагові матриці критерію оптимальності (4);

Після підстановки (39) і (40) у (23) шукана матриця $F(t)$ фільтра (6), яка визначає його структуру виглядає так:

$$\begin{aligned} F(t) &= A(t) - G(t)C(t) + B(t)R(t) = \\ &= A(t) - S(t)C^T(t)P_2(t)C(t) - \lambda^{-2}(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\psi(t), \end{aligned} \tag{41}$$

де $A(t)$ – матриця коефіцієнтів математичної моделі (1);

При цьому мінімальне значення $L_c(R(t), G(t))$ нерівності (29) визначається як:

$$L_c^{\min}(R(t), G(t)) = \lambda^2(t) tr[S(t)H(t)] + \int_{t_0}^{T} \left\{ \lambda^2(t) tr[S(T)G(t)] + tr\left[S(t)\psi(t)C^T(t)P_2(t)C(t) \right] \right\} dt. \quad 42)$$

Оскільки регулятор (12) побудовано у вигляді оцінки від стану, то похибка оцінювання мінімаксного фільтра (6) визначається за наступною формулою:

$$\delta(\hat{x}_0) = \int_{t_0}^{T} \lambda^2(t) tr[S(T)W(t)] dt, \tag{43}$$

де $W(t) = W^T(t) > 0$ – додатно визначена симетрична матриця в критерії $I_e(\hat{x})$ (32).

Висновки: Розглянуто сучасний принцип оптимального оцінювання (спостереження) на основі мінімаксного підходу в багатовимірних лінійних об'єктах керування, описуваних у просторі стану при неточних або неповних його вимірюваннях та наступного керування відновленими значеннями (оцінками) координат стану об'єкта на основі його математичного опису та сформульованого квадратичного критерію оптимальності. Наведена детальна послідовність здійснення мінімаксного підходу, що має полегшити його практичне застосування в харчовій промисловості. Визначена похибка спостереження (відновлення) мінімаксного фільтра.

Список літератури

1. Гончаренко Б.М. Дослідження мінімаксного керування та спостереження теплових об'єктів сільськогосподарського призначення [Текст] / О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, А.М. Слєзенко// Загальнодержавн. наук.-техн. збірник «Конструювання, виробництво, експлуатація сільськ. господарч. техніки». Вип. 43. – Кіровоград: КНТУ. 2013, с.154 - 162.
2. Кириченко М.Ф. Аналітичне конструювання мінімаксних регуляторів у лінійних системах [Текст] /М.Ф. Кириченко // ДАН УРСР, С.А. - 1978. - №1.
3. Гончаренко Б.М. Аналітичне подання збурень при розв'язуванні задачі оптимізації керування багатовимірним об'єктом [Текст] / Б.М. Гончаренко, А.О. Повзик // Журнал «Наукові праці НУХТ». №.49. – К.: НУХТ. 2013, с. 8 – 13
4. Кириченко Н.Ф. Минимаксный подход к рекуррентному оцениванию состояний линейных динамических систем [Текст] /Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный // Кибернетика. - 1977. - №4. - С. 52 - 55.
5. Кириченко М.Ф. Про мінімаксні оцінки станів лінійних динамічних систем [Текст] /Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечний // ДАН УРСР, С.А. - 1977. - №7

Boris Goncharenko
National University of Food Technologies
Larisa Vihrova
Kirovograd National Technical University

Synthesis of optimal minimax estimation and control of linear multidimensional objects in inaccurate and conditions of measurement

The problem of minimax estimation and control of linear multi-dimensional objects in the part-time and (or) non-precision coordinate measuring some of its state. Set out the nature and sequence of such an approach.

The problem of synthesis of optimal minimax estimation and management of recovery values in the specified object. See matrix matmodel temperature thermal object (baking chamber) and criteria for optimal monitoring and management. Described the sequence of mathematical transformations and replacements that by solving the optimization problem to finally get the optimal estimation of expression (the observer) and the control action (controller) in an incomplete or inaccurate measurement of the coordinates of the object state in the form of a matrix of feedback and observations of the coefficient matrix model coordinates of the object state.

Stated have to facilitate the application of the method minimax approach for practical solutions optimizational estimation problems and recovery management parameter values of states in the food industry.
optimization problems, linear dynamical system, minimax estimation, Minimax control mathematical model, multidimensional object management admissible perturbations, quadratic optimality criterion, matrix differentiation, matrix maximum principle of Hamilton

Одержана 05.04.14