МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П.ДРАГОМАНОВА

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ "АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇЇ НАВЧАННЯ У ВИЩІЙ ШКОЛІ"

17-18 грудня 2020 р.

Київ, НПУ імені М.П. Драгоманова

УДК 51+378+37(08)

Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі: Збірник матеріалів Всеукраїнської наукової конференції (17-18 грудня 2020 р.). – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2021. – 88 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою
Фізико-математичного факультету
Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова
(протокол №5 від 01.02.2021)

Організаційний комітет

Співголови Оргкомітету:

Працьовитий Микола Вікторович, декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, доктор фізико-математичних наук, професор, академік АНВШ України

Юрик Іван Іванович, завідувач кафедри вищої математики імені професора Можара В.І. Національного університету харчових технологій, кандидат фізико-математичних наук, професор.

Члени Оргкомітету:

Гончаренко Яніна Володимирівна, завідувач кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова,, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Нікіфоров Роман Олексійович, завідувач кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Требенко Оксана Олександрівна, заступник декана фізико-математичного факультету, доцент кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Маслова Юлія Петрівна, науковий співробітник відділу організації наукових досліджень Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, кандидат фізико-математичних наук;

Бондаренко Ольга Ігорівна, асистент кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова;

Ратушняк Софія Петрівна, аспірант Інституту математики Національної академії наук України, асистент кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова.

Технічне редагування, верстка: *Маслова Ю.П.*

ЗМІСТ

Секція «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ»

Секція 2. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ...48

Секція

«Актуальні проблеми математики»

ПРО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

$$u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u$$

А.Ф. Баранник
Інститут математики Поморської академії, Слупськ, Польща
Т.А. Баранник
Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г.Короленка
І.І. Юрик
Національний університет харчових технологій, Київ

Розглядається задача побудови точних розв'язків нелінійного рівняння гіперболічного типу

$$u_{tt} = a(t)uu_{xx} + b(t)u_x^2 + c(t)u\,, \tag{1}$$

де коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ є функціями від t.

У роботах [1–4] для рівнянь з поліномічною нелінійністю використовувався метод побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних

$$u = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x)\,, \tag{2}$$

який ґрунтується на відшуканні скінченновимірних підпросторів, інваріантних відносно відповідного диференціального оператора. При цьому система координатних функцій $\varphi_i(x)$ задавалася апріорно, а для визначення функцій $\psi_i(t)$ застосовувався метод невизначених коефіцієнтів. У такий спосіб були отримані наступні системи координатних функцій для рівняння (1) [4]: 1, x, x^2, якщо $a(t)$ і $b(t)$ довільні функції; 1, x, x^2, x^3, якщо

$$a(t) = -\frac{3}{2}b(t)\text{; } 1, x, x^2, x^3, x^4, \text{ якщо } a(t) = -\frac{4}{3}b(t)\,.$$

Явне задання системи координатних функцій значно спрощує процедуру побудови точних розв'язків, але не гарантує відшукання всіх розв'язків виду (2).

У роботах [6, 7] для пошуку точних розв'язків рівняння (1) використовувалася підстановка виду

$$u = d(x)w(t) + f(t,x)\,, \tag{3}$$

де невідомі функції $d(x)$ і $f(t,x)$ визначалися з умови, що підстановка (3) редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w(t)$. За допомогою підстановки (3) знайдені нові системи координатних функцій для точних розв'язків рівняння (1). Так, у випадку $a(t) = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}b(t)$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0,1,2,3$, систему координатних функцій утворюють функції x^2, x^α, а якщо $a(t) = -2b(t)$, то таку систему утворюють функції x^2, $x^2 \ln|x|$.

Таким чином, відшукання систем координатних функцій зводить задачу побудови точних розв'язків рівняння (1) до інтегрування відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Нами запропоновано ефективний метод інтегрування редукованих систем. Показано, зокрема, що інтегрування таких систем зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$w_1'' = \Phi_1(t)w_1\,,\quad w_2'' = \Phi_2(t)w_2\,, \tag{4}$$

де $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ є довільними наперед заданими функціями.. Інтегровні рівняння такого типу добре вивчені. До них належать, наприклад, узагальнене рівняння Лежандра, вироджене гіпергеометричне рівняння, а також Рівняння Бесселя і рівняння Матьє. Довільний вибір функцій $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ дозволяє будувати розв'язки, що мають наперед задані властивості.

Метод побудови точних розв'язків рівняння (1), викладений в пп. 2 і 3, можна застосувати до побудови точних розв'язків нелінійного рівняння

$$u_{tt} = auu_{xx} + f(t)u_x^2 + bf(t)u^2 + g(t)u + h(t)\,, \tag{26}$$

де коефіцієнти $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ є функціями від t, а коефіцієнти a і b є сталі, відмінні від нуля. Рівняння (26) вивчалося в [5], а випадок $f = a$, $g = const$, $h = const$ — в [2]. В [5] визначені всі підстановки виду

$$u = w_1(t) + d(x)w_2(t),$$

які редукують (26) до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з невідомими функціями $w_1(t)$, $w_2(t)$. Редуковані системи мають такий самий вигляд, що і системи, наведені в пп. 2 і 3, а тому їх інтегрування проводиться аналогічно.

Список використаних джерел:

1. Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1994. том 34, № 3. С. 373–383.

2. Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh-A-Mathematics*: Vol. 125, No. 2. Edinburgh: The Society, 1974-, 1995. P. 225–246.

3. Галактионов В. А., Посашков С. А., Свирщевский С. Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями. *Дифференц. уравнения*. 1995. Том 31, № 2. С. 253–261.

4. Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. CRC Press, 2006.

5. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. CRC press, 2004.

6. Barannyk A., Barannyk T., Yuryk I. Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg–de Vries type. *Reports on Mathematical Physics*. 2011. Vol. 68, P. 97–105.

7. Barannyk A. F., Barannyk T. A., Yuryk I. I. Generalized Separation of Variables for Nonlinear Equation $u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2$. *Reports on Mathematical Physics*. 2013. Vol. 71. P. 1–13.

КАНТОРІВСЬКА ДВІЙКОВО-ФІБОНАЧЧІЄВА СИСТЕМА ЧИСЛЕННЯ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

Ольга Бондаренко

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Нагадаємо, що *канторівська система числення* визначається послідовністю натуральних чисел (s_n), $2 \le s_n$, і послідовністю алфавітів $A_{s_n} \equiv \{0,1,\dots,s_n - 1\}, n = 1,2,\dots$.

Ці засоби дозволяють будь-яке число x подати у вигляді:

$$[0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}, \qquad (1)$$

де $s_n = 2^{\varphi_n}$, (φ_n) - класична *послідовність Фібоначчі*: $\varphi_1 = 1 = \varphi_2$, $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$, $\alpha_n \in A_{s_n}$.

Нагадаємо, що існують числа, які мають два Δ-зображення. Вони називаються *Δ-бінарними*. Це числа з зображеннями $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m (0)}$ і $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m | c_m - 1 | (s_{m+k} - 1)}$, де $(s_{m+k}) \in \Omega_m = A_{s_m} \times A_{s_{m+1}} \times \dots \times A_{s_{m+k}} \times \dots$. Таких чисел зліченна всюди щільна в $[0;1]$ множина. Решта чисел мають єдине Δ-зображення і називаються *Δ-унарними*.

Циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 \dots c_m}$ всіх чисел x, які мають зображення $\Delta_{c_1 \dots c_m d_1 d_2 \dots}$, де $(d_k) \in \Omega$.

Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}$ є відрізком з кінцями:

$$a = \frac{c_1}{s_1} + \frac{c_2}{s_1 s_2} + \dots + \frac{c_m}{s_1 s_2 \dots s_m} = \Delta_{c_1 \dots c_m (0)},$$

$$b = a + \frac{s_{m+1}-1}{s_1 \dots s_m s_{m+1}} + \frac{s_{m+2}-1}{s_1 \dots s_{m+1} s_{m+2}} + \dots = \Delta_{c_1 \dots c_m (s_{m+k}-1)},$$

який має довжину $|\Delta_{c_1 \dots c_m}| = \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_m}$. А, отже, основне метричне відношення має вигляд

$$\frac{|\Delta_{c_1 \dots c_m i}|}{|\Delta_{c_1 \dots c_m}|} = \frac{1}{s_{m+1}}.$$

Воно не залежить від основи $c_1 \dots c_m$ циліндра і не залежить від останньої цифри i, а залежить лише від рангу циліндра, тобто числа m.

Зауважимо, що кожне Δ-бінарне число є кінцем двох послідовностей циліндрів всеможливих рангів, починаючи з деякого.

Нехай задано $\overrightarrow{g_k} = (g_{0k}, g_{1k}, \dots, g_{s_k-1,k})$ - послідовність векторів, координати яких задовольняють умови:

1) $|g_{ik}| < 1$,
2) $g_{0k} > 0$,
3) $\delta_{ik} \equiv g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{i-1,k} > 0, i \in A_{s_k}$,
4) $g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{s_k-1,k} = 1, k \in N$,
5) $\prod_{i=1}^{\infty} g_{c_i i} = 0, \forall\, (c_i) \in \Omega$.

Очевидно, що $\delta_{i+1,k} = \delta_{ik} + j_{ik}$ для будь-яких $i \in A_{s_k}, k \in N$.

Об'єктом дослідження є функція $y = \phi(x)$, означена рівністю

$$\phi(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}) = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i i} \right) \equiv \Delta^{\phi}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}. \tag{2}$$

Коректність означення функції є наслідком двох умов:

1) абсолютної збіжності ряду (2),
2) рівності $\Phi(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m (0)}) = \Phi(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [c_m - 1] (s_{m+k}-1)})$.

Лема 1. Приріст $\mu_\phi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}) \equiv \Phi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m (s_{m+k}-1)}) - \Phi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m (0)})$ функції Φ на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$ обчислюється за формулою

$$\mu_\phi(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}) = \prod_{i=1}^{m} j_{c_i i}. \tag{3}$$

Властивості неперервності та монотонності:

Теорема 1. Функція $y = \Phi(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка $[0;1]$; строго зростаючою, якщо $g_{ik} > 0$ для будь-яких $i \in A_{s_k}, k \in N$; сталою на всіх циліндрах виду $\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} i}$, якщо $g_{ik} = 0$.

Наслідок 1. Областю визначення і множеною значень функції $\Phi(x) \in [0;1]$, тобто $D(\Phi(x)) = [0;1] = E(\Phi)$.

Наслідок 2. Нехай F_k – об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки нестабільності функції Φ, тобто

$$F_k \equiv \bigcup_{i_1 : g_{i_1 \neq 0}} \dots \bigcup_{i_k : g_{i_k k \neq 0}} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

Варіаційні властивості функції:

Лема 2. Якщо $g_{ik} > 0$ для всіх $i \in A_{s_k}$ і $k \geq m$, то функція $\Phi(x)$ є монотонною на кожному циліндрі m-го рангу, причому на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}$ є

1) строго зростаючою, якщо $P \equiv \prod_{i=1}^{m} g_{c_i} > 0$;
2) строго спадною, якщо $P < 0$;
3) сталою, якщо $P = 0$.

Наслідок 3. Функція $\Phi(x)$ свого найбільшого і найменшого значення на циліндрі набуває на йог кінцях.

Наслідок 4. Точки максимумів та мінімумів функції є Δ-*бінарними* числами.

Теорема 2. Якщо матриця $\|g_{ik}\|$ не містить нулів, але має нескінченну кількість від'ємних елементів, то функція $\Phi(x)$ є ніде не монотонною.

Теорема 3. Варіація $V(\Phi)$ функції Φ на відрізку $[0;1]$ обчислюється за формулою

$$V(\Phi) = \prod_{k=1}^{\infty} W_k, \tag{4}$$

де $W_k = g_{0k} + |g_{1k}| + \cdots + |g_{s_k-1,k}|$.

Наслідок 5. Функція Φ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - W_k).$$

У доповіді пропонуються результати продовження дослідження в напрямі задання функцій перетворювачем цифр (одного або різних) зображення чисел, зокрема за допомогою автоматів з різною масивністю пам'яті, інверсуванням цифр зображення числа, «проектування» цифр одного зображення числа в інше.

Список використаних джерел:

1. *Cantor G.* Uber die einfachen Zahlesysteme // Z. Math. Phys. – 1869. – 10, Bd. 14. – P. 121-128.
2. *Працьовитий М.В.* Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студентські фізико-математичні етюди. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 10, №8. – С. 6-18.
3. *Ралко Ю.В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.мат. науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2009. – 10, №10. – С. 132-140.

ПРО DP-ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПОРОДЖЕНІ ICS-РОЗКЛАДАМИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Ольга Васькова

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Григорій Торбін

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Доповідь присвячена результатам досліджень перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича (див. [1, 2, 7]), і породжені знакозмінними розкладами Кантора.

Нехай $\{n_k\}-$ послідовність натуральних чисел, $n_k \geq 2$. Добре відомо, що довільне дійсне число $x \in [0;1]$ можна представити у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} =: \Delta^C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{1}$$

де $\alpha_k = \alpha_k(x) \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}$. Розклад x у форматі (1) називається розкладом Кантора числа x (див. [3, 5]).

Розглянемо фіксовану послідовність $\gamma = \{\gamma_k\}$, $\gamma_k \in \{-1;1\}$ і суму виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}, \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}. \tag{2}$$

Нескладно показати, що довільне число x з проміжку $[A(\gamma); B(\gamma)]$ може бути представлене у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cdot \frac{\alpha_k(x)}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}. \quad (3)$$

Дане зображення (з точністю до зсуву) еквівалентне до $ICS -$ зображення дійсних чисел (див. [4, 6]) і містить як часткові випадки класичні розклади Кантора (у цьому випадку $\gamma_k = 1, \forall k \in N$) та знакопочережні розклади Кантора ($\gamma_k = (-1)^{k+1}, \forall k \in N$).

Нехай

$$x = \Delta^{ICS}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} - \quad (4)$$

$- ICS$ розклад Кантора і

$$x = \Delta^{C}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} - \quad (5)$$

$-$ класичний розклад Кантора, побудовані за однією і тією ж послідовністю $\{n_k\}$.

Нехай $\varphi(x) -$ відображення з $[0;1]$ в $[0;1]$, яке визначене таким чином

$$\varphi(x) = \varphi\left(\Delta^{C}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}\right) = \Delta^{ICS}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} \quad (6)$$

Теорема. Для довільного вибору послідовності $\{n_k\}\ (n_k \geq 2)$ відображення φ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича довільної підмножини одиничного відрізка.

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ЕКОНОМІЧНИХ РИЗИКІВ ДІЯЛЬНОСТІ МАЛОГО ПІДПРИЄМСТВА

Валерія Високіх
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова
Руслана Корж
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

На сьогодні імітаційне моделювання один з найпоширеніших методів дослідження складних фінансових та економічних систем. Він дозволяє отримувати та аналізувати великі набори статистичних даних за допомогою їх комп’ютерного моделювання, знаючи тільки тип розподілу випадкової величини та основні параметри.

За допомогою побудови імітаційної моделі можна оцінити наслідки прийнятих управлінських рішень, проаналізувати на чуттєвість до зміни визначених параметрів (показників), здійснити їх ранжування за ступенем значущості або визначити їх необхідне значення для досягнення цільового результату [1, с. 50].

В імітаційному моделювання реальних процесів виникає необхідність моделювати як випадкові події так і випадкові величини. В нашій роботі ми використовували обидва підходи.

Імітаційне моделювання значень основних показників діяльності підприємства в різних зовнішньоекономічних ситуаціях

В роботі ми розглянули модель малого підприємства з продажу квітів. На основі порівняльного аналізу з існуючими аналогами було виділено основні показники для моделювання: прибуток від реалізації, витрати на закупівлю товарів, витрати на оплату оренди та комунальних послуг та витрати на оплату праці.

Всі показники розглядались як випадкові величини. Для кожного показника було встановлено тип розподілу та його основні параметри:

- прибуток від реалізації характеризується нормальним розподілом з параметрами N(71;11), оскільки прибуток може коливатися відносно середнього показника, в залежності від сезонності;
- витрати на закупівлю товарів задаються рівномірним розподілом на відрізку [23; 33], оскільки закупівля товару відбувається в фіксованих межах, а отже вибраний розподіл є допустимим;
- витрати на оплату оренди та комунальних послуг задаються нормальним розподілом з параметрами N(15;3);

- витрати на оплату праці задаються рівномірним розподілом на проміжку [5; 7], оскільки заробітна плата має фіксовану ставку.

Початкова інвестиція в запуск діяльності підприємства становить 70 тис. грн.

Діяльність підприємства ми розглядали для трьох типів зовнішньоекономічних умов:

- сприятливі умови (з ймовірністю настання 0,3),
- нейтральні (0,6);
- несприятливі (0,1).

Значення ймовірностей є модельними, вони були обрані з погляду на економічну ситуацію в країні за минулі роки. На нашу думку, їх необхідно встановлювати методом експертної оцінки.

Для кожної з ситуацій були передбачені певні зміни параметрів розподілів економічних показників.

На першому етапі моделювалась повна група випадкових подій, що відповідала реалізації кожної з зовнішньоекономічних ситуацій.

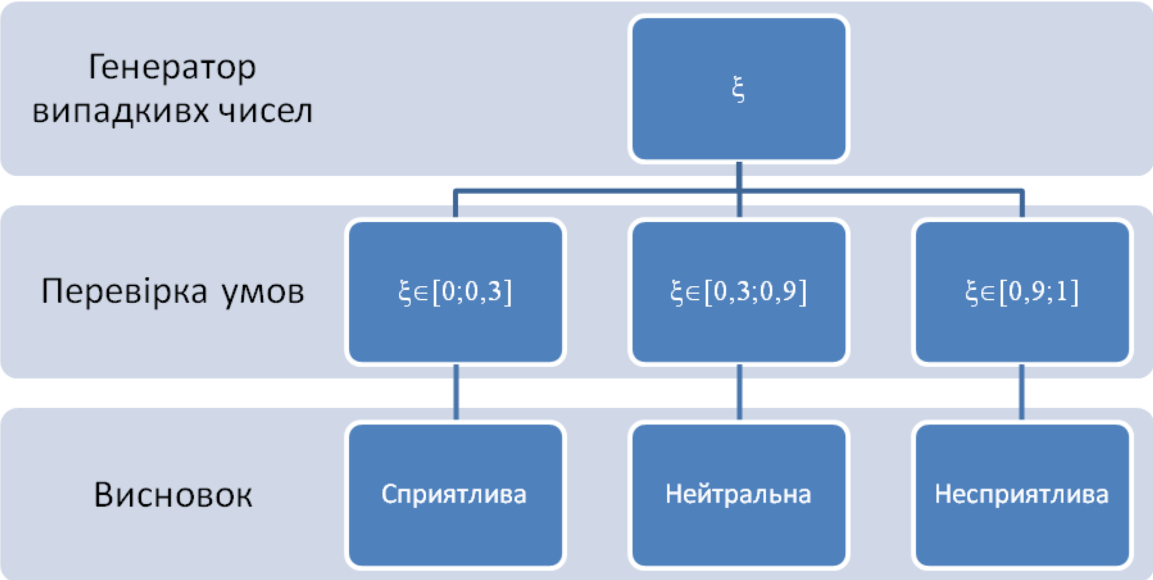


Рис. 1. Блок-схема моделювання настання подій, що відповідають зовнішньоекономічним умовам

За вказаним алгоритмом нами було проведено 20 випробувань. В кожному випробуванні фіксувалось настання певної події і в залежності від цього моделювались значення виділених економічних показників.

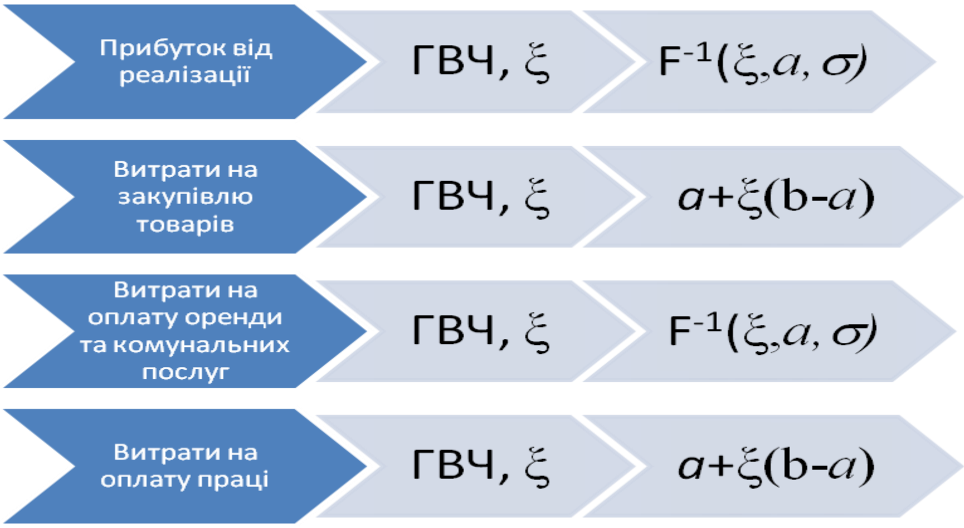


Рис. 2. Блок-схема моделювання значень випадкових величин

Для отриманих виборок були обчислені такі характеристики, як середньоквадратичне відхилення та коефіцієнт варіації.

Аналіз показників економічного ризику

Для аналізу показників були застосовані наступні методи:

1. Крива економічного ризику.
2. Аналітичний метод.
3. Методи теорії ігор.

Крива економічного ризику

Rmin	39,9393732
Rmax	60,0520156

Витрати	Частота	Відносна часто	Зони ризику
[39,93937316; 44,99968422)	7	0,35	Зона мінімального ризику
[44,99968422; 49,21540895)	6	0,3	Зона допустимого ризику
[49,21540895; 53,77352853)	5	0,25	Зона допустимого ризику
[53,77352853; 60,05201559]	2	0,1	Зона підвищеного ризику
	20		

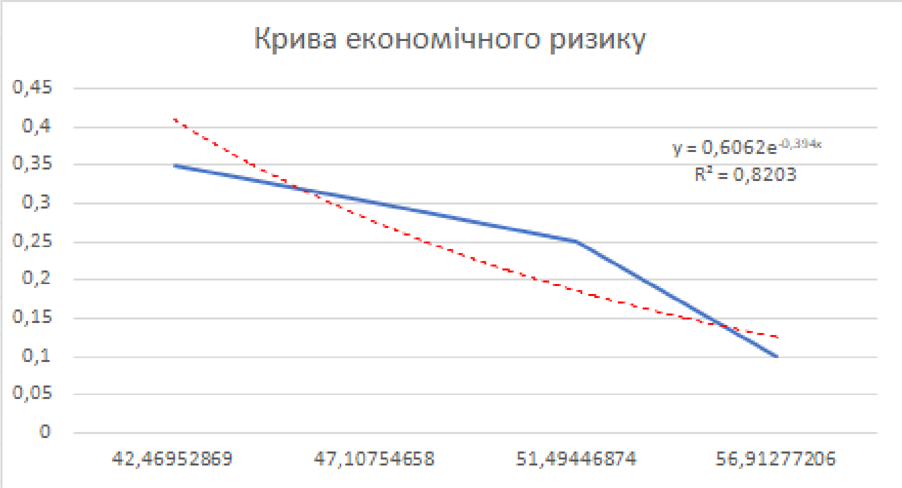


Рис. 3. Побудова кривої економічного ризику

Для побудови кривої економічного ризику отримані значення витрат були розбиті на зони мінімального, допустимого, підвищеного та критичного ризиків. На основі обчислений статистичних ймовірностей було апроксимовано криву експоненційного типу (рис. 3), яка встановлює зв’язок між обсягами витрат на відповідними значеннями ймовірностей.

Аналітичний метод

Для обчислення чистої теперішньої вартості проекту ми величину дисконтування 9% і визначили величину

$$NPV = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r)^t} - \sum_{i=0}^{n} \frac{I_t}{(1+r)^t}.$$

Оскільки NPV = 169,26 > 0, а індекс окупності PI = 1,55 > 1 наш проект не є ризиковим і має гарні показники ефективності. Нами було також розраховано період окупності, який ставить 3 місяці та диконтований період окупності, який становить 0, 29 року (106 днів).

Методи теорії ігор

Нами були використані два критерії – критерій Вальда та критерій Байєса, які передбачають вибір однієї з наявних стратегій за відсутності інформації про умови зовнішнього середовища (критерій Вальда) та за наявності інформації про відповідний розподіл ймовірностей.

В нашому випадку обидва критерії продемонстрували перевагу першої стратегії – збільшення обсягів виробництва.

40	Методом теорії ігор									
41		Спр	Нейтр	Неспр						
42	Збільшити обсяги виробництва	87	79	68						
43	Зменшити витрати на оплату праці	83	70	63						
44	Підняття прибутку, за рахунок збільшення цін	89	75	66						
45	Формування резерву	85	72	64						
46		q1	q2	q3						
47		0,3	0,4	0,3						
48	Критерій Байєса									
49	M1	78,1				x1	x2	x3	x4	
50	M2	71,8				1	0	0	0	
51	M3	76,5				t1	t2	t3	t4	
52	M4	73,5				0,01470588	0	0	0	
53										
54	Критерій Вальда					z=	0,01470588		v	68
55	альфа	макс(68;63;66;64)		68						
56	бета	мин(89;79;68)		68		1,27941176	1,16176471	1		
57	Обираємо першу стратегію: Збільшити обсяги виробництва					>=1	>=1	>=1		

Рис. 4. Застосування методів теорії ігор

Висновки. Методами імітаційного моделювання нами було згенеровано ряд статистичних даних щодо діяльності малого підприємства з продажу квітів. На основі отриманих даних було проаналізовано ризикованість діяльності підприємства з врахуванням трьох типів зовнішньоекономічних умов та обрано оптимальну стратегію його розвитку. Зауважимо також, що описаний нами метод є гнучким і дозволяє легко змінювати вхідні параметри моделі і отримувати нові результати.

Список використаних джерел

1. Томашевський В. М. Моделювання систем / В. М. Томашевський. – К. : Видавнича група BHV, 2005. – 352 с.
2. Бутка М. П. Теорія прийняття рішень : підруч. / М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко. – К. : «Центр учбової літератури», 2015. – 360 с.
3. Моделювання економічних процесів : навч. посіб. / [П. І. Островський, О. М. Гострик, Т. П. Добрунік, О.В. Радова]. – Одеса : ОНЕУ, 2012. – 132 с.

ДОВЕДЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ СТАТИСТИЧНОЇ ОЦІНКИ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ

Яніна Гончаренко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Наталія Дивляш

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Отримання статистичних оцінок невідомих параметрів розподілів ймовірностей на основі вибіркових спостережень – одна з найпоширеніших задач математичної статистики. Від статистичних оцінок як правило вимагаються, щоб вони задовольняли умови незміщеності, консистентності та ефективності. Існує багато методів отримання оцінок та дослідження їх властивостей, але практично всі відомі методи розраховані на застосування в класах дискретних або абсолютно неперервних розподілів. В класі сингулярних розподілів дані задачі практично не розглядались.

В даній роботі узагальнено результати статті [1] і представлено метод обґрунтування ефективності статистичної оцінки отриманої модифікованим методом максимальної правдоподібності для одного класу сингулярних розподілів.

Розглянемо багатопараметричний клас розподілів, породжений випадковою величиною

$$\varsigma = \Delta^{Q_s}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots} = \beta_{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\eta_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\eta_j}\right), \text{ де } \beta_{\eta_k} = \sum_{i=0}^{\eta_k - 1} q_i ,$$

$Q_s = (q_0, q_1, ..., q_{s-1})$, $0 \le q_i \le 1$, $\sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$, $s \ge 2$, з незалежними однаково розподіленими Q_s-цифрами η_i, що набувають значень 0, 1, …, s-1, з ймовірностями $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$ відповідно, причому $0 \le p_i \le 1$, $\sum_{i=0}^{s-1} p_i = 1$.

Функцію розподілу такої випадкової величини можна записати у вигляді [1]:

$$F_{\varsigma}(x) = b_{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\eta_k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\eta_j}, \quad (1)$$

де $b_{\eta_k} = \sum_{i=0}^{\eta_k - 1} p_i$, $b_0 = 0$, η_k – *k*-та цифра в Q_s-розкладі *x*.

Позначивши через ρ_i – статистичну оцінку p_i, $i = \overline{0, s-2}$, отримаємо клас багато параметричних розподілів $F(x, \rho_0, \rho_1, ..., \rho_{s-2})$.

В роботі [2] було розглянуто клас однопараметричних розподілів, породжених розподілом випадкової величини з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами: $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{2^k}$, де η_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_0 та $p_1 = 1 - p_0$, $p_0 \in [0;1]$, відповідно. При цьому в якості параметра було прийнято $P\{\eta_k = 1\} = p_1$. Для такого класу розподілів, було запропоновано модифікацію методу максимальної правдоподібності, отримано за допомогою нього оцінку невідомого параметра і доведено її незміщеність, конзистентність та ефективність.

В даній роботі пропонується розв'язання аналогічної задачі для багатопараметричного розподілу, породженого випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими цифрами свого Q_s-зображення.

Позначимо $N_j(x, m)$ – кількість цифр *j*, що зустрічається в Q_s-розкладі *x* до *m*-го місця включно.

Доведено наступне твердження:

Теорема 1. Оцінка $\hat{\rho}_j = (mn)^{-1} \sum_{i=1}^{n} N_j(x_i, m)$, $j = \overline{0, s-2}$ є незміщеною та консистентною оцінкою параметра ρ_j.

Далі постало питання про ефективність такої оцінки. Цю властивість досить складно довести, використовучи одцінки дисперсії, що існують для дискртених та абсолютно неперервних розподілів. Тому для доведення ефективності спочатку було розглянуто статистику (функцію від вибірки):

$$T(X_n) = (T_0, T_1, ..., T_{s-2}), \text{ де } T_j = \sum_{i=1}^{n} N_j(x_i, m), \quad j = \overline{0, s-2}. \quad (2)$$

Показавши, що умовний розподіл $P\left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \left(\varsigma_i \in \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m}\right) \middle| T(\varsigma_i) = \overline{k_0} \right\}$, де ς_i – випадкова величина, щоо має розподіл типу (1), $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m}$ – циліндричний відрізок рангу m, $\overline{k_0} = (k_0, k_1, ..., k_{s-2})$, $k_j \in \{0, 1, ..., mn\}$, не залежить від параметра ρ, було доведено твердження:

Теорема 2. Статистика (2) є достатньою для оцінки параметра ρ.

Також потрібно було довести, що статистика (2) є повною. Для доведення повноти статистики (2) необхідно було показати, що система функцій $y(\overline{k}) = y(k_0, k_1, ..., k_{s-2})$ є лінійно незалежною, тобто система рівнянь виду:

$$\sum_{\overline{k}} y(\overline{k}) C_{mn}^{\overline{k}} \rho_0^{k_0} \rho_1^{k_1} ... \rho_{s-2}^{k_{s-2}} (1 - \rho_0 - \rho_1 - ... - \rho_{s-2})^{mn - k_0 - k_1 - ... - k_{s-2}} = 0 \quad \forall \rho_j \in (0;1),$$

де $y(\overline{k}) = y(k_0, k_1, ..., k_{s-2})$, $k_i \in \{0, ..., mn\}$, має єдиний (нульовий) розв'язок. Розглянувши $(mn+1)^{s-1}$ довільних фіксованих значень $\rho_t = (\rho_{0,t}, \rho_{1,t}, ..., \rho_{s-2,t})$, $\rho_{i,t} \in (0;1)$, та підставивши ці значення в останню рівність, отримали систему відносно $y(\overline{k})$ однорідних рівнянь виду:

$$\sum_{\overline{k}} \sum_{\rho_e} y(\overline{k}) C_{mn}^{\overline{k}} \rho_{0,t}^{k_0} \rho_{1,t}^{k_1} ... \rho_{s-2,t}^{k_{s-2}} (1 - \rho_{0,t} - \rho_{1,t} - ... - \rho_{s-2,t})^{mn - k_0 - k_1 - ... - k_{s-2}} = 0,$$

де $t = \overline{0, (mn+1)^{s-1} - 1}$, $\overline{k_0} = (k_0, k_1, ..., k_{s-2})$, $k_j \in \{0, 1, ..., mn\}$, $\overline{\rho_t} = (\rho_{0,t}, \rho_{1,t}, ..., \rho_{s-2,t})$, $\rho_{i,t} \in (0;1)$, $i = \overline{0, s-2}$.

Дослідивши визначник основної материці даної системи, було показано, що при $\rho_{i,t} \in (0;1)$ він відмінний від нуля.

Враховуючи це та відоме твердження про достатню повну статистику [3, С.178], була доведена основна теорема роботи.

Теорема3. Оцінка $\hat{\rho}_j = (mn)^{-1} \sum_{i=1}^{n} N_j(x_i, m)$, $j = \overline{0, s-2}$ є ефективною оцінкою параметра ρ_j.

Список використаних джерел

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. Гончаренко Я. В., Дивляш Н. В. Статистичні методи оцінки параметра для одного однопараметричного класу сингулярних розподілів салемівського типу. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014, 16(1). – с. 81-94.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1984. – 144с.

РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНОЇ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНОЇ З ДОДАТНИМИ РЯДАМИ ЛЮРОТА

Яніна Гончаренко
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
Євгенія Калашнікова
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Ряд виду

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{(a_1+1)a_1(a_2+1)} + \cdots + \frac{1}{(a_1+1)a_1 \dots (a_{n-1}+1)a_{n-1}(a_n+1)} + \cdots, \qquad (1)$$

де (a_n) – послідовність натуральних чисел, називається додатним *рядом Люрота*.

У 1883 р. Люрот [1] довів, що будь-яке число $x \in (0; 1]$ розкладається в ряд такого виду і якщо x дорівнює значенню ряду (1), то це скорочено записується: $x = \Delta^L_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$.

Нехай (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, що мають розподіли

$$P\{\xi_n = i\} = p_{in} \geq 0, \; p_{1n} + p_{2n} + \cdots + p_{in} + \cdots = 1.$$

Розподіл випадкової величини $\xi = \Delta^L_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots}$ вивчався в роботах [5,6], де вивчено його лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної і сингулярної компонент). Відомий також критерій канторовості розподілу випадкової величини ξ.

Нашим основним об'єктом розгляду є випадкова величина $Y = F_\xi(X)$, де $F_\xi(x)$ – функція розподілу випадкової величина ξ з розподілом канторівського типу, X – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$. Нас цікавить лебегівська структура розподілу Y, її спектральні властивості, тополого-метричні властивості неперервного спектра, числові характеристики.

Теорема. Якщо існує скінченна кількість таких $c_i \neq 1,\ i = \overline{1,n}, n \in N,$ що $p_{ci} = 0,$ тоді розподіл $Y = F_\xi(X)$ є сумішшю дискретного і неперервного розподілу.

Теорема. Якщо $P\{\xi_n = 1\} = p_1 = 0,$ то випадкова величина $Y = F(X)$ має чисто дискретний розподіл з атомами виду:

$$y = \beta_{a_1} + \sum_{n=2}^{m}\left(\beta_{a_n}\prod_{j=1}^{n} p_{a_j}\right), \quad a_j \in N, \quad a_1 \neq 1, \qquad i = \overline{1,m}.$$

1. *Luroth J.* Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. – 1883. – 21. – P. 411 - 423.
2. *Mykola Pratsiovytyi, Iryna Lysenko, Oksana Voitovska*. Distribution of values of classic singular Cantor function of random argument // Random Operators and Stochastic Equations. – 2018. – Vol. 26, no.4. – P.193-200.
3. *Zhykharyeva Yulia, Pratsiovytyi Mykola* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 14(2012). Number 1. pp. 145-160.
4. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. – К.: Наукова думка, 2013. – 288 с.
5. *Гончаренко Я.В., Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В.* Властивості розподілу випадкової підсуми знакододатного ряду Люрота з незалежними доданками // Труды ИПММ НАН Украины, 2013. – Том 26. – С. 46-57.
6. *Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В.* Властивості розподілу випадкової величини, *L*-символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними // Труды ИПММ НАН Украины, 2011. – Том 23. – С. 71-83.
7. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ В ЗАДАЧАХ РОЗРАХУНКУ ФУНКЦІЙ РЕГРЕСІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ЗМІННИХ

Тетяна Зінченко

Національний університет харчових технологій, Київ

Розглядється m - факторний експеримент, в якому досліджується вплив m незалежних параметрів (факторів) процесу на його результат (ефективність) при проведенні N дослідів. Відомою формою проведення такого експерименту є центральне композиційне планування експерименту (ЦКП), яке дозволяє отримати незалежні статистичні дані дослідів для розрахунку нелінійних багатофакторних функцій регресії. ЦКП набуло широкого розповсюдження, зокрема, в харчових технологіях при оптимізації рецептур продуктових виробів [1,С.15].

Для розрахунку формул обчислення коефіцієнтів багатофакторних функцій регресії використовують метод мінімальних квадратів та матричну математичну модель лінійної множинної регресії, згідно з якою в загальному випадку коефіцієнти рівняння регресії

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_m X_m , \tag{1}$$

обчислюються за формулою в матричній формі :

$$\overline{b} = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot \overline{y}, \tag{2}$$

де $\overline{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots b_m)^T$ - вектор оцінок параметрів-коефіцієнтів,

$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots y_N)^T$ - вектор значень критерію в N дослідах,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nm} \end{pmatrix},$$

X - матриця розміром $N \times (m+1)$ значень всіх факторів в усіх точках експерименту.

Функція регресії другого порядку у повній формі для m факторів має вигляд:

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_m X_m + b_{12} X_1 X_2 + \ldots + b_{(m-1)m} X_{m-1} X_m + b_{11} X_1^2 + \ldots + b_{mm} X_m^2,$$

або
$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i X_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{k=1, \\ k>i}}^{m} b_{ik} X_i X_k + \sum_{i=1}^{m} b_{ii} X_i^2 \quad , \tag{3}$$

де X_i - змінна i -го фактору, $i = \overline{1,m}$; b_0, b_i, b_{ik}, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$, $i \le k$ $(b_{ik} = b_{ki})$ - коефіцієнти рівняння регресії (3).

Розв'язання задачі знаходження коефіцієнтів функції множинної регресії другого порядку в загальному вигляді для довільної кількості факторів вимагає додаткового отримання рекурентних формул обчислення визначників довільного порядку спеціального виду [2,С.190]. Отримано наступні рекурентні формули обчислення визначників спеціального виду [3,С.131] .

1.

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$I_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 1.$$

2.

$$J_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$J_n = (-1)^{n+1} \cdot n.$$

3.

$$A_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \cdot (n - 1 + a).$$

4.

$$B_n = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B_n = (-1)^{n+1} \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

5.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & d_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

6.

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & e_1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & e_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & e_n \end{vmatrix}$$

$$E_n = E_{n-1} + e_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n.$$

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (d_1 + d_2 + \ldots + d_n).$$

Використання рекурентних формул обчислення визначників дозволило отримати формули (алгоритм) обчислення коефіцієнтів функції регресії другого порядку для довільної (фіксованої) кількості факторів.

Список використаних джерел:

1. Zinchenko T. Calculation of functions of multiple regression of the second order in the tasks of the central composition planning of experiment / Tetiana Zinchenko, Antonella Dorokhovich // Ukrainian Food Journal. - 2014.- Volume 3. Issue 5. - P. 15-22.

2. Зінченко Т. Розрахунок нелінійних функції регресії другого порядку при центральному композиційному ротатабельному плануванні експерименту з довільною кількістю факторів / Зінченко Тетяна Володимирівна // Наукові праці НУХТ. -2016.- Т.22, № 3. - С.190-197.

3. Zinchenko T. Mathematical modeling of nonlinear regression function at the central compositional design of experimant with any number of factors/ Tetiana Zinchenko, Yana Syvolobova // Ukrainiar **Journal** of Food Science.- 2016.- Volume 4, Issue 1. – Kyiv. National University of Food Technologies.-P. 131 – 137.

РЕОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ ВИТЯГУВАННЯ ВОЛОКОННИХ СВІТЛОВОДІВ

Петро Зінькевич, Олексій Зінькевич

Національний університет харчових технологій, Київ

Порівняння існуючих моделей можна виконати на основі їх особливостей в таких аспектах: реологічна модель; ізотермічність (неізотермічність); стаціонарність (нестаціонарність); врахування тих або інших сил в загальному балансі сил, діючих на витягаюче волокно; розмірність моделі; граничні умови; спосіб знаходження поля швидкостей та температур.

Рейнером запропоновано проводити систематизацію моделей в рамках класичної теорії, опираючись на основні моделі суцільного середовища: пружне тіло Гука, що є ідеально пружним тілом і розглядається в класичній теорії пружності; в'язка рідина Ньютона, що є «простою» в'язкою рідиною і розглядається класичною гідродинамікою; пластичне тіло Сен-Венана – тверде тіло, якому властива межа протікання, при напрузі нижче якої воно деформується пружно і пластично тече при постійній напрузі, що дорівнює межі протікання. Тіло Сен-Венана вивчає ідеальна пластичність. Решту «реологічних тіл» можна розглядати як комбінації цих трьох основних тіл. Наближення, що витікає з ізотермічності процесу витягування, є грубим і практично ніколи не відповідає дійсності.

Відомі неізотермічні моделі можна розділити на дві великі групи. До першої групи належать такі, в яких разом з рівнянням Навьє-Стокса використовується рівняння теплопровідності. Такі моделі будемо вважати повними. До другої групи належать моделі, в яких розподілення температури враховується параметрично за допомогою задання в'язкості як функції координат. Найкращих результатів в дослідженні процесу витягування було досягнуто на основі повних моделей.

Початковим етапом дослідження процесу витягування має бути аналіз стаціонарних конфігурацій волокон і відповідного поля швидкостей. У більшості випадків так і буває; нестаціонарні початкові рівняння використовуються, як правило, при дослідженні стійкості процесу і його реакції на всілякі обурення. Виключення складає випадок, коли нестаціонарні рівняння використовуються для відшукування стаціонарного рішення у рамках методу встановлення при $t \to \infty$.

У найбільш загальному випадку рівняння балансу сил при витягуванні волокон має вигляд:

$$F + F_g = F_\mu + F_{in} + F_{st} + F_a .$$

Тут F – сила натягу в точці прийому волокна, F_g – сила тяжіння, F_μ – складова, обумовлена в'язкими силами і залежна від реологічних властивостей розплаву, F_{in} – інерційна сила, пов'язана з прискоренням струменя рідини, F_{st} – сила поверхневого натягу, пов'язана зі зміною поверхні струменя і відповідної поверхневої енергії струменя; вона пропорційна поверхневому натягу між струменем і довкіллям, $F_à$ – сила тертя об повітря.

Відносна важливість складових в балансі сил залежить від умов формування і властивостей розплавленого матеріалу.

Практично в усіх відомих роботах нехтують силою тертя об повітря. Нехтування всіма силами, крім F і F_μ, відповідає повільному витягуванню високов’язкого матеріалу, є хорошою моделлю даного процесу. Врахування окремих складових, в першу чергу F_{st}, відповідає тим чи іншим особливостям при розгляді реальних процесів. Так, наприклад, F_{st} необхідно врахувати при моделюванні процесу витягування скляних волокон. Чисто теоретичний інтерес представляє випадок, коли $F = 0$.

Практично всі існуючі моделі є одновимірними. Це обумовлено труднощами дослідження початкових рівнянь, записаних для випадку осьової симетрії, не кажучи вже про тривимірний випадок. Робилися нечисленні спроби врахування поперечної складової швидкості за допомогою представлення її у вигляді

$$V(r,z) = V(z)\cdot\left(1 + a_2\cdot r + a_2\cdot r^2 + \ldots\right).$$

Дослідження виявили, що прийняття параболічного профілю швидкості в межах поперечного перерізу волокна не призводить до задовільного результату при порівнянні теоретичних і експериментальних даних.

Було запропоновано розв’язання задачі формування волокон із полімерних матеріалів у вигляді накладення задач про розтягування в'язко-пружного стержня і руху, який визначається продуктивністю процесу. При цьому задача про струмінь, що витягається, розділено на дві. Це задача про розтягування в’язко-пружного стержня в умовах теплообміну з довкіллям, коли розтягуюче зусилля стале або змінюється з часом за лінійним законом, і задача про визначення основних параметрів струменя за допомогою результату розв’язання першої задачі і заданої швидкості часток.

Постановка граничних умов визначається з врахуванням тих або інших сил, що діють на волокно, розмірністю моделі, а також похибкою апроксимацій, пов’язаних з розглядом всієї області витягування або її частини.

Найважливішими процесами деформування при формуванні волокон є зсув в круговому каналі (течія Пуазейля) і одновісний розтяг. Перший тип течії реалізується в фільєрі при витягуванні фільєрним способом, другий – по виходу із фільєра і при витягуванні із заготовки.

Усталена течія струменю є прикладом усталеного негомотогенного руху, де градієнт швидкості є функцією положення і змінюється уздовж шляху течії. Це не суто поздовжня течія; зміна радіуса по її довжині призводить до появи деяких радіальних складових градієнта швидкості і не рівних нулю складових напруги зсуву. Надійна теорія такої течії для рідин з нелінійною в’язкістю не розроблена; те ж саме можна сказати і про лінійні в’язкопружні і ньютонівські рідини. Проте на випадок, коли зміна радіуса не дуже велика, течія може апроксимувати як квазіпоздовжня, а розподіл швидкості вважається плоским. Всі існуючі теоретичні рішення для вільно розтягуваних струменів ґрунтуються на цьому наближенні (про чистий розтяг), яке є більш-менш обґрунтованим залежно від того, яка із зон витягування розглядається.

Всі дослідники відзначають, що домогтися прогресу в розумінні механізмів протікання процесу витягування, а також задовільного збігу розрахункових і експериментальних даних можна тільки в результаті двовимірного розгляду обох сторін процесу – гідродинамічної і теплотехнічної.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНИХ ТА ФРАКТАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЗБІЖНИХ ДОДАТНИХ РЯДІВ

Дмитро Карвацький

Інститут математики НАН України

Нагадаємо, що якщо $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$, то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n ,$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \ при \quad n \in M , \\ 0, \ при \quad n \notin M , \end{cases}$$

називається *неповною сумою ряду*.

Дослідження властивостей множини неповних сум збіжних додатних рядів (абсолютно збіжних або розбіжних рядів) триває уже понад 100 років. Одним із перших таку проблематику розглянув японський математик S. Kakeya у 1914 році. З того часу була отримана низка фундаментальних результатів. У роботі [1] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, гомеоморфною до множини Кантора або канторвалом. Добре вивчені властивості множини неповних сум рядів, для яких нерівність $u_n > r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ або $u_n \le r_n$ виконується лише скінченну кількість разів (детальніше див. [2]). У загальній постановці задача про тип та властивості множини неповних сум залишається нерозв’язаною.

У доповіді будуть вивчатися тополого-метричні та фрактальні властивості множин неповних сум рядів з деякого класу (ряди узагальнених чисел Фібоначчі, бігеометричних та мультигеометричних тощо). Також будуть обговорюватися основні проблеми, які виникають при роботі за даною тематикою.

Список використаних джерел

1. Guthrie J. A., Nymann J. E. The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloquium Mathematicum. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.
2. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. – К.: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

КРИТЕРІЙ Q_s НОРМАЛЬНОГО ЧИСЛА В ТЕРМІНАХ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИХ ЧИСЕЛ

Ростислав Кривошия
Інститут математики НАН України

Нехай $(q_0; q_1; \dots; q_{s-1})$ − стохастичний вектор з строго додатними координатами.

Відомо **[2],** що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ **існує** послідовність *(a_n)* така, що $a_l \in \{0; 1; \dots; s-1\}$ **для кожного** натурального *l* та

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} q_{\alpha_{n-1}} \dots q_{\alpha_n} + \cdots \ , \qquad (1)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_k = q_0 + q_1 + \ldots + q_{k-1}, \ k \in \{1; 2; \dots; s-1\}$.

Представлення (1) називається Q_s-предетавленням числа *x* і має наступне зображення:

$$x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots} .$$

Означення 1. Число *x* будемо називати Q_s - нормальним, якщо для кожного набору чисел $(\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k)$, таких, що $\gamma_j \in \{0; 1; \dots; s-1\} \ \forall j \in \{1; 2; \dots; k\}$, виконується умова

$$\frac{N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k))}{n} = \prod_{j=1}^{k} q_{\gamma_j} ,$$

де $N_n(x; (\gamma_1; \gamma_2; \dots; \gamma_k))$ – кількість блоків $(\gamma_1; \dots; \gamma_k)$ серед чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.(якщо бути точним, це кількість номерів $j \in \{1; \dots; n-k-1\}$ таких що $\alpha_{j+i-1} = \gamma_i$ для кожного $i \in \{1; \ldots; k\}$).

Теорема 1. *Число*

$$z = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots}$$

є Q_s-нормальним тільки тоді, коли послідовність

$$\Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots},\ \Delta^{Q_s}_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n \ldots}, \ldots, \Delta^{Q_s}_{\alpha_k \alpha_{(k+1)} \alpha_{(k+2)} \ldots}$$

є рівномірно розподіленою.

Список використаних джерел:

1. Кейперс Л.,Ниддерейтер Г. Равномерно распределение последовательностей:Пер.с англ./ Под ред. С. М. Ермакова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.-408с.
2. Турбин А.Ф.,Працевитий Н.В. Фрактальньїе множества, функции, распределения.-Киев: Наук.думка, 1992. - 2008с.
3. De Bruijn N.G., Post K. A. A remark on uniformly distributet sequences and Riemann integrability.— Indag.Math., 1968, 30, p.149-150.
4. Borel.E Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1909, p. 247-271.
5. Borel.E Lecons sur la theorie des fonctions, 2nd ed. - Paris: Gauthier - Villars, 1914.
6. Weil.H Uber die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphanomene.— Rend. Circ. Math.Palermo, 1910, 30, S. 377-407.
7. *Weil.H* Uber ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen. — Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-phys. KL, 1914, S.234-244
8. *Weil.H* Uber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. - Math. Ann., 1916, 77, S. 313-352.
9. *Niven I., Zuckerman H.S.* On the definition of normal numbers. - Pacific J. Math., 1951, 1, p. 103-109.
10. *Ries F.* Sur la theorie ergodique. - Comment. Math. Helv., 1944/45, 17, p. 221-239.

НАБЛИЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НЕСАМОСПРЯЖЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ. ЗАДАЧА ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Олег Мазур

Національний університет харчових технологій, Київ

Теорія лінійно-квадратичних задач оптимального керування розподіленими системами є добре розвиненою[1]. У багатьох випадках вихідну задачу можна розщепити за допомогою методу Фур'є[2]. Розглянена в роботі задача керування еліптичним рівнянням з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі не допускає ні повного розщеплення ні застосування L^2-теорії. Її розв'язність в класі розподілених керувань вдається одержати шляхом використання біортонормованих систем функцій та при подальшому аналізі розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма.

В круговому секторі $Q = \{(r,\theta) | r \in (0,1), \theta \in (0,\pi)\}$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} \Delta y := \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial y}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(\theta), (r,\theta) \in Q, \\ y(1,\theta) = p(\theta), p(0) = 0, \\ y(r,0) = 0, r \in (0,1), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,0) = \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\pi), r \in (0,1) \end{cases} \tag{1}$$

Потрібно знайти таку неперервну функцію $u(r;\theta)$, щоб функціонал

$$J(y;u)=\int_0^1 \|y(r)\|^2 dr+\int_0^1 \|u(r)\|^2 dr \to \inf \qquad (2)$$

Де $p\in C^1([0;\pi])$ — задана функція, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0,\pi)$, еквівалентна стандартній, що задається рівністю

$$\|v\|_D=\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ де } \forall n\ge 1\ v_n=\int_0^{\pi} v(\theta)\cdot\psi_n(\theta)\,d\theta$$

Потрібно встановити класичну розв'язність (1), (2), тобто знайти оптимальний серед допустимих процесів $\{u,y\}\in C([0,\pi])\times\left(C(\overline{Q})\cap C^2(Q)\right)$ [3]

За допомогою спектрального методу застосовуються біортонормовані і повні в $L^2(0;\pi)$ системи функцій Самарського-Іонкіна [4]

$$\Phi=\{\varphi_0(\theta)=\theta,\ \varphi_{2\pi}(\theta)=\sin 2n\theta,\ \varphi_{2n-1}(\theta)=\theta\cos 2n\theta\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\psi=\left\{\psi_0(\theta)=\frac{2}{\pi^2},\ \psi_{2n}(\theta)=\frac{4}{\pi^2}(\pi-\theta)\sin 2n\theta,\ \psi_{2n}(\theta)=\frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Доведено існування єдиного розв'язку задачі оптимального керування і обґрунтовано наближену формулу для оптимального керування задачі.

Список використаних джерел:

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами ,описываемыми уравнениями с частными производными./Пер.с фр. Н.Х.Розова.-М.:Мир,1972.-414 с.
2. Капустян В.Е. Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи.//Проблемы управления и информатики. 1999 №6 С. 58-67
3. В.О.Капустян, О.А.Капустян, О.К.Мазур Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі.— Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2012, №2(108), с. 3-9.
4. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальным краевым условием.— Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, №2, с. 294-304.

ВИКОРИСТАННЯ РЕГРЕСІЇ У ВИРІШЕННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Андрій Макарчук

Волинський Національний Університет імені Лесі Українки

В ряді практичних задач доволі часто виникають задачі, у яких є необхідність наблизити функцію, яка описує досліджуваний процес. Цьому може служити різні підстави. Нерідко бувають ситуації, коли досліджувана залежність між параметрами задана аналітично, але в даному випадку вона занадто складна для використання. Також буває так, що аналітичне представлення необхідної нам залежності невідоме взагалі, а відоме лише табличка з її значеннями при заданих значеннях аргументів на певному проміжку. В таких ситуаціях може бути допустимим випадок, коли досліджувану залежність ми можемо наблизити. Інструменти для цього представляє теорія апроксимації або теорія наближення функцій.

Одним з найбільш широко використовуваних засобів для наближення математично сформульованої залежності є регресія [2, С.517]. Її доволі зручно використовувати в різних задачах, нерідко пов'язаних з обробкою великих масивів даних. Одним з найпопулярніших класів задач, де можна використовувати регресію, є так звані прогностичні задачі.

Для побудови моделі, яка буде використана для прогнозу одного параметра засобами інших, доволі часто використовують так звану лінійну регресійну модель:

$$f(x_1,\dots,x_n)=c_nx_n+\dots+c_1x_1+c_0$$

Даний вид регресійної моделі є одним з найбільш вивченим та інколи може давати доволі непогані результати в прогнозуванні.

Як оцінити якість такої моделі? Це можна зробити по-різному [2, С.28]. Для цього використовують різні метрики. Найпростішою в плані розуміння метрикою для оцінки будь-якої, зокрема і лінійної регресійної моделі є так звана середня квадратична помилка, яку в англомовній літературі часто позначають MSE (mean squared error):

$$MSE = \sum_{k=0}^{m} \left(f\left(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}\right) - y_k\right)^2$$

Середня квадратична похибка хоч і зручна для оцінки можливого відхилення, вона буває занадто великою, а тому не завжди зручною. Важливою метрикою в цьому плані є

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - f\left(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}\right)\right)^2}{\sum_{k=1}^{m}\left(y_k - \bar{y}\right)^2}$$

де

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} y_k$$

Дана оцінка може набути будь-яке значення з проміжку [0;1]. Особливість цієї метрики в тому, що чим вище її значення, тим краще параметр, значення якого прогнозується, описується лінійною комбінацією параметрів, вказаних як змінні.

Для кращої оцінки лінійної регресійної моделі можна використовувати відразу кілька метрик. Це покращить розуміння того, наскільки якісною є досліджувана модель.

На практиці набагато складнішим є питання про побудову такої лінійної регресійної моделі, яка б була максимально оптимізована по кільком метриками. Це говоритиме про її якість. Метою даного дослідження є спроба вирішення цієї задачі та особливості її автоматизації.

Список використаних джерел:

1. Эндрю С. Практическая бизнес-аналитика / Сигэл Эндрю. – Москва: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 1056 с.
2. Шашков В. Б. Прикладной регрессионный анализ (многофакторная регрессия) / В. Б. Шашков. – Оренбург: ГОУ ВПО ГОУ, 2003. – 363 с.

ПРО ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА СИНГУЛЯРНОСТІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОГО СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ

Олег Макарчук
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В.Винниченка
Катерина Сальник
Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В.Винниченка

За теоремою Лебега про розклад функції обмеженої варіації будь-яка функція розподілу $F(x)$ єдиним чином представляється у вигляді лінійної комбінації трьох своїх компонент

$$F(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x)$$

де, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$, $F_d(x)$ – дискретна функція розподілу, $F_{ac}(x)$– абсолютно неперервна функція розподілу, $F_s(x)$ – сингулярна функція розподілу.

Теорема 1. (Джессена-Вінтнера). *Нехай*

$$F = \prod_{k=1}^{\infty} * F_k$$

збіжна нескінченна згортка чисто дискретних функцій розподілу F_k *Тоді* F *є чистою, тобто або чисто дискретною, або чисто сингулярною або чисто абсолютно неперервною функцією* *розподілу. Таким чином, можливо сказати, що розподіл суми збіжного випадкового ряду з незалежними доданками є чистим.*

На сьогоднішній проблема поглиблення теореми Джессена-Вінтнера є надзвичайно складною.

Теорема 1. *Нехай* $\xi_n -$ *послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень* $0, 1, \ldots, s-1\ (s \in N, s \geq 2)$ *з ймовірностями* $p_{0n}, p_{1n}, \ldots, p_{(s-1)n}$ *відповідно,* a_n *−послідовність дійсних чисел. Розглянемо випадкову величину*

$$\xi = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n + \cdots$$

Якщо виконуються умови

$$\prod_{j=1}^{+\infty} max\ (p_{0j}; \ldots; p_{(s-1)j}) = 0,$$

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{s}} + \ldots \sqrt{\frac{p_{(s-1)j}}{s}} \right) = 0,$$

$$|s^n a_n| < +\infty$$

то випадкова величина ξ *має сингулярний розподіл.*

Теорема 2. *Якщо виконуються умови*

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{s}} + \ldots \sqrt{\frac{p_{(s-1)j}}{s}} \right) > 0$$

$$|s^n a_n| < +\infty$$

$$\lambda(M) > 0 \ \left(M = \left\{ t_j \in \{0; \ldots; s-1\} \right\} \right).$$

то випадкова величина ξ *має абсолютно неперервний розподіл.*

Список використаних джерел:

1. Працьовитий М.В.,Макарчук О.П. Розподіл випадкової величин, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами.//Науковий часопис НПУ імені. Драгоманова.Серія 1.Фізико-математичні науки, 2010. − №11.− С.160-169.

2.Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. − Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. − 296с.

3.Працьовитий М.В.,Торбін.Г.М. Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп.НАН України. − 1998. − №4. − С.48-54.

4.Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения.−Киев: Наук.думка, 1992. − 2008с.

5.Jessen,B., Wintner,A. Distribution function and Riemann Zeta-function,// Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. − P.48-88.

МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ЛЮДСЬКОГО КАПІТАЛУ НА ПРИКЛАДІ ГАЛУЗІ «ІНФОРМАЦІЯ ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ»

Валентина Мороз

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Під людським капіталом, як правило, розуміють сукупність набутих знань, навичок, мотивацій і енергії, якими наділені індивідууми і які можуть використовуватися протягом певного періоду часу з метою виробництва товарів і послуг. У свою чергу, людський капітал − це капітал, представлений в індивідуумі потенційною здатністю приносити дохід, заснованої на вроджених інтелектуальних здібностях і таланті, а також знаннями і практичними навичками, отриманими в процесі навчання, освіти і практичної діяльності людини [2]. Тому людський капітал − найважливіша складова сучасного продуктивного капіталу, яка представлена властивим людині запасом знань, розвинених здібностей, що визначаються інтелектуальним і творчим потенціалом.

Теорією людського капіталу почали займатися вже з XIX століття. Такі відомі економісти-теоретики, як В. Петті, А. Сміт, Дж. С. Мілль, К. Маркс включали розвинені корисні здібності людини в поняття основного капіталу [2,3]. Проблема оцінки людського капіталу як фактора економічного зростання розглядалася в працях Р. Солоу і отримала подальший розвиток в працях Р. Лукаса. Більш детальний аналіз людського капіталу був проведений в моделях Г. Менк'ю, Д. Ромера і Д. Уейла [2,3].

Для моделювання показників ефективності використання людського капіталу в Україні нами була обрана галузь «Інформація та телекомунікація». Використовуючи офіційні статистичні джерела [1] було відібрано статистичні дані та обчислено деякі показники, що характеризують дану галузь.

Таблиця 1. Статистичні показники, що характеризують ефективність використання людського капіталу в галузі «Інформація та телекомунікація»

Рік	Додана вартість, тис. грн, VA	Витрати на оплату праці, тис. грн	Витрати на соціальні заходи, тис. грн	Витрати на розвиток людського капіталу, тис. грн, HC	Ефективність використання людського капіталу, HCE
2013	41257,9	10813260,0	3532685,2	14345945,2	0,002875928
2014	45525	11086436,3	3469203,8	14555640,1	0,003127654
2015	48635,4	12398198,1	3492645,3	15890843,4	0,003060593
2016	62610,3	14765087,1	2674914,3	17440001,4	0,00359004
2017	80618,1	19097268,5	3473095,8	22570364,3	0,003571856
2018	89150,5	22892316,8	4257850,1	27150166,9	0,003283608

**Складено автором*

Витрати на розвиток людського капіталу визначалися як сума витрат на оплату праці та витрат на соціальні заходи. Ефективність використання людського капіталу вираховувалася за формулою $HCE = \frac{VA}{HC}$, де *VA* – додана вартість, *HC* – витрати на розвиток людського капіталу.

Для моделювання ефективності використання людського капіталу спочатку було розглянуто моделі для доданої вартості та витрат на розвиток людського капіталу.

Модель 1. Модель на розвиток людського капіталу

Для моделювання було використано узагальнену експоненціальну модель виду $y = \alpha \cdot \beta^t + \gamma$.

Таблиця 2. Емпіричні значення та результати моделювання витрат на розвиток людського капіталу

Рік	t_i	Витрати на розвиток людського капіталу, тис. грн, y_t,	Теоретичні значення витрат, тис. грн, $\hat{y}_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
2013	1	14345945,2	14214734,1	17216376381
2014	2	14555640,1	14740533,2	34185454360
2015	3	15890843,4	15739551,6	22889199942
2016	4	17440001,4	17637686,6	39079464113
2017	5	22570364,3	21244143,2	1,75886E+12
2018	6	27150166,9	28096410,7	8,95377E+11

Для оцінювання параметрів моделі було застосовано метод трьох точок. В результаті проведених обчислень було отримано наступне рівняння моделі витрат на розвиток людського капіталу

$$\hat{y}_t = 307484{,}9 \cdot (1{,}9)^t + 13630512{,}7.$$

Обчисливши стандартну похибку моделі за формулою

$$\sigma_в = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2}{n}} = 679167{,}4,$$

з рівнем надійності 95% було визначено граничну похибку моделі:

$$\Delta_{HC} = 1117130{,}966.$$

Рис.1. Теоретичні та емпіричні значення витрат на розвиток людського капіталу

Модель 2. Модель доданої вартості

Для моделювання доданої вартості було використано логістичну криву виду $y = \frac{1}{\alpha \cdot \beta^t + \gamma}$.

Розв'язавши систему рівнянь виду (1), отримали рівняння моделі доданої вартості

$$\hat{y}_t = \frac{1}{-1{,}16 \cdot 10^{-5} \cdot (1{,}16)^t + 3{,}75 \cdot 10^{-5}}.$$

Таблиця 3. Емпіричні значення та результати моделювання доданої вартості

Рік	t_i	Додана вартість, тис. грн, y_i	Теоретичні значення доданої вартості, тис. грн, $\hat{y}_i$	$(y_t - \hat{y}_t)$
2013	1	41257,9	41480,62229	49605,21922
2014	2	45525	45411,76211	12822,81979
2015	3	48635,4	50996,12526	5573023,754
2016	4	62610,3	59442,39266	10035636,9
2017	5	80618,1	73510,68415	50515360,06
2018	6	89150,5	101180,4013	144718524,8

Стандартна похибка моделі $\sigma_в = 5928{,}81$, гранична похибка моделі З рівнем надійності 95%: $\Delta_{VA} = 9752{,}03$.

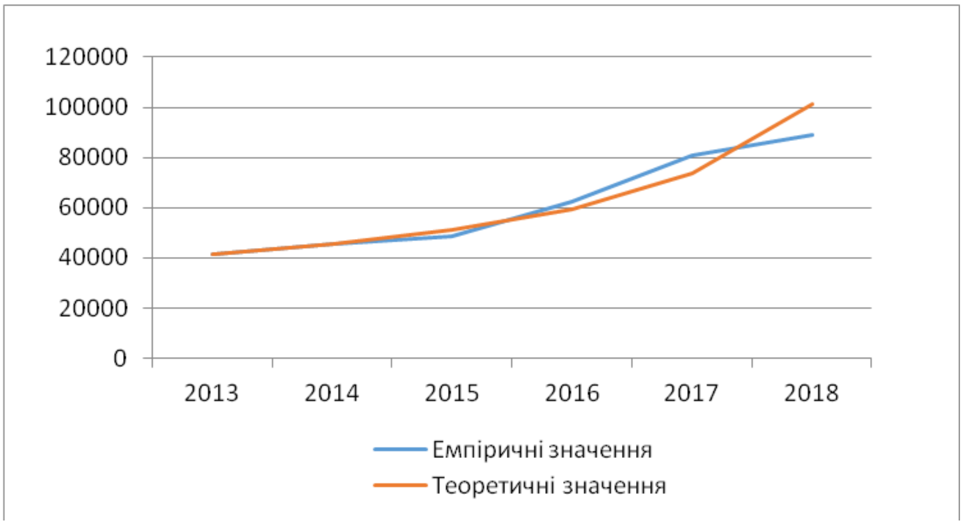


Рис.2. Теоретичні та емпіричні значення доданої вартості

Прогнозування рівня розвитку ефективності використання людського капіталу

Використовуючи побудовані моделі було спрогнозовано значення доданої вартості, витрат на розвиток людського капіталу та ефективності використання людського капіталу на наступний період. При цьому отримані наступні результати:

	Прогнозовані значення	Довірчий інтервал (95%)		Відносна похибка
		Нижня межа	Верхня межа	
Додана вартість, тис. грн, VA	179058	169306	188810	0,05446
Витрати на розвиток людського капіталу, тис. грн, HC	41115719	39998588	42232850	0,02717
Ефективність використання людського капіталу, HCE	0,00435	0,00400	0,00471	0,08163

Висновки: 1) В роботі, на основі статистичних даних, побудовано моделі витрат на розвиток людського капіталу, доданої вартості та ефективності використання людського капіталу. Для кожної моделі було обчислено стандартну та граничну похибки.

2) За допомогою моделей здійснено прогнозування досліджуваних показників на наступний період.

3) За результатами моделей та прогнозування можна зробити наступні висновки: якщо тенденція збережеться, то в наступний період можна очікувати збільшення ефективності розвитку людського капіталу. Його очікуване значення буде належати проміжку від 0,0040 до 0,0047 з ймовірністю 0,95. Оскільки емпіричне значення за останній період дорівнювало 0,0033, то можемо стверджувати, що значення показника буде зростати. Зростання відбудеться принаймні на 0,0007. Таке зростання показника ефективності розвитку людського капіталу пов’язане з тим, що додана вартість продукції для цієї галузі зростає швидше і випереджає зростання витрат на розвиток людського капіталу.

Список використаних джерел

1. Державна служба статистики України [Електронний ресурс] − http://www.ukrstat.gov.ua
2. Брюховецька Н.Ю., Іваненко Л.В. Оцінювання людського капіталу та доданої вартості підприємств: теорія та практика: монографія / НАН України, Ін-т економіки пром-сті. − Київ, 2020. − 184 с.
3. Сиротюк Г. Сутність і методика оцінки людського капіталу / Г. Сиротюк, Л. Петришин // Аграрна економіка. - 2015. - Т. 8, № 3-4. - с. 9-17.

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ БЛИЗЬКИХ ДО ПСЕВДООПУКЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Мулява О.М.
Національний університет харчових технологій, Київ

У 1923 році французький математик Ж.Валірон $[1, \tilde{n}.18]$ показав, що якщо ціла функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має порядок $\rho \in (0;\infty)$ і належить до класу збіжності, тобто $\int_1^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty$. П. Камсен $[2]$ узагальнив цей результат на випадок цілих (абсолютно збіжних в C) рядів Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp s\lambda_n, \quad s = \sigma + it,$$

з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками λ_n. Він показав, що якщо

$0 < h \le \lambda_{n+1} - \lambda_n \le H < +\infty, \quad n \ge 0$ і

$$\kappa_n(F) \overset{def}{=} \frac{\ln|a_n| - \ln|a_n + 1|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \uparrow +\infty, \quad n \to \infty,$$

то для того, щоб

$\int_0^{\infty} e^{-\rho\sigma} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty$, де $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in R\}$

необхідно і достатньо, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty$.

Ю.М. Галь і М.М. Шеремета $[3]$ перенесли результат Камсена на ряди Діріхле, абсолютно збіжні в півплощині $\ddot{I}_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$.

Використовуючи критерій Александера, С.М.Шах $[4]$ вказав умови на дійсні параметри $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ диференціального рівняння $z^2 w'' + zw' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2) w = 0$, за яких воно має такий цілий трансцендентний розв'язок g, що разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в $D = \{z : |z| < 1\}$ функціями.

Як в $[5]$, через $SD(\Lambda 0)$ позначимо клас рядів Діріхле

$$F(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

з нульовою абсциссою абсолютної збіжності і заданною зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників $\Lambda = (\lambda_k)$. В $[5]$ доведено, що якщо

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 f_2 \ge \ldots \ge \lambda_k f_k \ge \ldots, \tag{2}$$

то функція (1) до близькою до псевдоопуклої . Використовуючи це твердження, в $[5]$ доведено також, що якщо $h > 0,\ \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 < 0$ і $|\gamma_1| \le \dfrac{2\sqrt{|\gamma_2|} + h}{\sqrt{|\gamma_2|} + h} h\sqrt{|\gamma_2|}$, $|\gamma_0| \le \left(\dfrac{4h\left(\sqrt{|\gamma_2|} + h\right)^2}{\sqrt{|\gamma_2|} + 2h} - |\gamma_1| \right) \dfrac{|\gamma_1|}{h\left(2\sqrt{|\gamma_2|} + h\right)}$, то диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \left(\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2\right) w = 0$$

має цілий розв'язок (1) з показниками $\lambda_k = \sqrt{|\gamma_2|} + (k-1)h \quad (k \ge 1)$, який є близький до псевдоопуклої функції в $\ddot{I}_0$.

Отримано відмінні від (2) достатні умови, за яких функція (1) буде близькою до псевдоопуклої і показано застосування отриманого результату до дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь.

Теорема 1. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ і $f_k > 0$ для всіх $k \ge 2$. Якщо $\lambda_k f_k / \lambda_1 \to q \le 2$ при $k \to \infty$, то функція (1) є близькою до псевдоопуклої в $\ddot{I}_0$.

Теорема 2. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ і $f_k > 0$ для всіх $k \ge 2$. Якщо $\lambda_2 f_2 / \lambda_1 \ge 2$ і $(\lambda_{k+1} f_{k+1} - \lambda_k f_k)/\lambda_1 \to q \le 2$ при $k \to \infty$, то функція (1) є близькою до псевдоопуклої в $\ddot{I}_0$.

Наступна теорема доповнює наведений раніше аналог критерію Александера і є певним аналогом теореми 2.

Теорема 3. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ і $f_k > 0$ для всіх $k \ge 2$. Якщо $1 \le \lambda_2 f_2 / \lambda_1 \le 2$ і $\lambda_k f_k - \lambda_{k+1} f_{k+1} \to q \ge 0$ при $k \to \infty$, то функція (1) є близькою до псевдоопуклої в $\ddot{I}_0$.

Розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \left(\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2\right) w = 0$$

дослідженого в $[5]$, є цілий ряд Діріхле.

Тут ми зупинимося на рівнянні

$$\left(1 - e^{hs}\right)^2 w'' - h\left(1 - e^{2hs}\right) w' + \gamma e^{2hs} = 0 , \tag{3}$$

де $h > 0$ і $\gamma \in R$, і знайдемо умови, за яких розв'язком цього рівняння є ряд Діріхле, який має нульову абсцису абсолютної збіжності і зображає близьку до псевдоопуклої в $\ddot{I}_0$ функцію.

Теорема 4. Якщо або $-h^2 \le \gamma \le 0$, або $\gamma = h^2$, то диференціальне рівняння (3) має розв'язок (1) з показниками $\lambda_k = kh$ і абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$, який є близьким до псевдоопуклої в $\ddot{I}_0$ функції.

Для рядів Діріхле**,** абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$, знайдено нові достатні умови близькості до псевдо опуклості і отриманий результат застосовано до дослідження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з експоненціальними коефіцієнтами.

Список використаних джерел:

1. Valiron C. General theory of integral functions.- Toulouse. 1923. – 382 p.
2. Kamthan P.K. A theorem of step functions. 11 // Istanbul univ. fen. fac. mecm.

А.-1963.-28.-Р. 65-69.
3. Галь Ю.М., Шеремета М.М. Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1985 - №7. – С.11-14.
4. Shah S.M. Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. anal. and appl.- 1989.- V. 142.- P. 422-430.
5. Головата О.М., Мулява О.М., Шеремета М.М. Псевдозіркові, псевдоопуклі і близькі до псевдоопуклих ряди Діріхле, які задовольняють диференціальні рівняння з експоненціальними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.- мех. поля.- 2018.- Т.61, №1.- С.57-70

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА ЯК ЛІНІЙНИЙ МЕТОД ПІДСУМУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є

Віктор Павліха
Волинський національний університет імені Лесі Українки

Аналогічно до [1], позначимо через $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ множину функцій натурального аргумента, залежних від параметра δ, який змінюється на деякій множині $E_\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, і який містить, по крайній мірі, одну граничну точку, і, окрім того, $\lambda_\delta(0) = 1, \forall\delta \in E_\Lambda$. З допомогою множини Λ кожної функції $f \in L$ поставимо у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2}\lambda_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)\,(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),\ \delta \in E_\Lambda. \tag{1}$$

Припустимо, що ряд (1) при кожному $\delta \in E_\Lambda$ є рядом Фур'є деякої неперервної функції, яку позначимо через $U_\delta(f; x; \Lambda)$. В цьому випадку говорять, що множина Λ визначає конкретний метод (Λ –метод) сумування рядів Фур'є.

Якщо множина $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ така, що

$$\lambda_\delta(k) = \left(1 + sk\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q\right)e^{-\frac{k}{\delta}},\ 0 \le s \le \frac{1}{2}, q \ge 1 \tag{2}$$

то, очевидно,

$$U_\delta(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(1 + sk\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right)^q)e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx). \tag{3}$$

Таку функцію називають узагальненим інтегралом Пуассона функції f і позначають через $P_{s,q}(\delta; f; x)$.

При $s=0$ з (3) отримаємо інтеграл Абеля-Пуассона $A_\delta(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$, функції f, або, що теж саме, інтеграл Пуассона, а при $s = \frac{1}{2}, q = 1$, відповідно бігармонійний інтеграл Пуассона $B_\delta(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{k}{2}\left(1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\delta}}\right))e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$ функції f.

Інтеграли Абеля-Пуассона і бігармонійні інтеграли Пуассона-це так звані оператори з δ-подібним ядром.

Список використаних джерел

1. *Степанец А.И.* Методы теории приближения.2012–Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002.–Ч.I.–427 с.

БАЙЄСІВСЬКИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРОГНОЗУВАННЯ РЕЙТИНГУ КЛІКІВ

Олексій Панасенко
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; Nestlogic Inc.
Світлана Ткаченко
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; Nestlogic Inc.

Комерційна цінність будь-якого рекламного (інформаційного) оголошення, розміщеного в мережі, визначається рівнем попиту на заданий контент, який в свою чергу можна оцінити певними кількісними характеристиками. Однією з таких характеристик є рейтинг кліків (*CTR – click-through rate*) або показник клікабельності. Дана величина показує наскільки ефективною для користувачів є запропонована інформація (будь-якого типу) і дорівнює відношенню числа безпосередніх переходів за оголошенням (кліків на оголошення) до загальної кількості його показів:

$$CTR = \frac{\text{число кліків}}{\text{число показів}}.$$

З формули слідує, що чим вищим є *CTR*, тим популярнішим є запропонований контент і навпаки. Таким чином, тут можна прослідкувати подвійну цінність від достатньо високої величини клікабельності. З одного боку, затребуваність контенту є вигідною для людей, які його розміщують (з низки причин), а з іншого – для користувачів, які очікують на належні відповіді своїм запитам.

На *CTR* впливають чимало факторів. Серед них виділяють доступність і привабливість контенту, його актуальність для усіх користувачів Інтернету загалом або для задоволення потреб деякого конкретного користувача зокрема. Регуляція саме цих впливів дозволяє покращувати показники клікабельності та ефективність розміщеної інформації. Однак варто зазначити, що намагання покращити *CTR* без попереднього його дослідження не мають сенсу. Адже, як з’ясувати, яке значення клікабельності є справді високим, а яке низьким? Як зміниться *CTR* двох різних оголошень, розміщених в однакових умовах? Як зміниться *CTR* однієї і тієї самої реклами, запропонованої різними способами?

Таким чином, виникає проблема передбачення величини *CTR*. Оцінка того, який показник клікабельності варто очікувати в недалекому майбутньому, дозволяє побачити ефективність поданого контенту в теперішній момент часу і визначити, чи варто робити якісь кроки задля збільшення цієї ефективності.

Такі задачі зазвичай розв’язуються методами машинного навчання (див., наприклад [1, 2, 3]). Інструментарій, який при цьому використовується доволі різноманітний – починаючи від математичного моделювання часових рядів із передбаченням значень статистичних показників, до конструювання нейронних мереж різних архітектур, які здатні у певному розумінні враховувати і сам зміст об’єктів дослідження (текст рекламних оголошень, колір рекламних банерів, персональні дані користувача тощо).

Зупинимось на байєсівських підходах до розв’язування задачі прогнозування значення *CTR*. Один з них, відомий як динамічна модель Гамма-Пуассона (Dynamic Gamma-Poisson model – далі DGP, див. [1]), базується на припущенні про зручність моделювання із використанням гамма-розподілу та розподілу Пуассона. Припустимо, що θ_t – значення CTR в момент часу t. Припустимо також, що в момент часу $t-1$ CTR моделюється як гамма-розподіл з параметрами α_{t-1}, γ_{t-1}, які мають середнє $\mu_{t-1} = \frac{\gamma_{t-1}}{\alpha_{t-1}}$ та дисперсію σ^2_{t-1}. Умовний розподіл кількості кліків c_t при відомому значенні θ_t моделюється розподілом Пуассона з параметром $\lambda = v_t\theta_t$, де v_t – загальна кількість показів. Для моделювання апостеріорного розподілу для θ_t в якості апріорного логічно обирати θ_{t-1}. При цьому слід розуміти, що розподіл θ_{t-1} «увібрав» у себе інформацію за усі попередні проміжки часу. Тому пряме обрання в якості апріорного розподілу для θ_t розподілу θ_{t-1} приводить рівномірного врахування усієї минулої історії, в той час як нерідко зручно «забувати» відносно давню історію. З цією метою в моделі DGP пропонується розширений варіант обрання апріорного розподілу, а саме як гамма розподіл з параметрами $\delta\alpha_{t-1}$, $\delta\gamma_{t-1}$, де δ – деяке число з $(0;1]$, яке назвемо коефіцієнтом адаптації. Такий підхід не змінює середнього значення для змодельованого гамма розподілу (він залишається рівним $\frac{\gamma_{t-1}}{\alpha_{t-1}}$), проте збільшує дисперсію (в $\frac{1}{\delta}$ разів). Чим ближче значення δ наближається до одиниці – тим більше минулої історії буде «враховуватись» апріорним розподілом. Тоді апостеріорний розподіл для θ_t моделюватиметься як гамма розподіл з параметрами $\alpha_t = \delta\alpha_{t-1} + c_t$, $\gamma_t = \delta\gamma_{t-1} + v_t$. Низьке значення δ приводить, з одного боку, до швидкої адаптації до локальних змін, а з іншого – до високої дисперсії у передбаченні. Високе ж значення δ – навпаки, з часом адаптується повільно і може через надто високу «інертність» приводити до надто високого рівня упередженості у передбаченні. Тому значення δ є тим гіперпараметром, який потребує окремого визначення залежно від процесу, що моделюється.

Описана модель гарно себе зарекомендувала (в тому числі і у наших дослідженнях) для моделювання значення CTR одного окремо взятого рекламного оголошення. Окремої уваги заслуговує задача, яка стосується передбачення рейтингу кліків у деяких поданих впорядкованих списках (рекламних оголошеннях, інформаційних повідомленнях, послідовностях послуг, що пропонуються, тощо). У даному випадку ми уже не говоримо, про *CTR* якогось одного цільового об’єкта дослідження, а про перелік *CTR* об’єктів, які цілком можуть бути пов’язані між собою, а отже, здатні певним чином впливати на величини клікабельності одне одного. Одним із найголовніших факторів, які мають вплив на *CTR* об’єкта в списку, є позиція цього об’єкта в ньому. Завдання полягає в максимізації цільового прибутку, яку могла б забезпечити оптимальна розстановка об’єктів так, щоб кожна з позицій приносила якомога кращий показник CTR.

Моделі для оцінки *CTR* на позиції здебільшого базуються на використанні деякої кількості минулої історії, тобто безпосередньо прикладів того, як саме поводили себе об’єкти на тій чи іншій позиції. Однак очевидно, що у такий спосіб нам часто важко отримати повну картину ситуації, адже дані про поведінку об’єктів на деяких позиціях можуть бути зовсім не інформативними або взагалі відсутніми. Не є очевидним визначення того, яким буде *CTR* об’єкта на позиції, де він раніше ніколи не був розміщений.

Один із можливих шляхів розв’язання цієї задачі був запропонований у [1] під назвою динамічна лінійна регресія (dynamic linear regression – DLR), яка базується на припущенні, що між значенням CTR одного і того ж об'єкта на різних позиціях в списку існує кореляційний зв’язок, який з часом може змінюватись. Основна ідея DLR моделі полягає у використанні деякої базової моделі (наприклад, моделі Гамма-Пуассона) для моделювання значення CTR окремо на кожній позиції із запропонованого переліку та додаткового обчислення цього значення з допомогою регресійної моделі за значенням CTR на інших позиціях. Комбінування отриманих оцінок дає змогу отримати більш інформативний апостеріорний розподіл для оцінюваної величини.

Для прикладу позначимо через θ_{xt} CTR рекламного оголошення на позиції x ($x \in \{1,\dots,K\}$) в момент часу t і не порушуючи загальності припустимо, що ми прагнемо оцінити значення θ_{1t}. Припустимо, що має місце наступна лінійна модель:

$$\theta_{1t} = \alpha_{xt} + \beta_{xt}\theta_{xt} + \varepsilon_{xt},$$

де α_{xt}, β_{xt} – змінні із часом параметри лінійної моделі, ε_{xt} – нормальний шум з дисперсією s_x^2. На рис. 1 проілюстровано зв’язок між CTR рекламних оголошень на різних позиціях в списку, і, як ми бачимо, використання саме лінійної моделі є природним рішенням.

Спочатку з допомогою базової моделі отримується розподіл CTR окремо для кожної позиції за відомими спостережуваними даними (кількості кліків і показів) із середнім значенням $\hat{\theta}_{1t}$ і дисперсією $\hat{s}_{xt}$. Після цього для позиції x застосовується описана вище регресійна модель для передбачення розподілу θ_{1t}. Нарешті, усі одержані значення комбінуються в єдиний апостеріорний розподіл для θ_{1t}.

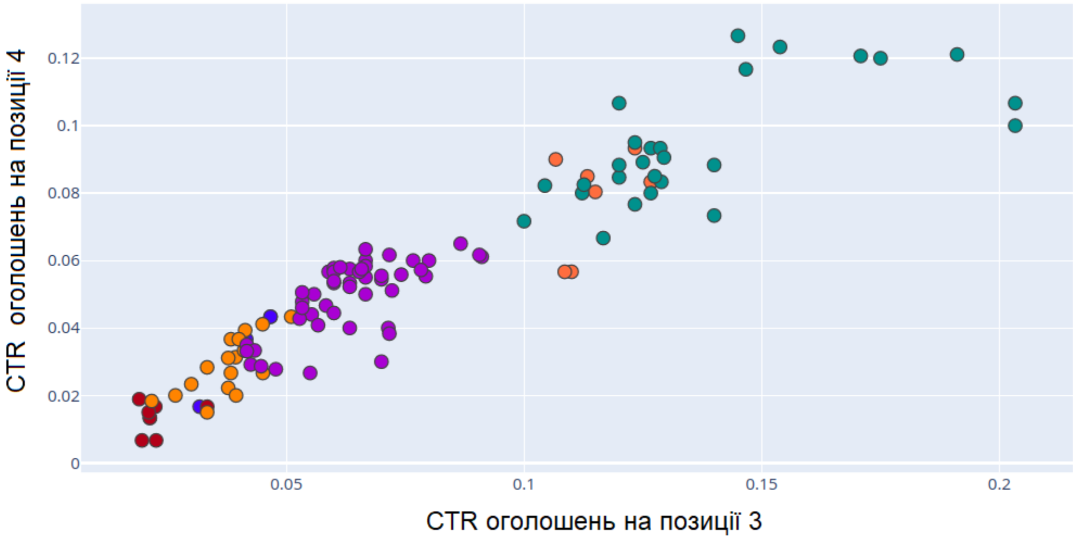


Рис. 1. Ілюстрація наявності зв'язку між значенням CTR на різних позиціях. Методологія отримання була наступною. Рекламні оголошення розміщувались на двох різних позиціях в списку оголошень (в цьому випадку – позиціях 3 і 4) в один часовий проміжок і визначалось значення CTR окремо на кожній позиції.

Наші дослідження дали підстави стверджувати, що попри відносно просту модель для моделювання значення CTR рекламного оголошення на заданій позиції в списку, вона непогано передбачає значення CTR на новій позиції. Разом з тим, існують і більш складні моделі (див., наприклад, [2, 3]). Такі моделі можуть враховувати зміст рекламних оголошень, а також дані користувача.

Список використаних джерел:

1. Agarwal D. Spatio-temporal models for estimating click-through rate / D. Agarwal, Elango P., Chen B.-C. // Proceedings of the 18th International Conference on World Wide Web, WWW 2009, Madrid, Spain, April 20-24, 2009. – DOI: 10.1145/1526709.1526713
2. Xia B. Click-Through Rate Prediction of Online Banners / B. Xia, H. Seshime, X. Wang, T. Yamasaki // Featuring Multimodal Analysis International Journal of Semantic Computing. – Vol. 14, No. 1, 2020. – P. 71-91. – DOI: 10.1142/S1793351X20400048
3. Graepel T. Web-scale Bayesian click-through rate prediction for sponsored search advertising in Microsoft's bing search engine / T. Graepel, J. Candela, T. Borchert, R. Herbrich // ICML'10: Proceedings of the 27th International Conference on International Conference on Machine Learning, 2010. – P. 13–20.

ІНВЕРСОР Δ–ЗОБРАЖЕННЯ

Микола Працьовитий
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Юлія Маслова
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Теорема 1. [4.] *Для будь-якого* $x \in [0; g_0]$ *існує така послідовність* $(\alpha_n) \in L$, *що*

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \qquad (0.1)$$

де $\delta_j = j g_{1-j}$, *а саме:* $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$.

Ряд (1.1) називається G_2–представленням числа x, а запис $\Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ – його G_2*–зображенням*, а α_k $-k$ *–тою цифрою* цього зображення.

Дана система кодування має нульову надлишковість (кожне число має не більше двох зображень, причому тих, що мають їх два, лише злічення множина).

Функція I, означена рівністю

$$I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}) = \Delta^{G_2}_{1-\alpha_1, 1-\alpha_2, \ldots, 1-\alpha_n, \ldots},$$

називається *інверсором* G_2–зображення.

Дане означення є коректним в точках, що мають єдине зображення. Але оскільки

$$\frac{g_0(1+g_1^2)}{1-g_1} = I\left(\Delta^{G_2}_{01(0)}\right) \neq I\left(\Delta^{G_2}_{11(0)}\right) = \frac{g_0^3}{1-g_1}$$

то воно не є коректним без домовленості використовувати лише одне з двох існуючих G_2– зображень G_2–бінарних точок. Тому домовимось не використовувати зображення $\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 11(0)}$.

Розглядається функція I, визначена на множині U G_2– унарних чисел, нехтуючи множиною B всіх G_2–бінарних чисел.

Теорема. Інверсор I є ніде не монотонною неперервною по множині G_2–унарних точок відрізка $[0; g_0]$.

Наслідок. Це твердження виражає ще одну специфічну властивість G_2–зображення, оскільки для двійкового зображення, Q_2–зображення, ланцюгового A_2–зображення інверсор є функцією 32еперервною і монотонною на всій області визначення, а даний інверсор є розривною функцією в G_2–бінарних точках, про що свідчить наведений приклад.

Список використаних джерел

1. *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С.92–102.

2. *Працевитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q_2-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. – С. 249-254.

3. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

4. *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.* Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: ІМ НАН України, 2018., т 15, № 1. – С. 132-146.

5. *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.* Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані // Математичні проблеми механіки та обчислювальної

математики. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: ІМ НАН України, 2019., т 16, № 2. – С. 50-62.
6. *Pratsiovytyi M., Lysenko I., Maslova Y.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2–representation of numbers // Algebra and discrete mathematics, Volume 29 (2020), Number 1, pp. 105–144.

ФРАКТАЛ ВІЧЕКА І ЙОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ

Микола Працьовитий
Інститут математики НАНУ, НПУ імені М.П. Драгоманова
Аліна Скубко
НПУ імені М.П. Драгоманова

Фрактальні самоподібні криві (лінії) є важливим об'єктом фрактальної геометрії, які мають застосування у фізиці. Їх грунтовне аналітичне вивчення вимагає нових підходів, методів і засобів. Часто такими є різні системи кодування (зображення) дійсних чисел.

Нехай $A = \{0,1,2\} -$ алфавіт (набір цифр) трійкової системи зображення чисел відрізка $[0;1]$, $L = A \times A \times A \times \ldots -$ простір послідовностей елементів алфавіту.

Для будь-якого числа $x \in [0;1] \equiv \Delta$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i} \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

При цьому трійковий ряд називається трійковим *представленням* числа x, а скорочений запис $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} -$ його трійковим *зображенням.*

Фракталом Вічека називається лінія V, початкове означення якої було геометрично описовим [19]. В прямокутній декартовій системі координат вона визначається рівністю:

$$V = \left\{M(x;y): x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \qquad y = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \alpha_i(x) + \beta_i(y) \in \{0,2,4\}\right\}.$$

Інший спосіб аналітичного задання фрактала Вічека можна знайти в роботі [14].

Відомо, що фрактал Вічека є самоподібною множиною з самоподібною структурою

$$V = f_0(V) \cup f_1(V) \cup f_2(V) \cup f_3(V) \cup f_4(V),$$

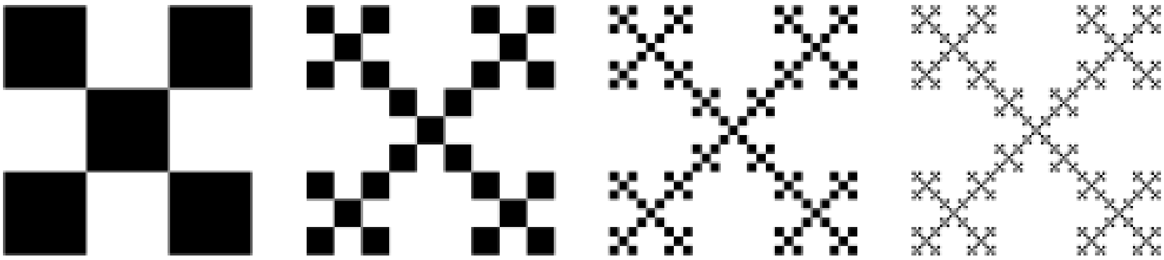
де $f_0: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x, \\ y' = \frac{1}{3}y, \end{cases}$ $f_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \\ y' = \frac{1}{3}y, \end{cases}$ $f_2: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \\ y' = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}, \end{cases}$ $f_3: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \\ y' = \frac{1}{3}y, \end{cases}$ $f_4: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \\ y' = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}. \end{cases}$

Самоподібна розмірність фрактала Вічека знаходиться з рівняння:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{5}, \qquad x = \log_3 5.$$

На рисунку представлено наближення до множини Вічека.



Ми пропонуємо узагальнення фрактала Вічека, що грунтується на формальній замінні трійкового зображення чисел поліосновним трисимвольним Q_3-зображенням чисел. Нагадаємо його зміст [13]. Нехай (q_0, q_1, q_2) – заданий набір додатних чисел таких, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$, $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$. Тоді для довільного $x \in [0;1]$ існує $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_i}\prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j}\right) \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

Розклад числа в ряд називається Q_3-*представленням*, а скорочений запис $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ – його Q_3-*зображенням*. Для зліченної множини чисел розклад числа не єдиний, такі числа називаються Q_3-*бінарними*, вони мають такі періодичні зображення:

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](2)}.$$

Решта чисел мають єдине Q_3-зображення, їх називають Q_3-*унарними* числами.

Зауважимо, що при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, Q_3-зображення чисел є класичним трійковим зображенням чисел, оскільки в цьому випадку

$$\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} = 3^{i-k}, \beta_{\alpha_k} = \alpha_k \cdot \frac{1}{3}.$$

Розглядається множина V, координати точок якої представлені поліосновним трисимвольним Q_3-зображенням, а саме

$$V = \left\{M(x;y): x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \quad y = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, \alpha_i(x) + \beta_i(y) \in \{0,2,4\}\right\}.$$

Теорема. *Множина V є самоафінним фракталом з структурою*

$$V = f_0(V) \cup f_1(V) \cup f_2(V) \cup f_3(V) \cup f_4(V), \quad \text{де}$$

$$f_0: \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad f_1: \begin{cases} x' = q_2 x + q_0 + q_1, \\ y' = q_0 y, \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = q_1 y + q_0, \end{cases}$$

$$f_3: \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = q_2 y + q_0 + q_1, \end{cases} \quad f_4: \begin{cases} x' = q_2 x + q_0 + q_1, \\ y' = q_2 y + q_0 + q_1. \end{cases}$$

Самоафінна розмірність множини V є розв'язком рівняння:

$$\begin{vmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} + \begin{vmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_0 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} + \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_1 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} + \begin{vmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} + \begin{vmatrix} q_2 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} = 1,$$

$$q_0^x + 2(q_0 q_2)^{\frac{x}{2}} + q_1^x + q_2^x = 1,$$

$$x = \log_{q_0, \sqrt{q_0 q_2}, \sqrt{q_0 q_2}, q_1, q_2} 1.$$

Розглянемо ще один клас павутинних «квазіфрактальних» кривих, які належать одиничному квадрату $\Delta \times \Delta$.

Нехай V_0 – межа квадрата $\Delta \times \Delta$, V_k – межа квадрата $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} \times \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}$, де $\alpha_i + \beta_i \in \{0,2,4\}$. Покладемо $[W] \equiv W \cup V$, де W – фрактал Вічека, а $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k \cup \ldots$.

Тоді $[W]$ є павутинною фрактальною кривою, що має нескінченну довжину і структурну подібність.

Антенна виготовлена за такою формою має мати свої специфічні властивості. Експериментальне вивчення яких складає одне з завдань магістерського дослідження.

Конструкція кривої $[W]$ легко узагальнюється переходом від трійкового зображення до Q_3-зображення.

Список використаних джерел

1. *Жиков В.В.* Фракталы // Соросовский образовательный журнал. – 1996. –№12. – С. 109 – 117.
2. *Касселс Дж. В. С.* Введение в геометрию чисел. – Москва: Мир, 1965. – 417 с.
3. *Кравченко В.Ф., Масюк В.М.* Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. Кн. 3. – Москва: ИПРЖР, 2002. – 72 с.

4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – Москва: Постмаркет, 2000. – 352 с.

5. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. – Москва, 2007. – 619 с.

6. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – Москва, 2000. – 666 с.

7. *Морозов А. Д.* Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьюторных исследований, 2002. – 163 с.

8. *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С.92-102.

9. *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.

10. *Працьовитий М.В*. Аналітична геометрія. Афінні перетворення площини. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 60 с.

11. *Працьовитий М.*В. Основи метричної теорії класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ. Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 100 с.

12. *Працьовитий М.В*. Сингулярні функції // У світі математики. – 1998. – Т. 4, Вип. 4. – С. 1– 8.

13. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

14. *Працьовитий М.В., Коваленко В.М.* Сніжинка Коха як параметрично задана плоска крива // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2014. – № 16(2). – С. 61-80.

15. *Працьовитий М.В., Скрипник С.В.* Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 134-143.

16. *Працьовитий О.М.* Властивості поліосновної логарифмічної функції // Студентські фізико-математичні етюди. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2004. - №4. – с.55-59.

17. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределениz. – Київ: Наукова думка, 1992. – 208 с.

18. *Федер Е*. Фракталы. – Москва: Мир, 1991. – 260 с.

19. Фракталы в физике: Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 июля, 1985): Пер.с.англ. / Под ред. Л. Пьетронеро, Є. Тозатти. – М.: Мир, 1988. – 672с.

20. *Шредер М*. Фракталы, хаос, степенные законы. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.

КАНТОРІВСЬКІ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ У ЗАДАЧАХ КОНСТРУКТИВНОЇ ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

Микола Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Надія Черчук

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Вступ

Перші приклади неперервних недиференційовних функцій, які використовували для аналітичної конструкції метод згущення особливостей за допомогою рядів, були побудовані у 19 ст. (Веєрштрас та ін.) [1]. На початку 20 ст. були успішні спроби знайти відносно прості приклади таких функцій. Одним з таких є приклад функції Серпінського, задання якої використовує трійкове і п’ятіркове зображення дійсних чисел [4].

На сьогоднішній день у математиці розвинулися ефективні засоби для вивчення неперервних функцій, які мають складні локальні властивості. Це ніде не монотонні та недиференційовні функції [2-7], звивисті функції, сингулярні функції [8,9], функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості [10] тощо. Ці засоби охоплюють теорію фракталів, що ґрунтується на самоподібності, самоафінності, автомодельності та структурної подібності, забезпечують різні системи кодування дійсних чисел з розвинутою геометрією зображень, метричною та ймовірнісною теорією чисел. [11,12]

У роботі досліджується узагальнена конструкція класу неперервних ніде не диференційовних функцій, до якого належить Трибін-функція [13-16]. Досліджено диференціальні властивості функцій цього класу.

Означення основного об’єкту

Нехай маємо послідовність $S_k = 2k+1, k \in N$.

Нехай задана матриця $G(S_k) = \|q_{ik}\|$, яка має властивості:

1) $q_{ik} > 0$,

2) $\sum_{k=1}^{\psi_k} q_{ik} = 1$, $\psi_k = \prod_{j=1}^{k} S_i$, $i = \overline{0, \psi_k - 1}$,

3) $\prod_{k=1}^{\infty} max\,\{q_{0k}, \dots, q_{\psi_k - 1,k}\} = 0$

$A_{S_k} = \{0,1,\dots, \psi_k - 1\}$ - алфавіт, $L = A_{S_k} \times A_{S_k} \times \dots \times A_{S_k} \times \dots$ - простір послідовностей алфавіту.

Для $\forall x \in [0,1]$ існує така послідовність $(\alpha_k) \in L$, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}\right) \equiv \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}, \qquad (1)$$

причому $\beta_{0k} \equiv 0,\ \beta_{ik} \equiv q_{0k} + q_{1k} + \dots + q_{i-1,k} = \beta_{i-1,k} + q_{i-1,k},\ i = \overline{1, \psi_k - 1}$.

Розглядається функція $y = f(x)$ означена рівністю

$$y = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k\dots} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\gamma_k k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\gamma_j j}\right), \qquad (2)$$

де $\delta_{0k} \equiv 0,\ \delta_{1k} \equiv g_{0k},\ \delta_{ik} \equiv g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{i-1,k} = \delta_{i-1,k} + g_{i-1,k},\quad i = \overline{1, \psi_k - 1}$.

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \qquad \gamma_{k+1} = \begin{cases} \gamma_k, & \text{якщо } \alpha_k = \alpha_{k+1}, \\ 1-\gamma_k, & \text{якщо } \alpha_k \neq \alpha_{k+1}. \end{cases} \qquad (3)$$

Коректність означення функції є наслідком того, що значення її виразу для двох різних зображень $G(S_k)$ −раціональної точки рівні.

Очевидно, що

$$f(0) = f\left(\Delta^{G(S_k)}_{(0)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{(0)} = 0, \qquad f\left(\Delta^{G(S_k)}_{(i)}\right) = \Delta^{G_2^*}_{(1)} = 1 \ \text{ при } i \neq 0.$$

Неперервність функції

Теорема 1. Функція $f(x)$, визначена рівностями (2) і (3), є неперервною в кожній точці відрізка $[0,1]$.

Доведення. Нехай $x_0 - G(S_k)$ – ірраціональна точка відрізка $[0,1]$, $x_0 = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$.

Тоді для будь - якого $x \neq x_0$ існує число $m \in N$ таке, що

$\{\alpha_{m+1}(x) \neq \alpha_{m+1}(x_0),\ \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0),\qquad i \leq m$, причому $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли $m \to \infty$.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left(\prod_{j=1}^{m} g_{\gamma_j j}\right)\cdot|\omega^m(y) - \omega^m(y_0)| < \prod_{j=1}^{m} g_{\gamma_j j} \to 0\ (m \to \infty).$$

Отже, функція є неперервною в точці x_0 згідно означення.

Якщо x_0 є $G(S_k)$ – раціональною точкою, тобто

$$x_0 = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1][\psi_{k+1}-1][\psi_{k+2}-1]\ldots},$$

то досить повторити попередні міркування для двох випадків, коли $x \to x_0 + 0$, використовуючи перше зображення, і $x \to x_0 - 0$, використовуючи друге зображення. В обох випадках $|f(x) - f(x_0)| = 0$, що рівносильне неперервності функції в точці x_0 згідно означення.

Ніде не монотонність функції

Теорема 2. Функція $y = f(x)$ визначена рівностями (2) і (3) є ніде не монотонною.

Доведення. Досить показати, що для довільного циліндру будь - якого рангу (нехай $\Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, $m < k$) знайдуться точки $x_1, x_2, x_3 \in \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, що

1) $x_1 < x_2 < x_3$,
2) $(y_2 - y_1) \cdot (y_3 - y_2) < 0$.

Вкажемо ці точки. Для цього розглянемо

$$x_1 = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(10)}, \qquad x_2 = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(1)}, \qquad x_3 = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1[\psi_{m+2}-1]\ldots}$$

Очевидно, що $y_1 = f(x_1) = f(x_3) = y_3$, але $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$.

Отже, $(y_2 - y_1) \cdot (y_3 - y_2) < 0$, що свідчить про немотонність функції на циліндрі. Оскільки для довільного інтервалу відрізка $[0,1]$ легко вказати циліндр, який повністю йому належить, то функція не має жодного, як завгодно малого, проміжку монотонності, тобто є ніде не монотонною.

Диференціальні властивості функції

Теорема 3. Для диференційованості функції $y = f(x)$ визначеної рівностями (2) і (3) в $G(S_k)$ – раціональній точці необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

$$|g_{0i}| < q_{0i}, \qquad i \in N \text{ та}$$

$$|g_{1,k+n_1}| < q_{[\psi_{k+n_1}-1],k+n_1}, \text{ де } n_1 = 2p+1,$$

$$p \in N \cup \{0\}, |g_{0,k+n_0}| < q_{[\psi_{k+n_0}-1],k+n_0}, \text{ де } n_0 = 2p, \qquad k \in N.$$

Теорема 4. Нехай $y = f(x)$ – досліджувана функція визначена рівностями (2) і (3). Якщо $|g_{ik}| > q_{ik}$, $i = \underline{0, \ \psi_k - 1}$, $k \in N$, причому хоча б для одного $p_k \in \underline{1, \ \psi_k - 1}$ $\beta_{p,k+1} < \beta_{[\psi_k-1],k}$, то функція $y = f(x)$ є ніде не диференційованою.

Теорема 5. Нехай $y = f(x)$ – досліджувана функція визначена рівностями (2) і (3). Нехай $x_0 = \Delta^{G(S_k)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} - G(S_k)$ – ірраціональна точка відрізка $[0,1]$, така що

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{|g_{\gamma_i i}|}{q_{\alpha_i i}} = 0.$$

1) Якщо існують такі фіксовані скінченні числа N_0 та $N_{[\psi_k-1]}$, $k \in N$, що в $G(S_k)$ –зображенні числа x_0 немає більше, ніж N_0 послідовних нулів і більше, ніж $N_{[\psi_k-1]}$ послідовних цифр виду $[\psi_k - 1]$, $k \in N$, то функція диференційована в точці x_0.

2) Якщо

$$|g_{0i}| < q_{0i}, \qquad i \in N \text{ та}$$

$$|g_{1,k+n_1}| < q_{[\psi_{k+n_1}-1],k+n_1}, \text{ де } n_1 = 2p+1,$$

$$p \in N \cup \{0\}, |g_{0,k+n_0}| < q_{[\psi_{k+n_0}-1],k+n_0}, \text{ де } n_0 = 2p, \qquad k \in N,$$

то функція диференційовна в точці x_0.

Список використаних джерел:

1. Козырев С. Б. О топологической густоте функций.// Мат. Заметки. – 1983. – 33, - №1. – С. 71-76.

2. Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції // Наук, часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. - 2011. - № 12. - С. 24 - 36.

3. Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q -зображенням дійсних чисел //Укр. мат. журн. - 2013. - 65. № 3. - С. 405 - 417.

4. Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Наук, часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 14. – С. 176- 188.

5. Pratsiovytyi M., Vasylenko N. Fractal properties of functions defined in terms of Q - representation // Internat. J. Math. Analysis. –2013.–7. № 61-67. – P. 3155-3169.

6. Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2011.— № 12.– С. 152-167.

7. Працьовитий М. В.. Василенко Н. А. Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2013. – 26. – С. 159-171.

8. Замрій І. В., Працьовитий М. В. Сингулярність інверсора цифр Q_3 - зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелін. коливання. – 2015. – 18, № 1. – С. 55-70.

9. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. - Київ: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

10. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелін. коливання. – 2018. – 21, № 1. – С. 116-130.

11. Працьовитий М. В. Системи числення зі змінною основою та змінним алфавітом (або розвинення чисел в ряди Кантора) // Студент. фіз.-мат. етюди. – 2009. – № 8. – С. 6 - 18.

12. Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. - Київ: Вид-во Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова, 2012. – 68 с.

13. Коваль В. В. Самоафінні графіки функцій // Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2004. –№ 5. – С. 292-299.

14. Панасенко О. Б. Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Наук, часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. - 2008. –№ 9. – С. 104-111.

15. Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Наук. зап. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. - 2002. – № 3. – С. 351 - 362.

16. Працьовитий М.В., Барановський О.М., Маслова Ю.П. Узагальнення Трибін-функції. Нелінійні коливання. 2019, Т. 22, №3, С. 380 390.

17. Працьовитий М., Панасенко О. Диференціальні та фрактальні властивості класу самоафінних функцій. ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ, Серія мех.-мат. 2009, вип. 70, С. 128-142.

ПРО МНОЖИНУ СКІНЧЕННИХ РІВНІВ НЕПЕРЕРВНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Володимир Сафонов

Державний університет телекомунікацій

Олексій Зінькевич

Національний університет харчових технологій

Олександр Нещадим

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Позначимо через $\mathbb{R}$ одновимірний евклідів простір. Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - неперервне відображення. Замкнена множина $P\subset\mathbb{R}$ називається нульвимірною ($\dim P = 0$), якщо вона ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Повний прообраз $f^{-1}f(x_0)$ точки $f(x_0)$, $x_0\in[a,b]$, будемо називати рівнем відображення f. Відображення f називається нульвимірним, якщо кожний його рівень є нульвимірною множиною, тобто $\dim f^{-1}f(x_0)=0$ для будь-якого $x_0\in[a,b]$.

Відомо, що рівні неперервної функції (відображення) f являють собою замкнені множини в $[a,b]$, скінченні або нескінченні. Більш того, існують неперервні функції, у яких всі рівні не тільки нескінченні, але і незліченні.

Розуміння властивостей сукупності всіх рівнів відображення часто дозволяє охарактеризувати його структурні особливості. У зв'язку з цим важливим є питання про вивчення множини рівнів відображення.

Важливими в багатьох випадках виявляються дослідження, які пов'язані з неперервними відображеннями, що не мають інтервалів сталості. Застосовуючи категорний підхід, можна охарактеризувати множину скінченних рівнів неперервного нульвимірного відображення.

Справедливе наступне твердження [1].

Теорема 1. Якщо неперервне нульвимірне відображення $f(x)$, $x \in [a,b]$ має множину $E \subset f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ скінченних рівнів всюди другої категорії в образі, то множина E містить внутрішні точки відносно простору $\mathbb{R}$ на будь-якому інтервалі $(\alpha,\beta) \subset f([a,b])$.

Для існування внутрішніх точок множини скінченних рівнів E достатньо, щоб E була лише множиною не першої категорії в образі. Істотним доповненням до теореми 1 є таке твердження [2].

Теорема 2. Нехай $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ - неперервне нульвимірне відображення з множиною скінченних рівнів $E \subset f([a,b])$ не першої категорії в $f([a,b])$. Тоді існує інтервал $\delta \subset f([a,b])$, такий, що $\delta \subset E$.

Список використаних джерел

1. Сафонов В.М. Про множину скінченних рівнів неперервних функцій / В.М. Сафонов, О.М. Нещадим, О.П. Зінькевич // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія «Техніка та енергетика АПК». - 2015. - Вип.209, Ч.2. - С. 281-286.

2. Сафонов В.М. Про нескінченні рівні неперервної функції / В.М. Сафонов // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2015. – **12**, №3. – С. 220 – 224.

ПРО ДЕЯКІ ОСЛАБЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ЗЛІЧЕННУ КРАТНІСТЬ ВІДОБРАЖЕНЬ

Володимир Сафонов
Державний університет телекомунікацій
Ольга Сафонова
Державний університет телекомунікацій

Серед неперервних відображень особливу увагу привертали зліченнократні відображення. Дослідженню зліченнократних відображень присвячено чимало праць. Вагомі результати М.М. Лузіна, П.С. Александрова, А.М. Колмогорова, Б.О. Пасинкова, Ю.Ю. Трохимчука заклали відправний пункт для подальших досліджень з цієї тематики.

У цьому напрямі слід відзначити теорему П.С. Александрова: при скінченнократному неперервному відкритому відображенні f компакта X множина точок локального гомеоморфізму f всюди щільна в X . Цей результат був поширений А.М. Колмогоровим на зліченнократні відкриті відображення компактів і узагальнений Б.О. Пасинковим: множина точок локального гомеоморфізму відкритого зліченнократного відображення $f: X \to Y$ локально повного простору у розумінні Чеха X всюди щільна і відкрита в X .

Привертає увагу теорема Ю.Ю. Трохимчука: існує щільна відкрита множина точок локального гомеоморфізму при зліченнократному неперервному відображенні двох многовидів однакової вимірності. Автору цієї теореми вдалося позбавитись у випадку многовидів такої сильної вимоги як відкритість відображення.

В подальшому результат Ю.Ю. Трохимчука був посилений: для неперервного нульвимірного відображення f двох n -многовидів з множиною зліченних рівнів всюди другої категорії в образі існує всюди щільна множина точок локального гомеоморфізму відображення f [1]. Більш того, для існування точок локального гомеоморфізму досить вимагати зліченну кратність навіть для точок деякої підмножини не першої категорії [2].

В одновимірному випадку твердження теореми залишається справедливим і для ніде не сталих функцій першого класу Бера з властивістю Дарбу і з множиною зліченних рівнів всюди другої категорії в образі [3]. Виявляється що, якщо знехтувати деякою множиною першої категорії, то при зліченнократному довільному B -вимірному відображенні повного сепарабельного нульвимірного незліченного простору існує щільна множина точок локального гомеоморфізму [4].

Список використаних джерел

1. Трохимчук Ю.Ю. О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений / Ю.Ю. Трохимчук, В.М. Сафонов // Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2013. – Т.10, №4-5. – С. 526-531.
2. Трохимчук Ю.Ю. Счетная кратность и категория / Ю.Ю. Трохимчук // Доповіді НАН України. – 2014. - №1 – С. 33-36.
3. Сафонов В.М. Про функції першого класу Бера з властивістю Дарбу / В.М. Сафонов // Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2017. – Т.14, №1. – С. 222-229.
4. Сафонова О.В. Про зліченнократні B -вимірні відображення / О.В. Сафонова // Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2017. – Т.14, №1. – С. 230-237.

ПОГЛИБЛЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЧЕБИШЕВА ДЛЯ РОЗПОДІЛУ КАНТОРА

Дмитро Скакун

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Нехай ξ_n − послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 2 з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \frac{\xi_1}{3^1} + \frac{\xi_2}{3^2} + \cdots$$

Як відомо [2] функція розподілу $F_\xi(x)$ є функцією Кантора. За класичною нерівністю Чебишева:

$$P\left(\left|\xi - M_\xi\right| \geq k\sigma_\xi\right) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 0.$$

Оскільки $M(\xi_n) = 1$ та $D(\xi_n) = 2 - 1 = 1$ маємо:

$$M_\xi = M\left(\frac{\xi_1}{3^1}\right) + M\left(\frac{\xi_2}{3^2}\right) + \cdots = \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{3} * \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

$$D_\xi = D\left(\frac{\xi_1}{3^1}\right) + D\left(\frac{\xi_2}{3^2}\right) + \cdots = \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9^n} + \cdots = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{9^1} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right) = \frac{1}{9} * \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8},$$

Розглянемо функцію

$$f(k) = k^2 P\left(|\xi - 0{,}5| \geq \frac{k}{\sqrt{8}}\right) = k^2(1 - F_\xi\left(\frac{k}{\sqrt{8}} + 0{,}5\right) + F_\xi\left(-\frac{k}{\sqrt{8}} + 0{,}5\right))$$

Оскільки функція Кантора задовольняє умову Гельдера:

$$|F_\xi(x) - F_\xi(y)| \leq |x - y|^{\log_3(2)}$$

то легко отримати, що

$$f(k) \le 2k^2\left(0{,}5-\frac{k}{\sqrt{8}}\right)^{log_3(2)}.$$

Використовуючи нерівність Коші з ваговими коефіцієнтами можливо отримати:

$$f(k) = 2log_2(3)(\frac{\sqrt{2}}{2+log_2(3)})^{2+log_2(3)} \approx 0{,}6063$$

Таким чином, для розподілу Кантора нерівність Чебишева має поглиблення :

$$P\left(\left|\xi - M_{\xi}\right| \ge k\sigma_{\xi}\right) \le 0{,}6063 \cdot \frac{1}{k^2}, \;\; k > 0.$$

Список використаних джерел:

1. Працьовитий М.В.,Макарчук О.П. Розподіл випадкової величин, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами.//Науковий часопис НПУ імені. Драгоманова.Серія 1.Фізико-математичні науки, 2010. − №11.− С.160-169.

2.Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. − Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. − 296с.

3.Працьовитий М.В.,Торбін.Г.М. Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп.НАН України. − 1998. − №4. − С.48-54.

4.Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения.−Киев: Наук.думка, 1992. − 2008с.

5.Jessen,B., Wintner,A. Distribution function and Riemann Zeta-function, //Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. − P.48-88.

ТРИКУТНИЙ КИЛИМ СЕРПІНСЬКОГО, ОЗНАЧЕНИЙ В ТЕРМІНАХ Q_2-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА [0;1]

Софія Ратушняк

Інститут математики НАНУ, НПУ імені М.П. Драгоманова

Анастасія Трачук

НПУ імені М.П. Драгоманова

Нехай $A = \{0;1\}$ − алфавіт двосимвольної системи кодування чисел відрізка $[0;1]$, $L = A \times A \times ...$ − простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць), q_0 − додатний параметр менший 1, $q_1 \equiv 1 - q_0$. Відомо [1,3], *що для будь-якого числа* $x \in [0;1]$, *існує послідовність* $(\alpha_k) \in L$ *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{k-1}\alpha_k...}, \tag{1}$$

де $\beta_0 \equiv 0, \beta_1 \equiv q_0$. Ряд (1) називається Q_2 −*представленням* числа x, а його скорочений запис $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{k-1}\alpha_k...}$ − Q_2-*зображенням.*

Існує зліченна множина чисел, які мають два Q_2-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{k-1}1(0)} = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{k-1}0(1)}.$$

Решта чисел мають єдине Q_2-зображення. Перші називають Q_2-*бінарними,* другі – Q_2-*унарними*[1].

Зауважимо, що Q_2-зображення чисел є класичним двійковим зображенням чисел відрізка $[0;1]$ при $q_0 = \frac{1}{2}$, а тому є його узагальненням.

На евклідовій площині розглядається множина, означена в ортонормованому репері формулою:

$$S = \{M(x,y)\colon x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...},\; y = \Delta^{Q_2}_{\beta_1\beta_2...\beta_n...}, \alpha_i + \beta_i \le 1,\; \alpha_n, \beta_n \in A\}.$$

Теорема 1. *Множина* S *є самоафінним фракталом простору* R^2*, яка має структуру:*

$$S = S_0 \cup S_1 \cup S_2, де\ S = f_0(S) \cup f_1(S) \cup f_2(S) \quad (2)$$

$$f_0: \{x' = q_0 x\ y' = q_0 y\ , \quad f_1: \{x' = q_1 x + q_0\ y' = q_0 y\ , f_2: \{x' = q_0 x \quad y' = q_1 y + q_0 \quad (3)$$

Самоафінна розмірність якої є розв'язком рівняння:

$$q_0^x + (\sqrt{q_0 q_1})^x + (\sqrt{q_0 q_1})^x = 1,$$

тобто 1 .

Властивості фрактальної множини S:

1) *Перетин фігури S з графіком функції $y = x$ є злічена множина точок виду*

$$P = \left\{M(x_0; y_0): x_0 = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}(1)}, \quad y_0 = I(x_0)\right\}.$$

Справді, оскільки множині S належать точки Q_2-цифри координат яких задовольняють нерівність $\alpha_i(x) + \beta_i(y) \leq 1$, а графіку функції $y = x$ належать точки такі, що $\alpha_i(x) = \beta_i(y)$, то перетином цих множин будуть точки Q_2-цифри координат яких задовольняють $\alpha_i(x) = 0 = \beta_i(y)$, тому точка з координатами $(0; 0)$ є спільною. Окрім цього, враховуючи той факт, що Q_2-бінарні числа мають два зображення, то до графіка функції $y = x$ належать точки виду $\left(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}(1)}; \Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)}\right)$, які в свою чергу і задовольняють нерівність множини S. Тому перетином цих множини є точки $\left(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}(1)}; \Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)}\right)$, де $n \in N_0$. Очевидно, що $I\left(\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}(1)}\right) = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)}$, де $I\left(\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}\right) = \Delta^{Q_2}_{[1-c_1][1-c_2]\ldots[1-c_n]\ldots}$ – інверсор цифр Q_2-зображення чисел. Тому перетином множини S з графіком $y = x$ є множина P.

2) *Множина S своєю симетрією має осьову симетрію відносно прямої $l: y = x$.*

Нагадаємо, що симетрією називається рух, що переводить фігуру саму в себе. Розглянемо осьову симетрію відносно осі $l: y = x$:

$$g: \{x' = y\ y' = x\ .$$

Подіємо перетворення g на множину. Очевидно, що $g(S) = S$, оскільки виконуються нерівності: з того, що $\alpha_i(x) + \beta_i(y) \leq 1$, маємо що $\alpha_i(y') = \alpha_i(x)$ і $\beta_i(x') = \beta_i(y)$, тобто $\alpha_i(x') + \beta_i(y') \leq 1$.

3) *Перетином множини S з прямими $y_n = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{b_n}(0)}$,де $n \in N$ є множина*

$$P_{y_n} = \{M(x; y): x_n = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{a_1}\underbrace{}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\ldots e_1\ldots e_{a_n}\underbrace{}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{b_n}d_1d_2\ldots}, y_n = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{b_n}(0)}\}$$

де $a_i, b_i \in N_0$, $c_i, e_i d_i \in A$.

4) *Перетином множини S з прямими $x_n = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{b_n}(0)}$,де $n \in N$ є множина*

$$P_{x_n} = \{M(x; y): x_n = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{b_n}(0)}, y_n = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{a_1}\underbrace{}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{b_1}\ldots e_1\ldots e_{a_n}\underbrace{}_{a_n}\underbrace{1\ldots1}_{b_n}d_1d_2\ldots}\}$$

де $a_i, b_i \in N_0$, $c_i, e_i d_i \in A$.

Теорема 2. *Множина S є узагальненням класичного трикутного килима Серпінського і співпадає з ним, коли $q_0 = \frac{1}{2}$.*

У доповіді будуть представленні обгрунтування всіх наведених фактів, а також результати дослідження інших властивостей множини S.

Список використаних джерел

1. *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С.92-102.
2. *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ. Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.
3. *Працьовитий М.*В. Основи метричної теорії класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ. Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 100 с.
4. *Працьовитий М.В., Скрипник С.В.* Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 134-143.
5. *Працьовитий О.М.* Властивості поліосновної логарифмічної функції. // Науковий часопис НТТУ «КПІ». Студентські фізико-математичні етюди. – 2004. - №4. – с.56
6. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Київ: Наукова думка, 1992. – 208 с.

INVARIANT SOLUTIONS OF A SYSTEM OF EULER EQUATIONS

Ivan I. Yuryk
National University of Food Technologies

Formulation of the problem To describe the motion of nonviscous compressible liquid we use the system of equations

$$D_t u^k(t,x) + \rho^{-1}\nabla_k p(t,x) = 0\,,\ D_t\rho(t,x) + \rho\nabla_k u^k(t,x) = 0\,, \qquad (1)$$

where $t \in R^1$, $x \in R^n$ (n=1,...,3), $u^k(t,x)$ stands for the k-th component of the medium's velocity (k=1,...,n), p is the pressure, ρ is the liquid density, and $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u^k\nabla_k$ is the total derivative with respect to time with $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. Repeating indices mean summation, unless otherwise noted.

The main thermodynamical characteristics of the medium ρ, p and T are expected to be related by an expression

$$p = \Phi(\rho,T), \qquad (2)$$

where Φ is a smooth (piecewise smooth) function. We also assume that the process described by system (1–2) is either isothermal (T=const) or homothermal ($\nu_k T$=0, k=1,...,n). Therefore T does not depend on spatial coordinates, and state equation (2) reads as

$$p = F(\rho,T), \qquad (3)$$

with another function F.

In order to represent system (1) in a convenient for the following analysis form we introduce the notations

$$u^k_\mu = \frac{\partial u^k}{\partial x_\mu}\,, \qquad \rho_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial x_\mu}\,, \qquad p_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}\,,$$

where k=1,...,n, μ=0,...,n, and x_0=t. Using these notations we represent system (1) in the form

$$u^k_0 + u^k_j u^j + \rho^{-1} p_k = 0\,, \qquad \rho_0 + u^j\rho_j + \rho u^j_j = 0\,, \qquad (4)$$

Substituting (3) into the first equation (4) we obtain

$$u^k_0 + u^j u^k_j + \rho^{-1}F_\rho \rho_k = 0\,, \qquad (5)$$

$$\rho_0 + u^j\rho_j + \rho u^j_j = 0\,, \qquad (6)$$

where $F_\rho = \frac{\partial F}{\partial \rho}$.

For the symmetry analysis of system (5–6) we use the infinitesimal Sophus Lie method. Its brief description is following. Let

$$F^\nu(x,u,u_{(1)}) = 0\,, \qquad \nu=1,...,N, \qquad (7)$$

be a system of first order differential equations, where $x=(x_1,...,x_n)$, $u=(u^1,...,u^m)$, and $u_{(1)}=Du$. We consider a one-parameter local group G of transformations

$$x' = f(x,u;a): \ f\big|_{a=0} = x, \qquad u' = g(x,u;a): \ g\big|_{a=0} = u \tag{8}$$

in the space R^{n+m} of the variables (x,u). Transformations (8) induce a one-parameter group of transformations in the space of the variables $u_{(1)}$,

$$u_{(1)}' = \Psi(x,u,u_{(1)};a): \ \Psi\big|_{a=0} = u_{(1)}, \tag{9}$$

where $\Psi(x,u,u_{(1)};a)$ is a function which can be determined once we know f and g. As a result we have a one-parameter group $G_{(1)}$ of transformations in the space R^{n+m+nm} of the variables $(x,u,u_{(1)})$. Transformations (9) are referred to as the *prolongation* of transformations (8), and the group $G_{(1)}$ is the *first prolongation* of G [1, Chapter 2.3].

***Definition* .** System of equations (7) is said to be *invariant with respect to group G of point transformations* (8) if the manifold determined by equations (7) in the space R^{n+m+nm} is invariant with respect to the first prolongation $G_{(1)}$ of group G.

Let

$$X = \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x_j} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{10}$$

where

$$\xi^j(x,u) = \left.\frac{\partial f(x,u,a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \tag{11}$$

$$\eta^\alpha(x,u) = \left.\frac{\partial g(x,u,a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{12}$$

The operator X is said to be the *infinitesimal operator* of the one-parameter group G^1 of transformations, and functions ξ^j and η^α are its *coordinates*. The first prolongation of the group G^1 corresponds to an infinitesimal operator of the form

$$X_{(1)} = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}, \tag{13}$$

where

$$\zeta_i^\alpha = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x_i} + u_i^\mu \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\mu} - u_j^\alpha\left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} + u_i^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}\right). \tag{14}$$

One of the prominent results in the group theory of continuous transformations is the fact that the invariance criterion for a differential equation with respect to group G^1 is stated in terms of the correspondent infinitesimal symmetry operator, cf. [2].

***Proposition* .** *System of equations* (7) *is invariant with respect to group* G^1 *if and only if*

$$X_{(1)}F^\nu(x,u,u_{(1)})\big|_{F=0} = 0, \qquad \nu=1,...,N, \tag{15}$$

Condition (15) is equivalent to a system of first order linear differential equations in x, u and $u_{(1)}$ named the *system of determining equations*.

Thus the problem of finding the maximal local group of point transformations that are admissible for system (7) is to determine the coordinates of the infinitesimal operators that generate its one-parameter subgroups.

In the case of system (5–6) the infinitesimal symmetry operator is expected to be of the form

$$Z = \xi^\mu(x,u,\rho)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k(x,u,\rho)\frac{\partial}{\partial u^k} + \Lambda(x,u,\rho)\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{16}$$

where $\mu=1,...,n$, $k=1,...,n$.

Acting by operator (16) on equations (5–6) we obtain a rather cumbersome system of first-order linear differential equations. Eliminating the variables u_0^k and ρ_0 by virtue of their expressions from (5) and (6), we transform it to another system of equations where the quantities x_α, u^k, u_j^k and ρ_j will be treated as independent variables from this point. As the coordinates of the infinitesimal operator do not depend on u_j^k and ρ_j, the two equations obtained from (5) and (6) by means of criterion (15) can be split with respect to these variables. As a result we have the system of differential equations

$$\eta^k u^l + \xi_k^l = 0, \quad \eta^k u^l + \xi_l^k = 0, \qquad k \neq l,$$

$$\eta^j + u^j \xi_0^0 - \xi_0^j - \sum_{i=1}^n \xi_i^j u^i = 0, \quad \Lambda_\rho + \rho^{-1}\Lambda + \xi_k^k - \xi_0^0 - \eta^k u^k = 0,$$

$$\Lambda_0 + \sum_{i=1}^n \left(u^l \Lambda_l + \rho u_l^l\right) = 0, \tag{17}$$

$$2F_\rho\left(\xi_0^0 - \xi_k^k\right) + F_{\rho\rho} A + F_{0\rho}\xi^0 = 0, \tag{18}$$

where $\xi^0 = \xi^0(x_0)$, $\xi^k = \xi^k(x)$, $\eta^k = \eta^k(x,u)$, $\Lambda = \Lambda(x,u,\rho)$. In all the formulae (17–18) there is no summation over repeating indices.

Note that the arbitrary function F appears only in (18). This equation is refereed to as a

It is easy to check by direct calculations that system (17) has the solution

$$\xi^0 = \theta x_0^2 + \lambda x_0 + \alpha, \qquad \Lambda = \left(c - \frac{n}{2}\dot{\xi}^0(x_0)\right)\rho,$$

classifying condition.

Therefore, if we restrict the consideration to the symmetry operators that do not contain any quadratic terms in their coefficients, the following theorem holds.

Theorem . *The four classes of invariant solutions to system* (5–6) *compatible with the Rankine–Hugoniot conditions under n*=1 *are:*

a) solutions that are invariant with respect to the one-parameter subgroup generated by the operator

$$Z_I = (\alpha + \lambda t)\frac{\partial}{\partial t} + (\nu - BSt + Ax)\frac{\partial}{\partial x} + Bu\frac{\partial}{\partial u} + L\rho\frac{\partial}{\partial \rho},$$

where L=–B, α, λ, ν, A, B and S are constants, $B \neq 0$ and $S \neq 0$, if $p = c - \frac{(S\rho_1)^2}{\rho}$;

b) solutions invariant with respect to the one-parameter subgroup generated by the operator

$$Z_{II} = (\alpha + \lambda t)\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \lambda x)\frac{\partial}{\partial x},$$

if $p = \Phi(\rho) + p_1$;

c) solutions invariant with respect to the one-parameter subgroup generated by the operator

$$Z_{III} = \lambda t\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + Ax)\frac{\partial}{\partial x} + Bu\frac{\partial}{\partial u},$$

where $A = \lambda(\frac{\sigma}{2} + 1)$, $B = \frac{\lambda\sigma}{2}$, if $p = t^\sigma \Phi(\rho)$;

d) solutions invariant with respect to the one-parameter subgroup generated by the operator

$$Z_{IV} = \alpha\frac{\partial}{\partial t} + (\nu + \kappa\alpha x)\frac{\partial}{\partial x} + \kappa\alpha u\frac{\partial}{\partial u},$$

if $p = e^{2\kappa t}\Phi(\rho) + p_1$.

Hereby, the cases when the boundary-value problem (5), (6) admits invariant solutions are exhaustively described. Some special cases are considered in [11].

References:

1. Olver, P. *Applications of Lie groups to differential equations*, New-York, Springer-Verlag, 1986.

2. Ovsjannikov, L.V., Group analysis of differential equations, Moscow, Nauka, 1978, 399 pages (in Russian).

3. Ovsjannikov, L.V., Lectures on the fundamentals of gas dynamics, Moscow, Nauka, 1981, 368 pages (in Russian).

4. Fushchych, W.I., Symmetry in problems of mathematical physics, in: Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics, Inst. of Math. Acad. of Sci. Ukraine, Kiev, 1981, p. 6–28 (in Russian).

5. Barannyk, A.F, Yuryk, I.I., On a new method for constructing exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical physics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), no. 21, p. 4899–4907.

6. Barannyk, A.F., Barannyk, T.F., Yuryk, I.I., Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg–de Vries type, *Rep. Math. Phys.* **68** (2011), no. 1, p. 97–105.

7. Barannyk, A.F., Barannyk, T.A., Yuryk, I.I., On hidden symmetries and solutions of the nonlinear d'Alembert equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** (2013), no. 7, p. 1589–1599.

8. Bihlo, A., Popovych, R.O., Lie symmetries and exact solutions of barotropic vorticity equation, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 123102, 12 pp.

9. Fushchych, W.I., Serova, M.M., On the maximal invariance group and general solution of the one-dimensional gas dynamics equations, Proc. Acad. of Sci. of USSR (DAN SSSR), 1983, Vol. 268, No 5, p.1102–1104 (in Russian).

10. Korobeynikov, V.P., Mel'nikova, N.S., Ryazanov, E.V. The theory of point explosion, Moscow, Fizmatgiz, 1961, 332 pages (in Russian).

11. Yuryk, I.I., Application of group-theoretical methods to solving the point explosion problem in incompressible liquid, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **22** (2015), 1017–1027, doi:10.1016/j.cnsns.2014.09.022.

Секція

«Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики

НЕВГАСУЩЕ ВІДЛУННЯ ВЕЛИЧІ І НИЦОСТІ МИНУЛИХ КАФЕДРАЛЬНИХ ПОДІЙ

(До 90-річчя кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.)

Михайло Мартиненко
Національний університет харчових технологій, Київ

Нам необходимо вглядеться в прошлое,
чтобы понять настоящее и увидеть контуры будущего.
Восточная мудрость

6.07.1901 – 9.11.1937

Тоталітарна влада вписала ганебну і трагічну сторінку в історію НУХТ тоді, коли розірвала молоді, здорові і невтомні серця фундаторів кафедри вищої математики проф. В.І.Можара і акад. М.П.Кравчука і перекреслила їх вагомі науково-педагогічні здобутки.

Цензура внесла незламних українських патріотів В.Можара і М.Кравчука до списку «ворогів народу» і повністю витіснила їх із медійного простору. Тому сьогодні в біографіях видатних вчених залишається ще багато білих плям. Нижче проаналізована низка малознаних фактів, дотичних до життя і смерті засновників кафедри.*

*У другому томі справи Можара В.І. зберігається акт про розстріл 36-річного професора чекістом О.Шашковим.

Які світоглядні переконання і земні дороги звели жертву і катюгу в одну точку простору і в один час? Дамо лише мозаїчну відповідь на це ключове питання.

В.Можар народився 06.07.1901р. на Житомирщині, а О.Шашков – 12.09.1900р. в далекій Симбірській губернії (однолітки). Історики встановили, що О.Шашков мав вельми обмежені учнівські здібності, а тому в школі його тримали всього один рік.

В 1920р. О.Шашков став агентом репресивних органів, а через три роки його направили в м. Київ для боротьби з «ворогами народу». Тут, на українському родючому суспільному ґрунті, він по трупах виліз не на одну кар'єрну висоту.

В органах НКВС приречених до страти розстрілював особисто штатний «Исполнитель». Йому давали надвисоку зарплату, вагомі надбавки, позачергові звання, ордени і т.д.. За ці «жирні куски» і «козирні тузи» чекісти вели між собою безкомпромісну війну. Битву катів виграв малоосвічений О. Шашков.

За цей період В.Можар успішно закінчив гімназію, інститут, аспірантуру, оволодів чотирма іноземними мовами, опублікував низку вагомих науково-методичних праць всеукраїнського значення, став високоефективним очільником кафедри вищої математики і наймолодшим професором (32р.) в історії нашого ВНЗ.

На жаль, зустріч всебічно обдарованого і високоосвіченого в гуманітарних і природничих науках В.Можара з неуком О.Шашковим відбулася не в академічній аудиторії, а в залитій свіжою кров'ю людобійні, в якій чинив розправи прибулий симбірський душогуб. В документальній інтернет-статті «Один день палача…» доведено, що 14.01.1938 О.Шашков особисто розстріляв 39(!!!) чоловіків (1. Буркут Н.Т.,1899р.н., …. 39. Яновський В.Я.1877р.н.). Вибив ще один «жирний кусок», і вибивав він їх регулярно. Названа цифра страчених за одну ніч суттєво менша особистого антирекорду орденоносного ката (39< 53+).

«Нам необходимо вглядется в прошлое…» і усвідомити, наскільки злочинною і небезпечною є влада, яка любими фізичними і психологічними тортурами знищує незалежну інтелектуальну еліту суспільства, і в той же час щедро кидає золото і нагороди паталогічним невігласам-душогубам.

*Спочатку було слово …Спочатку шавкали облудні донощики, а вже потім лунали контрольні постріли.

У справі В. Можара підшита множина повідомлень про його ворожість до радянської влади. Ось одне із множини свідчень , яке написав «колега» І. Цопотуха:

«…на Совете ВТУЗа в 1935г., где обсуждался вопрос об итогах испытания студентов по русскому и украинскому языкам, В.И.Можар сделал националистическое выступление …».

В ті роки націоналістів карали як «ворогів народу». Про це добре знали члени кодла «Цопотух» (узагальнена назва множини донощиків), а тому їх повідомлення не були випадковими.

У християнському світі еталоном підлості, ницості і гнидства був і є Іуда і його 30 срібняків. Ця біблійна тема перегукується з нашою історією: Іуда відправив Ісуса на Голгофу, а кодло «Цопотух» відправило світлу голову проф. В.Можара (і не тільки) на плаху катюзі. …Стверджують, що Іуда розкаявся в своїх гріхах, але «Цопотухи» і далі побрели наклепницьким болотом. Так, після запроторення в буцегарню плеяди талановитих вчених-патріотів нашого ВНЗ, кодло «Цопотух» відразу почало нахабно оббріхувати, чорнити і паплюжити їхні славні і чесні імена. Вони організували в газеті «Центрофуга» (15.10.1937р., №21) облудну ганебну публікацію:

«Тричі прокляті наймити фашистів Кухаренко, Можар та інші викриті органами НКВС, які приклали свою підлу руку, щоб зірвати підготовку високоякісних більшовицьких фахівців. Нарбут.»

Освячений «Цопотухами» пасквіль Нарбута масово заразив світоглядне поле колективу смертельно небезпечним, плодючим і живучим вірусом прокляття, страху, ненависті і брехні». І головне: «Цопотухи» тричі прокляли не душогубів-катюг, а славних синів нашого інституту і України. Ворон ворона в око не клюне!*

*Не менш мерзенний і трагічний сценарій нашкрябали у владних кабінетах і для українського патріота М.П.Кравчука.

В 1937р. Акад. М.Кравчуку всього 45 років! Він онук сільського коваля і успадкував від діда богатирську статуру і міцне здоров'я. Його зірка вже яскраво сяє в сузір'ї найвидатніших математиків світу!!! Його мозок запліднений роєм новітніх математичних ідей і попереду в Академіка мінімум три десятиліття творчої праці.

Несподівано в газеті «Комуніст» (14.09.37) з'являється стаття *«Академік Кравчук рекламує ворогів»*. Це не стаття, а запланований відкритий сигнал репресивним органам про «антирадянські» дії М.Кравчука. Першим підписав його хворобливий і старіючий (75р.) Директор інституту математики АН УРСР, Академік-орденоносець Д.Граве. Завдяки своєму надзвичайно високому і домінуючому положенню у диктаторській владі, він тоді був, фактично, намісником Бога на українському математичному Олімпі, а тому його адміністративний сигнал прогримів як заклик:

«Хто не зі мною,
той проти Бога!
Хто не зі мною,
той проти всіх!
І припали мізерно-убогі душі
Губами до пальців «солодких» ніг!»
(тема В.Симоненка)

Кнопка «Пуск» була натиснута, і розпочався безславний публічний ланцюговий процес :

«Для М.Кравчука тяжка година випробування настала у 1937р. …влаштовують йому ганебні псевдосудилища у стінах ін-ту математики, університету, політехнічного інституту, де один перед одним рвуться до трибун його вчорашні співробітники, учні й студенти зі словами належного «гнівного осуду». [1]

С-а-а-м Д.Граве брутально-ницько виступив на зборах і емоційно таврував М.Кравчука словами «фашист», «ворог народу» і ін. [1]. Доречно пригадати, що директорат неодноразово переходив межу людської гідності і організовував паскудне колективне цькування визнаного світом математика [1,3]. Л.Костенко назвала подібні сходки «огидним зборищем лакуз».*

*Справу М.Кравчука розглядала комісія на чолі з Акад. О.Гольдманом. Вона детально відновила події минулих літ і прийняла «Висновки» [2] . Ось один із «страшних» злочинів, який тяжкою працею відкопала комісія:

«Будучи на гулянці на Дніпрі Акад. Кравчук у відповідь на прохання дружини Леві-Чивіта 2-3 роки тому «порекомендувати що-небудь прочитати з історії України» рекомендує прочитати «Історію України» М.Грушевського та ще на німецькій мові. …Отже за «теорією» Кравчука твори геніїв людства – товаришів Леніна – Сталіна – є твори, написані мовою неприступною, а твори націоналіста є приступні.» [2]

Цей абсурдний факт «кроти» вирили для того, щоб ним підперти побудоване на глиняних ногах звинувачення М.Кравчука в буржуазному націоналізмі і ігноруванні «безсмертних» творів Сталіна. За подібні «злочини» тоді позбавляли волі не менше, ніж на десять років. Комісія підготувала підґрунтя для більшої кари.

На високе чоло видатного вченого, який геніальними працями прославив українську математику у світі, який роками ініціював безліч громадських проектів і втілював їх у життя, який створював і очолював науково-педагогічні і авторські дружні колективи (кафедри, відділи АН, ради …), який щедро дарував свої наукові вагомі ідеї не одній сотні молодих вчених і студентів, який … , лукава і підступна комісія наліпила ганебний ярлик із написом «Від-лю-док»:

«Акад. Кравчук весь час намагався відокремитися від колективу співробітників Ін-ту, протиставити себе колективу, намагався відмежуватися від Ін-ту, як від громадського життя Ін-ту, так і в науковому відношенні.» [2]

Ла-ку-зи! Лакузи тут запопадливо низько нагнулися і реалізували на практиці пануючу дебільну догму: «Хто не з Директором, той проти всіх!»

Вражає надзвичайно жорстокий, фактично, смертельний вирок злочинної комісії:

«Осудити дії акад. М.П.Кравчука як антирадянські, буржуазно-націоналістичні.» [2]

Крапка. Академічна лакузна комісія накинула на шию видатного вченого-патріота М.Кравчука задушливий подвійний зашморг («антисоветчик, бурж.-нац.»), а вже інші «гегемони» поволокли його до ешафоту.

20.09.1938р. М. Кравчука засудили на 20 років смертельної каторги, а через рік і дух Д. Граве полинув у вирій … та не орлом. Їхні тіла давно зітліли, а битва їх світоглядів триває.

Пізніше М.Кравчук і В.Можар були повністю реабілітовані. Це значить, що вони не були ні «ворогами народу», ні «фашистами», а їхні справи – сфальшовані. Спочатку сичало брехливе смертельне слово!*

«Нам необходимо вглядеться в прошлое ....» і побачити, що славних Батьків кафедри вищої математики (і не тільки) замордували до смерті сумісними злочинними зусиллями чекісти, кодло «Цопотух» і «огидне зборище лакуз». Для попередження повторних спалахів смертельного «вірусу прокляття, страху, ненависті і брехні» необхідно імена причетних до мордування плеяди вчених-патріотів нашого інституту (НУХТ) оприлюднити на гранітній «стіні ганьби» і поруч великими літерами викарбувати найсправедливіший «Вирок», який їм виніс наш духовний Світоч і Пророк:

Не вам…
За правду пресвятую стать
І за свободу. Розпинать,
А не любить ви вчились брата!
О роде суєтний, проклятий,
Коли ти видохнеш?
(Т. Шевченко) *

*Особливо цінними для історії і сьогодення є спогади безпосереднього свідка згаданих подій проф. О.С.Смогоржевського, який працював на нашій кафедрі з 01.10.1930р. В них він стверджує, що однією з основних причин усунення фундаторів кафедри з української науково-педагогічної ниви була заздрість, підлість і ницість їх негідних конкурентів і світоглядних ворогів. Достовірність суті сказаного засвідчує маленький абзац із безцінних споминів проф. О.Смогоржевського:

*«Та набагато сумніша доля Михайла Пилиповича, якому я так багато зобов'язаний. Гіркота цієї втрати досі пече моє серце вогнем, і час не може загасити його. Адже цю виключно обдаровану людину, що була в розквіті творчих сил зацькували, облили брудом, загубили. Не можна цього забути. Ганьба ворогам Михайла Пилиповича, що бачили в його особі небезпечного конкурента і всіма правдами і неправдами прагнули усунути його. Ганьба й тим, хто потурав їм, вигадуючи в припадку якоїсь божевільної вакханалії, нові і нові наклепи на нього. Мир його світлій пам'яті!»**

Список використаних джерел:

1. Кравчук М. Науково-популярні праці./Укл. Н.Вірченко. – К.: НТУУ (КПІ), 2000 – 232с.
2. ЦДАГС України, Ф.263, оп, 1,спр. 44370, арк.. 127-130.
3. Сорока М. Академік Кравчук. Біографічний роман. //Дніпро. 1985. - №11,12.

ПРО КАФЕДРУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА МОЖАРА В. І.

(до 90-річниці заснування)

Олексій Зінькевич, Іван Юрик

Національний університет харчових технологій, Київ

Кафедра створена у 1930 р. одночасно із заснуванням Київського інституту цукрової промисловості (КІЦП). В його штаті розпочали свій творчий шлях 6 фундаментальних кафедр і серед них кафедра вищої математики, яка є однією із тих, що не змінила своєї назви за 90 років.

У той час у Всеукраїнській Академії Наук (ВУАН) активно працювала плеяда геніальних математиків: М. Кравчук, Д. Граве, М. Крилов та інші. Вони зробили вагомий внесок у розвиток світової математичної науки і поставили українську математичну школу на один рівень з найкращими науковими школами світу. ВУАН постійно готувала науково-педагогічні кадри для вищих навчальних закладів (ВНЗ) України, і одним з найталановитіших учнів академіка М. Кравчука був Можар Володимир Іванович, який і став першим завідувачем кафедри.

Можар Володимир Іванович народився 06.07.1901р. в с. Березівка Коростишівського р-ну на Житомирщині в селянській українській сім'ї. Закінчив сільську церковно-приходську школу, а середню освіту здобув в м. Житомирі. В 1925 р. успішно закінчив Житомирській педінститут і після цього отримав спеціальну математичну підготовку в Київському інституті народної освіти. Проходив аспірантський стаж на науково-дослідній кафедрі математики ВУАН під керівництвом М. Кравчука і М. Крилова. Вже тоді він займався розв'язуванням диференціальних інтегральних рівнянь теорії пружності, використовуючи в основному методи теорії ФКЗ. Під час навчання в аспірантурі він активно викладав на кафедрі вищої математики КПІ. Маючи високу професійну математичну підготовку і досвід педагогічної роботи, В. І. став організатором кафедри математики КІЦП, в цьому йому допомагали математики ВУАН. Можар володів кількома іноземними мовами, в тому числі англійською, німецькою, французькою. Проте в стінах рідного інституту завжди читав лекції та доповіді українською мовою. Вчений вніс вагомий вклад у створення українського математичного словника. 23.02.1935 р. він був затверджений в званні професора на кафедрі математики. В. І. Можар продовжував і далі плідно працювати над докторською дисертацією, в кінці квітня 1937р. від'їхав до Москви для доповіді своєї роботи на науковому семінарі, проте 27.04.1937р. був заарештований органами НКВС, звинувачений як « учасник націонал-фашистської терористичної організації». Через декілька днів був переправлений до м. Києва. Відразу був проведений детальний обшук в його квартирі. Там було знайдено 2 книги Хвильового, 2 книги Винниченка та інше. Саме ця література була використана як головний доказ причетності Володимира Івановича до ворожої організації. Абсолютно всі звинувачення заарештований заперечував, проте не приховував того, що просування українізації в його інституті було недостатнім і йому це не подобалося. На початку жовтня справу передали на розгляд трійки при Київському обласному управлінні НКВС, яка винесла йому вирок - розстріл. Вченого стратили опівночі 9 листопада 1937року. Так, на злеті розквіту життєвих і творчих сил, на тридцять сьомому році життя обірвалася діяльність талановитого математика, визначного педагога, першого завідувача кафедри вищої математики проф. Володимира Івановича Можара. Місце його могили на сьогоднішній день не відоме. 03.08.1956 року справу було переглянуто, і Володимира Івановича повністю реабілітували. Сьогодні кафедра вищої математики НУХТ носить ім'я професора Можара В.І., а студентам, які досягли значних успіхів в математиці, надається стипендія ім. професора Можара В.І.

Так трагічно закінчився перший період (1930-1937р.р.) надзвичайно високих науково-методичних досягнень колективу кафедри. Після цього над кафедрою пронісся процес руйнації і всі попередні досягнення були перекреслені.

В 1974 р. кафедру очолив доцент Побиванець І. П. **Він багато уваги надавав** кадровій політиці. За 20-ти річний період роботи кафедри під керівництвом доцента Побиванця її штат постійно зростав і збільшився майже удвічі. Кафедра значно „омолодилася", і були роки, коли найстарший викладач мав всього 50 років. Суттєві зміни в роботу кафедри вніс закон “Про державну мову”. На кафедрі **підготовлений посібник з математики державною мовою, який виграв всеукраїнський конкурс і який побачили студенти та педагоги України в 1993 р.: *В.П. Дубовик, І.І. Юрик, Вища математика. Навч. посібник.- К: Вища школа.* Це перший посібник українською мовою для студентів технічних і технологічних вузів, який витримав багато перевидань з загальним тиражем понад 100 тис. і яким користуються студенти вузів по всій Україні.** Протягом року колектив кафедри під цей посібник підготував збірник задач, який вийшов з друку тільки 1999, дякуючи зусиллям вже нового завідувача кафедри професора Мартиненка М.А. Під його керівництвом, **опираючись на значний попередній досвід підготовки широкого кола методичних розробок, кафедра після 1994 взяла напрям на підняття методичної роботи на наступний вищий фаховий рівень. Робота колективу була спрямована на підготовку навчальних посібників і підручників**, зокрема, з теорії ймовірностей та математичної статистики, математичного програмування і теорії функцій комплексної змінної. Сьогодні, завдяки ініціативі та наполегливості Мартиненка М.А., кафедра вищої математики НУХТ носить ім’я професора Можара В.І

В 2017 р. кафедру очолив професор Юрик І.І. Кафедра одразу взяла курс на використання попереднього педагогічного досвіду колективу і успішно продовжила працювати над усіма переліченими вище основними напрямами науково-методичних досліджень. Викладачі кафедри працюють на всіх факультетах університету і забезпечують викладання таких навчальних дисциплін: «Вища математика», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Теорія ймовірностей та випадкові процеси», «Математика», «Вища математика для харчових технологій», «Дискретна математика». Для покращення навчального процесу викладачі кафедри працюють над створенням методичних рекомендацій, конспектів лекцій та навчальних посібників. У процесі розробки робочих навчальних планів і програм дисциплін використовується передовий досвід інших вищих навчальних закладів.

Викладачі кафедри готують фахівців також у відокремлених структурних підрозділах НУХТ – регіональних навчальних центрах. Кожного року викладачі кафедри приймають активну участь у зарубіжних, міжнародних та всеукраїнських конференціях. Кафедра разом з кафедрою вищої математики Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова регулярно організовує Міжнародні науково-методичні конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі" (остання 21 – 22 червня 2018 р.). Кафедра вищої математики НУХТ співпрацює з науковими та вищими навчальними закладами України: Інститутом математики НАН України, Національним університетом ім. Тараса Шевченка, Національним педагогічним університетом ім. М.П. Драгоманова, Національним аерокосмічним університетом ім. М.Є. Жуковського , Національним технічним університетом України «КПІ».

Працелюбний, високопрофесійний, досвідчений і дружний колектив математиків та його творчі надбання в педагогічній, науково-методичній і виховній роботі дає право і підстави сподіватися на чудове майбутнє кафедри вищої математики імені проф. Можара В.І..

ТЕХНОЛОГІЯ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ: СУТНІСТЬ ТА ХАРАКТЕРНІ ОЗНАКИ

Марія Антошків, Оксана Требенко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Справжнім освітнім трендом 2020 року в Україні стало змішане навчання. І хоч за останні роки чимало публікацій було присвячено перспективності впровадження цієї технології (див., зокрема, [1], [2]) та неодноразово йшла мова про актуальність впровадження змішаного навчання у вітчизняній освіті (зокрема – міністром освіти Лілією Гриневич у 2017 році [3]), саме карантин 2020 року, зумовлений пандемією Covid-19, змусив шукати нові шляхи організації навчального процесу і посилив увагу до змішаного навчання.

Слід одразу зауважити, що сьогодні під терміном «змішане навчання» більшість українських освітян-практиків розуміють організаційну форму навчання, під час якої поєднуються періоди традиційного офлайн-навчання в аудиторії та дистанційного онлайн-навчання. Проте у світовій освітній практиці поняття змішаного навчання використовується в ширшому розумінні.

Термін «змішане навчання» (“Blended Learning”) вперше з’явився наприкінці 1990-х років у сфері корпоративної освіти. З середини 2000-х технологію почали впроваджувати в університетах, а згодом – і у школах по всьому світу. До сьогодні немає єдиного означення змішаного навчання. Під цим терміном розуміють і довільне «поєднання двох історичних моделей навчання – традиційної аудиторної та комп’ютерно-орієнтованої» [4], і «інтегровану форму різних видів Інтернет-навчання, електронного, дистанційного та традиційного навчання, за якої навчальний матеріал у будь-якій електронній формі (презентації, аудіо, відео тощо) передається студентові через Інтернет або локальні мережі для самостійного опрацювання, а закріплення та перевірка якості здобутих студентом знань і навичок проводиться у аудиторії під безпосереднім керівництвом викладача з використанням традиційних і мультимедійних засобів навчання» [5], і навіть «інтеграцію формального і неформального навчання на робочому місці» [6].

У закордонній педагогічній практиці змішане навчання називають освітньою траєкторією (програмою) [7], особливим типом освітнього середовища [8], і навіть підходом до викладання за принципом «шведського столу» [9].

Дослідники з Інституту Клейстона Крістенсена (США) виокремлюють [10] ознаки «якісного» змішаного навчання, а саме: змішане навчання повинно бути персоналізованим, пропонувати здобувачу освіти можливість побудувати власну траєкторію навчання, самостійно обираючи темп, місце та шлях навчання. У роботі [10] змішане навчання характеризується як:

1. *Частково онлайн-навчання.*

Змішаний навчальний процес обов’язково має онлайн складову, за допомогою якої учень або студент контролює час, місце та темп навчання. Наприклад, в будь-який момент навчального процесу існує можливість повернутися до потрібної теми або пропустити вже відомий матеріал.

2. *Частково традиційне навчання.*

У змішаному навчальному процесі здобувач освіти обов’язково відвідує заклад освіти з певною періодичністю. Пропорції онлайн та офлайн навантаження є різними залежно від конкретної моделі.

3. *Інтеграція.*

Онлайн та офлайн складові змішаного навчання не дублюють одна одну, а доповнюють. Умови домашніх та аудиторних завдань найчастіше пов’язані між собою, а LMS та інші технічні засоби допомагають педагогу спостерігати за прогресом кожного учня або студента та планувати завдання для заняття залежно від індивідуальних досягнень.

Також дослідники Інституту Клейстона Крістенсена наголошують [10], що активне використання ІКТ в навчанні, зокрема розміщення матеріалів в мережі Інтернет, використання електронних засобів на заміну традиційних (наприклад, Google-docs замість ручки і паперу, електронних підручників, електронної дошки, віртуальної реальності) не є достатньою умовою, щоб навчання було змішаним. Змішане навчання - це якісно нова парадигма, в якій учень має можливість керувати часом, місцем, шляхом або темпом засвоєння матеріалу. Без зміни парадигми навчання не є змішаним, його називають "технологічно збагаченим". В [10] наведено порівняльну таблицю змішаного та технологічно збагаченого навчання:

Змішане навчання	**Технологічно збагачене навчання**
Учні або студенти навчаються частково онлайн та мають можливість самостійно керувати тим, де, коли та як вони навчаються.	Учні або студенти використовують технології, щоб робити ту саму роботу, не змінюючи місце, час та темп навчання.
Девайси використовуються для надання можливості персоналізованого навчання.	Девайси використовуються для підтримки традиційних завдань.
Освітній простір закладу освіти трансформується, зокрема, у кабінетах з'являються нові локації для втілення різних моделей змішаного навчання (наприклад, станції, робочі зони тощо).	Освітній простір закладу освіти залишається традиційним.

Варто зазначити, що серед українських науковців також є ті, хто розуміє змішане навчання більш широко, як і їх закордонні колеги. Так, наприклад, професор Триус Ю.В. та доцент Герасименко І.В. пропонують такий підхід до визначення змішаного навчання [11]: «…це цілеспрямований процес здобування знань, набуття умінь і навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності суб'єктом навчання й розвитку його творчих здібностей на основі комплексного і систематичного використання традиційних й інноваційних педагогічних технологій та інформаційно-комунікаційних технологій навчання за принципом взаємного доповнення з метою підвищення якості освіти». Дане означення підкреслює, що змішане навчання можна організовувати комплексно, аби традиційні та інноваційні освітні технології та ІКТ не просто поєднувалися довільним чином, а вдало доповнювали один одного.

Таким чином, розуміння сутності поняття змішаного навчання в світовій освітній практиці є більш широким, ніж просте чергування офлайн- та онлайн-навчання. Характерними ознаками «якісного» змішаного навчання є, зокрема, комплексне поєднання та взаємодоповнення онлайн та офлайн складових навчального процесу (наявність кожної з яких є обов'язковою), використання ІКТ для забезпечення персоналізації навчання, надання можливості здобувачу освіти самостійно обирати місце, час та темп навчання. Саме за таких умов можна говорити про змішане навчання як інноваційну та принципово нову освітню технологію, впровадження якої має чимало перспектив.

Список використаних джерел

1. Антошків М. С., Требенко О. О. Blended learning як перспективна технологія навчання вищої алгебри майбутніх вчителів математики. // Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету. – 2016. – №2. – 76-83 с. – ISSN: 2414-0325.
2. Антошків М. С. Врахування психологічних особливостей студентів цифрового покоління шляхом організації змішаного навчання// Фізико-математична освіта : науковий журнал. Вип. 1 (15) / Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Фізико-математичний факультет редкол.: О.В. Семеніхіна (гол.ред.) [та ін.]. – Суми : [СумДПУ ім. А.С. Макаренка], 2018. – С. 128-131.
3. Майбутнє за змішаною освітою [Електронний ресурс]. – Режим доступу – https://mon.gov.ua/ua/news/usi-novivni-novini-2017-05-18-majbutne-za-zmishanoyu-osvitoyu-liliya-grinevich-na.
4. Bonk C.J., Graham C.R. The handbook of blended learning environments: Global perspectives, local designs/ C.J. Bonk, C.R. Graham. – San Francisco: Jossey-Bass/Pfeiffer, 2006. – 624 c.
5. Мусійовська О.Ф. Проблеми впровадження комбінованого навчання у вищій школі України // Інформаційні технології і засоби навчання. – Том 7, № 3 (2008). [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/111/97 .

6. Кухаренко В. М. Системний підхід до змішаного навчання / В. М. Кухаренко // Інформаційні технології в освіті. - 2015. - Вип. 24. - С. 53-67. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/itvo_2015_24_6.

7. An Introduction to Blended Learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу – https://www.cae.net/blended-learning-introduction/.

8. A Study on Students' Views On Blended Learning Environment [Електронний ресурс]. – Режим доступу – https://www.researchgate.net/publication/26442280_A_Study_on_Students'_Views_On_Blended_Learning_Environment.

9. What is Blended Learning? A Guide to Everything You Need to Know [Електронний ресурс]. – Режим доступу – https://elmlearning.com/blended-learning-everything-need-know/ .

10. What Blended Learning Is – And Isn't [Електронний ресурс]. – Режим доступу – https://www.blendedlearning.org/what-blended-learning-is-and-isnt/.

11. Триус Ю. В., Герасименко І. В. Комбіноване навчання як інноваційна освітня технологія у вищій школі // Теорія і методика електронного навчання. – ДВНЗ Криворізький національний університет, 2012. – Т. 3. – С. 299-308.

АПРОКСИМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

Катерина Божонок
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна
Яна Угніч
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна

Розглядаються питанням оновлення змісту дисципліни «Методи обчислень» та суміжних дисциплін із спеціальностей «Математика» і «Середня освіта (математика)» у відповідності до сучасних досягнень в галузі теорії апроксимацій функцій, обчислювальної та прикладної математики, інформаційно-математичного та комп'ютерного моделювання.

Розробка алгоритмічного та програмного забезпечення інформаційної підтримки аналізу і прогнозування динамічних процесів в галузі економіки, медицини, екології та ін. вимагає подальшого формування інформаційно-математичної культури майбутніх вчителів математики [1, С. 7-8].

Тому, у час інформатизації, виникає актуальна необхідність використовувати у навчальному процесі наукові досягнення у вказаних галузях математики та інформатики як науковців нашої країни, так і закордонних вчених.

Все це спонукає до модернізації змісту інформатичної освіти у вищих навчальних закладах.

В рамках курсу «Методи обчислень» чисельне розв'язання задачі Коші здійснюється методами типу Рунге-Кутта [1, С. 85]. Ці методи дають розв'язки у вигляді таблиць наближених значень шуканої функції. Чисельно-аналітичні методи приводять до наближених розв'язків у аналітичному вигляді, що містять певний набір числових констант. Один із найвідоміших чисельно-аналітичних методів – це метод степеневих рядів Тейлора [2, С. 68].

Ми пропонуємо розглядати поряд із вище зазначеними методами апроксимаційний метод (а-метод) видатного українського математика В.К. Дзядика розв'язування задачі Коші для лінійного диференціального рівняння [3, С. 121]. Цей метод дає можливість побудувати алгебраїчний многочлен, який наближує розв'язок відповідної задачі, що співпадає, з точність до множника, з величиною найкращого наближення.

Додатковим аргументом щодо необхідності оновлення змісту курсу «Методи обчислень», зокрема, використання в начальному процесі а-методу В.К. Дзядика, є поява нових теоретичних наукових результатів, обумовлена зростаючими вимогами сучасних задач математичного та комп'ютерного моделювання до трьох основних характеристик інформаційних технологій: інформаційної складності, точності та швидкодії (див. [4], [5]). Це спонукає до конструювання високоточних методів обчислення, що уникають явища насичення (наслідком якого може бути «вибух» похибок), автоматично адаптуються до структурних властивостей відомих та шуканих параметрів і мають мінімальну похибку апроксимації.

Завідувачем відділу обчислювальної математики Інституту математики НАН України академіком В. Л. Макаровим у [6, С. 18] були визначені наступні цілі при побудові високоточних алгоритмів розв'язування операторних рівнянь: 1) конструювання алгоритмів без насичення точності; 2) конструювання експоненціально збіжних алгоритмів для аналітичних розв'язків зі складністю, яка поліноміальна за $\log \varepsilon^{-1}$. Цим вимогам в значній мірі відповідає а-метод В.К. Дзядика, який дозволяє будувати алгебраїчні многочлени асимптотично або по порядку найкращого чебишевського наближення розв’язків алгераїчно-нелінійних операторних рівнянь з многочленими коефіцієнтами.

Розглянемо а-метод розв’язання лінійних диференціальних рівнянь з многочленними коефіцієнтами, як такий, що мав в подальшому широке застосування в різноманітних галузях обчислювальної та прикладної математики. Зокрема, до наближення спеціальних функцій математичної фізики, раціональних апроксимацій Паде, розв’язання узагальненої проблеми моментів, узагальнення на алгебраїчно-нелінійні рівняння математичної фізики [7, С.7-8] та цілого ряду важливих прикладних задач.

Ідею а-метода Дзядика та порівняльний аналіз цього метода з відомими методами степеневих рядів Тейлора і Рунге-Кутта розглянемо на простому прикладі задачі Коші:

(1)

(2)

Точним розв’язком задачі (1)-(2) є

$$y = -x - 1 + 2 \cdot e^x.$$

Апроксимаційний метод В.К. Дзядика передбачає перехід від задачі Коші до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтера [3, С. 129]. Візьмемо від обох частин (1) інтегралом від 0 до x врахуємо умову (2).

Отримаємо:

$$\boldsymbol{y(x) = \int_0^x \big(t + y(t)\big)dt + y} \qquad \textbf{(3)}$$

Наближений розв’язок будемо знаходити у вигляді многочлена другого степеня

$y_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$

Згідно з а-методом ([3, С. 130-131]) для знаходження невідомих c_0, c_1 і c_2 замінимо інтегральне рівняння (3) наближеним операторним рівнянням виду

$$\boldsymbol{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x (c_0 + c} \qquad \textbf{(4)}$$

де $\varepsilon(x) = \tau T_3(2x-1) = \tau\big(4(2x-1)^3 - 3(2x-1)\big)$, $T_3(2x-1)$ – многочлен Чебишова третього степеня, зміщений з відрізка $[-1;1]$ на відрізок $[0;1]$, що має вигляд

$T_3(2x-1) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1.$

Підставимо значення $T_3(2x-1)$ в (4) та проінтегруємо.

Отримаємо :

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 1 + \frac{x^2}{2} + c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} - \tau(32x^3 - 48x^2 + 18x - 1).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь відносно c_0, c_1, c_2 і τ:

$$\begin{cases} c_0 - \tau = 1, \\ c_0 - c_1 - 18\tau = 0, \\ \dfrac{c_1}{2} - c_2 + 48\tau = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{c_2}{3} - 32\tau = 0. \end{cases}$$

Отримаємо: $c_0 = \frac{115}{113}, c_1 = \frac{79}{113}, c_2 = \frac{192}{113}, \tau = \frac{2}{113}.$

Отже, $y_2(x) = \frac{115}{113} + \frac{79}{113}x + \frac{192}{113}x^2.$

Візьмемо за міру точності величину $\varepsilon = |y(1) - y_2(1)|$.

Відомо, що методи Тейлора й Рунге-Кутта мають похибки $\varepsilon \approx 0{,}44$ та $\varepsilon = 4{,}17 \cdot 10^{-6}$ відповідно. Тоді як для а-методу В.К. Дзядика вона становить $\varepsilon \approx 0{,}02$.

Якщо порівнювати а-метод В.К. Дзядика з методом Тейлора, то точність буде у 20 разів більша. Якщо порівнювати з методом Рунге-Кутта, то апроксимаційний метод менш точний, але у випадку розв'язування задачі Коші а-методом маємо аналітичний поліноміальний вираз, що є дуже зручним для подальшої роботи із отриманим розв'язком. Все це дає підстави рекомендувати до вивчення основні поняття апроксимаційних технологій в дисципліні «Методи обчислень» при підготовці вчителів математики у закладах вищої освіти з метою формування інформаційної та математичної культури.

Список використаних джерел:

1. Жалдак М.І. Методи обчислень: Навчально-методичний посібник з лабораторним практикумом / М.І. Жалдак, Ю.С. Рамський, В.І. Біленко, Т.О. Снігур. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – 119 с.
2. Гаврилюк І. П. Методи обчислень. Підручник. Ч. 2. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Вища шк., 1995. – 431 с.
3. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В.К. Дзядык. – К.: Наукова думка, 1988. – 304 с.
4. Гладкий С.Л. Интеллектуальное моделирование физических проблем / С.Л.Гладкий, Н.А.Степанов, Л.Н. Ясницкий. – Москва-Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.– 200 с.
5. Згуровский М. З. Основы вычислительного интеллекта [Текст]: [монография] / М. З. Згуровский, Ю. П. Зайченко. – К. : Наукова думка, 2013. – 406 с.
6. Гаврилюк И.П. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности / И. П.Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 500с.
7. Біленко В.І. Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно-нелінійних рівнянь математичної фізики / В.І. Біленко, К.В. Божонок, С.Ю. Дзядик, О.Б. Стеля. // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016. – 13(3). – С. 7-27.

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ З ПАРАМЕТРАМИ, ЯК НЕОБХІДНА СКЛАДОВА ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Оксана Бондарчук
Волинський національний університет імені Лесі Українки

У зв'язку з переходом на профільне навчання виникає необхідність в забезпеченні поглибленого вивчення студентами, які навчаються за спеціальністю середня освіта (математика) такої теми, як «Задачі з параметрами». Розв'язування задач з параметрами вимагає певного рівня розвитку відповідних типів мислення. Формування у школярів здатності до роботи з такими завданнями вимагатиме багато часу й послідовної методичної роботи майбутнього вчителя математики.

Більше того в останні роки на різних рівнях олімпіад з шкільної математики, а також на зовнішньому незалежному оцінюванні вимагається вміння розв'язувати задачі з параметрами. Як правило більшість учнів та абітурієнтів, не вміють розв'язувати такого типу задач. І тут мабуть справедливою буде думка експертів ЗНО, що учителі математики самі не готові розв'язувати такі задачі, отже, неготові і навчати цьому учнів. Отже, при підготовці майбутніх вчителів математики слід звернути особливу увагу на вивчення теми «Розв'язування вправ і задач з параметрами», щоб у майбутньому вони могли успішно справитися з поставленими ними завданнями.

Розв'язування вправ із параметрами полягає у побудові алгоритму[1], що дозволяє для будь-якого значення параметра знаходити відповідну множину коренів. Важливим способом розв'язання задач із параметром є запис відповіді. Записуючи відповідь обов'язково потрібно впевнитися, що всі можливі значення параметра враховано.

Розв'язуючи задачі з параметрами[2], слід пам'ятати:

1. розв'язок задачі знаходиться традиційними методами, тобто для того щоб розв'язати завдання з параметрами, треба спочатку з'ясувати тип рівняння або нерівності та загальний спосіб його розв'язання;

2. наявність параметрів у задачі передбачає обов'язкове дослідження існування розв'язку залежно від значень параметрів, а також знаходження всіх розв’язків;

3. форма запису відповіді в задачах з параметрами має спеціальний вигляд: значення невідомих вказується для кожного допустимого значення параметра.

Можна сказати, що задачі з параметрами[3], які пропонують для розв’язування студентам, є спрощеним прототипом важливих науково-дослідницьких задач, які, можливо, їм потрібно буде розв’язувати у своїй професійній діяльності. Вміння розв’язувати такі вправи цілком справедливо вважаються показником рівня математичної компетентності студентів, оскільки демонструють ступінь засвоєння як теорії з елементарної математики, так і практичного її застосовування у нестандартних ситуаціях.

Список використаних джерел:

1. Чепурна Т. В. Рівняння з параметрами / Т. В. Чепурна. // Математика в школах України. – 2009. – №15. – С. 2–8.
2. Показникові й логарифмічні рівняння й нерівності з параметрами. // Математика в школах України. – 2008. – №36. – С. 2–12.
3. Прус А. В. Задачі з параметрами в шкільному курсі математики / А. В. Прус, В. О. Швець. – Житомир: Рута, 2016. – 468 с.

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ ТА КОМП’ЮТЕРНІ ПРАКТИКУМИ, ЯК АЛЬТЕРНАТИВА ПРАКТИЧНИМ ЗАНЯТТЯМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗВО

Юлія Васютинська

Національний університет харчових технологій, Київ

В сучасному суспільстві, коли вимоги до рівня і змісту освіти змінюються швидкими темпами, основним завданням освіти, крім набуття та відтворення певних знань, є формування вміння вчитися, вміння знаходити і опрацьовувати потрібну інформацію, перетворювати набуті знання у вміння в різних сферах діяльності. Особливу увагу потрібно приділити природничій підготовці як шкільної, так і вищої освіти, оскільки за даними Державної служби статистики в Україні існує дефіцит інженерно-технічних, інженерно-технологічних спеціалістів.

Сьогодні ефективна організація роботи в усіх сферах діяльності не можлива без використання комп’ютерних технологій. Інформатизація та комп’ютеризація суспільства загалом та освіти зокрема є закономірностями сучасності. Активне впровадження інформаційних технологій є важливим фактором створення сучасної системи освіти.

Одним з показників ефективності навчання будь-якому предмету є рівень використання інформаційних технологій та їх доступність в навчальному процесі. Слід погодитись з відомим висловлюванням одного з фахівців у галузі інформатизації освіти: «Комп’ютеризація сама по собі не веде автоматично ні до гарної, ні до поганої освіти. Комп’ютеризація — це дорога до іншої освіти» [1, С.7].

Використання комп’ютерних технологій дозволяє заощадити час і зробити роботу ефективнішою: здійснити пошук інформації, вирішити більшу кількість завдань і зменшити домашнє завдання, проаналізувати результати, скористатися графічними можливостями комп’ютера, стимулювати пізнавальну, творчу активність і самостійність студентів, сприяти розвитку інтересу до навчального предмета, формуванню комунікативних навичок, забезпеченню об’єктивного контролю знань, якості засвоєння матеріалу та інше [1].

Сьогодні в освіті досить поширеними є електронні конспекти лекцій, електронні версії методичних вказівок, мультимедійні продукти (віртуальні лабораторні роботи тощо).

Однією з найбільш важливих фундаментальних природничих дисциплін є курс вищої математики. На жаль, на сьогодні спостерігається скорочення годин на вивчення даної дисципліни майже у всіх ЗВО. Тому певні зміни як в змісті, так і в формах та методах викладання є просто необхідними.

Насамперед курс вищої математики, що викладається студентам ЗВО різних спеціальностей спрямований на формуванні у студентів таких основних компетенцій [2]:

1) аналітичне та логічне мислення, як результат оволодіння сучасними математичними знаннями та методами;

2) готовність до прослуховування інших дисциплін, які пов’язані з математикою;

3) спроможність студента до навчання та роботи протягом життя.

Однією з ефективних форм проведення практичних занять, які зацікавлять студентів і зроблять навчання більш доступним є введення комп’ютерних практикумів та лабораторних робір з вищої математики з використанням програм MathCad, MathLab, онлайн-калькулятора WolframAlpha та ін. Комп’ютерні практикуми тісно пов’язані із навчальним матеріалом. Метою комп’ютерного практикуму з вищої математики є формування у студентів знань і умінь, необхідних для обробки експериментальних даних засобами комп’ютерних технологій, формування досвіду дослідницької діяльності. Головним завданням комп’ютерного практикуму чи лабораторної роботи є підготовка студентів до практичного опрацювання експериментальних даних, формування в студентів інформаційної культури [3].

Поєднання практичних занять з вищої математики з комп’ютерними практикумами є достатньо ефективним, оскільки дозволяє: підвищити комп’ютерний рівень знань студента; здійснити наочну демонстрацію міжпредметних зв’язків; швидко сприймати та опановувати навчальний матеріал за допомогою інформаційних технологій не залежно від рівня математичної підготовки; організувати роботу з групою, максимально ефективно використовуючи робочий час. Також хотілось би зазначити, що ймовірність розв’язання математичного завдання за допомогою спеціальних програм значно вища ймовірності розв’язання за допомогою математичних правил та формул. У викладача є можливість одразу оцінити всіх студентів, приділити увагу складнішим завданням, в той же час студенти можуть отримати додаткові завдання та індивідуальні консультації.

Список використаних джерел

1. Андрєєв Ю.М Теоретична механіка. Комп’ютерний практикум: Навчальний посібник. / Андрєєв Ю. М., Лавінський Д. В., Морачковський О. К. - Харків: НТУ «ХПІ», 2014. - 240 с.

2. Барабаш О. В. Лабораторний практикум з вищої математики: Навчальний посібник. / Барабаш О. В., Онищенко В. В. Київ: ДУТ, 2013. – 117 с.

3. Лиходєєва, Г. В. Комп’ютерний практикум з математичної статистики: Навчальний посібник. Київ: Центр учбової літератури, 2018. – 98 с.

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ШКІЛЬНОГО КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Олена Волянська

Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова

В психолого – педагогічній літературі прикладна спрямованість визначається як орієнтація змісту і методів навчання на застосування математики в техніці, суміжних науках, виробництві тощо.

Програма з алгебри і початків аналізу для 10 – 11 класів визначає ключові компетентності, якими повинні учні оволодіти в процесі навчання [1]. Одна з них – математична компетентність, яка передбачає уміння будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, використовувати математичні методи в реальних ситуаціях, розв'язувати задачі підприємницького змісту, зокрема оптимізаційні задачі.

В темі 10 класу « Похідна та її застосування» в програмах рівня стандарту та профільного визначені очікувані результати навчання, а саме вміння розв'язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин при вивченні показникової та логарифмічної функцій, також передбачається розв’язування прикладних задач в темі «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики», визначено застосування ймовірнісних характеристик навколишніх явищ для прийняття рішень.

Таким чином, на уроках алгебри і початків аналізу на протязі навчального року необхідно розв'язувати прикладні задачі. Прикладна задача – задача, яка поставлена зовні математики і розв’язується математичними засобами [2]. Процес розв'язування прикладної задачі складається з 3-х етапів:

1) побудова математичної моделі;.

2) розв'язання математичної задачі;

3) перекладання отриманого розв'язку на мову вихідної прикладної задачі.

При вивченні тригонометричних функцій варто нагадати учням, що вони виникли у зв'язку з потребами землемірів, астрономів і мореходів і є найзручнішим апаратом для теорії коливань. При повторенні градусної міри кута в нагоді буде наступна задача.

Задача. Стрілки годинника показують рівно 12 годин. Через який найменший проміжок часу хвилинна стрілка знову суміститься з годинниковою. Формування поняття показникової функції слід проілюструвати використанням її для опису різного роду процесів з життя та побуту: зниження ціни товару, який не користується попитом, похуданням людини. Наприклад:

Задача. Через скільки років вартість товару знизиться з 500 гривень до 250 гривень, якщо кожного року вона знижується на 20 відсотків ?

Прикладні задачі теми «Похідна» стосуються оптимальних шляхів проектування різних будівельних конструкцій, витрат сировини, строків експлуатації техніки тощо. Наступна задача ілюструє застосування похідної до дослідження функції.

Задача. Дослідить поведінку виручки в залежності від попиту продукції і ціни, якщо попит на товар визначається функцією $x=a/p-b$, де x- попит, p – ціна, a,b - сталі.

Застосування інтеграла показує наступна прикладна задача.

Задача. Знайти роботу, яку треба виконати для того, щоб викачати воду з цистерни, яка має форму циліндра з радіусом R в висотою H.

На ЗНО з математики у 2020 року були включені прикладні задачі з теорії ймовірностей і математичної статистики.

При складанні умови прикладної задачі треба враховувати, що:

1) задача повинна містити реальну ситуацію, числові значення даних;

2) мати пізнавальну цінність;

3) умова повинна чітко сформульована і зміст нематематичного матеріалу був зрозумілий школярам.

Про використання формул комбінаторики для обчислення ймовірностей подій йдеться у наступній задачі:

Задача. У серії з A виробів H бракованих. Із партії навмання вибирають B виробів. Яка ймовірність того, що серед цих в виробів буде C бракованих?

Теорема множення ймовірностей незалежних подій застосовується при розв’язуванні наступної прикладної задачі:

Задача. Ймовірність отримати брак підчас першої обробки деталі дорівнює 1%, під час другої – 2%, під час третьої – 3% . Знайти ймовірність виготовлення небракованої деталі, якщо контроль здійснюється після трьох операцій обробки за умови незалежності виготовлення бракованої деталі під час кожної операції.

Застосування прикладних задач підвищує інтерес до предмету, активізує навчально – пізнавальну діяльність учнів, що сприяє отриманню більш високих результатів навчання математики і націлює учнів старшої школи до правильного вибору майбутньої професії.

Список використаних джерел:

1. Програма з математики для 10-11 класів http://www.mon.gov.ua/.

2. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики. - М.:Просвещение,1990 - 96 с

3. Панас Г.І. Прикладна математика і не тільки.- ДНЗ « Нововолинський центр ПТО» - 2018. - 238 с.

МЕХАНІЗМ УЧБОВОЇ МОТИВАЦІЇ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

Петро Зінькевич , Олексій Зінькевич
Національний університет харчових технологій, Київ

Перед вищою освітою постають все нові завдання, у тому числі виховання компетентної особистості фахівця, із розвитком таких її якостей, як високий професіоналізм, активність, ініціативність, мобільність, почуття відповідальності, уміння працювати, швидко орієнтуватися в ситуації, приймати самостійні рішення, формувати потребу в постійному оновленні знань і самовдосконаленні. Очевидно, що важливу роль у формуванні такої особистості відіграє позитивна мотивація студентів до навчання.

Деякі студенти мають викривлене уявлення про роль математичної підготовки в їх майбутній професійній діяльності, але суспільство потребує спеціалістів з чітким логічним мисленням, глибокими математичними знаннями й умінням бачити й реалізовувати можливості застосування математики в різних конкретних ситуаціях.

Можливо вивчати математику, не маючи визначеної цілі. Цей стиль викладання є дуже популярним серед викладачів математики, які відкидають важливість мотивування. Але такий підхід не прийнятний ні для дослідження, ні для викладання. Врешті-решт, мотивування є одним із важливіших джерел інтересу до навчання, а також важливим засобом для розкриття обдарування.

Механізмом учбової мотивації є вдале формулювання викладачем цілей і завдань навчальної діяльності в умовах професійної спрямованості, які мають прийняти студенти і спрямувати свою діяльність на їх досягнення. В цій роботі важливе значення має правильна організація педагогічної взаємодії між викладачами і студентами. Мотивація у вивченні математичного матеріалу повинна здійснюватися у всіх формах навчання: лекції, практичні завдання, самостійна робота; в цілеспрямованому поєднанні цілей, змісту, методів, засобів, форм організації навчальної діяльності студентів та форм контролю.

Мотивація – це елемент навчального процесу, результатом якого є навчальна діяльність, яка набуває для тих, хто навчається, конкретного змісту. При цьому формується стійкий інтерес до неї, і зовнішні задані цілі перетворюються у внутрішні потреби особистості.

Мотивація відноситься до людських чинників, які штовхають студента вперед; це нерозривний динамічний процес фізіологічного та психологічного стану, який керує поведінкою особистості, визначає її організованість, активність та стійкість, здатність діяльно задовольнити свої потреби.

На математичній підготовці сьогодні базується професійна підготовка фахівців більшості галузей, оскільки, крім фактичних знань, які дає спеціалістові вивчення математичних дисциплін, сама математика посідає важливе місце у формуванні їхнього наукового світогляду, розвитку логічного та абстрактного математичного мислення, логічної строгості в судженнях, уявлень і уяви, умінь математизувати ситуації, пов'язані з майбутньою професійною діяльністю.

Часто стверджується, що математика – суто логічна структура. Крім того, громадська думка не ігнорує і естетичні аспекти цієї науки, що пов'язані з гармонією та узгоджуваністю її складових. В окремих випадках математику розглядають і як цікаву інтелектуальну гру. Математика часом виглядає як добірка безглуздих міркувань, але якщо розглянути її в історичній перспективі, то виявиться, що навіть найабстрактніші її розділи на перший погляд далекі від застосувань, тісно пов'язані з конкретними розділами, близькими до застосувань. Саме ці зв'язки в підсумку і виправдовують існування абстрактних розділів. Більше того, щоб зрозуміти математику, необхідно досягти повної прозорості на кожному етапі. Але саме в цьому відношенні математика не відрізняється від інших галузей науки. В той же час неможливо вивчити математику, не маючи уявлення про те, для чого вона потрібна. Як відомо, в процесі розуміння ціль є суттєвою потребою. Студенти навчаються швидше і краще, якщо вони вчаться з визначеною ціллю. Наявність більш-менш визначеної мети вказує на правильний шлях, підсилює інтерес, допомагає виокремити головне і відкласти до найкращих часів другорядне. Чим конкретніше визначені цілі, тим більше проявляється їхній спонукальний вплив. Загальні, неконкретизовані цілі часто мають характер декларацій і не стимулюють до діяльності. Конкретизація мети, розробка проміжних цілей і засобів їх досягнення — важливий мотиваційний фактор.

Вивчення математики передбачає, що студент повинен вміти виконувати набуті знання при розв'язуванні конкретних прикладних задач. Цьому повинне сприяти застосування математичних методів у спеціальних економічних курсах, тобто повинно бути ефективне співробітництво у сферах, де сходяться інтереси математичних і спеціальних кафедр. В сучасних умовах успішна робота економіста неможлива без застосування математичних методів.

Через ці причини оволодіння методами і розуміння того, до чого їх можна застосувати, більш важливе, ніж накопичення знань та інформації: методи, на відміну від ізольованих теорем і результатів, володіють динамікою. Як же вивчають методи? Щоб відповісти на це запитання, необхідно пам'ятати про те, що методи – інструмент для дослідження певних цілей. Методи – це робочий інструмент, і так само, як неможливо опанувати ремесло, вивчаючи каталоги та відвідуючи виставки, так неможливо вивчати математику, перебуваючи стороннім спостерігачем. Методами потрібно користуватися. Але краще, якщо студенти хоча б частково відкривають їх самі. Як наявність інструменту не робить людину майстром, так і накопичення знань не робить її математиком. Важливішим є вміння їх використовувати як при розв'язуванні конкретних практичних задач, так і при проведенні різноманітних теоретичних досліджень. Наявність комп'ютерів відкриває нові можливості для використання математичних методів, а тому треба розуміти як правильно поставити математичну проблему, як правильно підійти до її розв'язання.

Необхідно усвідомити, що навчання математики або математичних методів напрямлене на вивчення певних алгоритмів і навчання пошуку. Часто на адресу викладачів математики лунають докори, що вони вчать знаходити похідні, інтеграли, тощо, що все це анахронізм, оскільки якщо їм на практиці трапиться подібна задача, вони просто скористаються комп'ютером або довідником. Це не завжди так, бо студента треба навчити основних методів аналітичних перетворень, вмінню проявляти в них винахідливість, розвинути певне аналітичне чуття, а без цих вправ цього досягти не можна. Крім того, треба пам'ятати, що використання комп'ютера і всяких довідників передбачає певний рівень знань, тобто треба знати, що шукати і де це можна знайти.

Механізмом навчальної мотивації є вдале формулювання викладачем цілей і завдань навчальної діяльності в умовах професійної спрямованості, які мають прийняти студенти і спрямувати свою діяльність на їх досягнення. В цій роботі важливе значення має правильна організація педагогічної взаємодії між викладачами і студентами.

Реалізація професійної спрямованості навчання математики і застосування її засобів в сфері виробництва, економіки, фінансів, менеджменту відбувається шляхом впровадження в навчальний процес економічних задач і завдань для відповідних розділів курсу згідно навчального плану, з урахуванням відведеного часу та можливостей студентів. При цьому домінуючими повинні бути задачі методологічного обґрунтування необхідності і корисності вивчення математики та задачі усвідомлення предмету як науки і його спеціальних методів. Наступними повинні бути задачі, що демонструють особливості економіко-математичних та математично-економічних інтерпретацій та сприяють формуванню прикладних математичних знань. Задачі економічного змісту сприяють реалізації багатьох завдань практичного заняття з математики. Вони дають змогу розкрити методологічні питання взаємозв'язку теорії з практикою, переконуючи студентів в тому, наскільки важливе вивчення математичних дисциплін для обраної ними економічної спеціальності. Економічні задачі однаково можна використовувати як для мотивації теми, цілей і завдань практичного заняття шляхом постановки проблеми, так і для розкриття наукового і практичного значення нового матеріалу. Їх навчальні функції одночасно спрямовані на підвищення математичної підготовки студентів і на вироблення вмінь застосовувати математичний апарат для дослідження економічних процесів і явищ, будувати моделі економічних ситуацій, знаходити математичні залежності в реальних виробничих процесах, передбачати очікуваний результат як наслідок аналізу величин, що характеризують дану економічну ситуацію.

Актуальними являються деякі специфічні задачі вищої математики, які і формують математичний стиль мислення – строгий, послідовний, оперуючи чітко визначеними поняттями, що в свою чергу суттєво впливає на розвиток інтелекту сформованого, є основою дивергентного мислення, необхідного для творчої діяльності. До таких задач відносяться проблемні ситуаційні задачі – задачі, що не мають однозначного розв'язання і вимагають творчого застосування раніше засвоєних знань і умінь. Деякі з таких задач можуть бути розв'язані як елементарним шляхом, так і методом, що потребує більших розумових витрат. Все залежить від планування розумових дій студента, які власне є механізмом мислення і являються результатом об'єднання та переробки інформації. Ситуаційні задачі вимагають від студента не тільки глибоких теоретичних знань конкретної теми, а й уміння застосовувати уже відомий математичний апарат. При цьому основне завдання студентів полягає у застосуванні цих знань до комплексного аналізу ситуації і прийняття рішення в її межах.

Враховуючи тенденції розвитку науки і техніки, економіки й виробництва, важко віднайти таку галузь діяльності людини, яка б не потребувала певної математичної підготовки. Розглядаючи економіку як головний напрям входження держави у цивілізований світ, можна без перебільшення сказати, що підготовка фахівців для різних галузей стає фактором першорядного значення. І не останню роль в процесі їх підготовки відіграють математичні дисципліни, які сприяють виробленню навиків логічного і самостійного мислення, забезпечують професійне володіння математичними засобами аналізу та прогнозування економічних ситуацій, знаходять своє застосування в конкретних предметних галузях. Сучасного економіста будь-якого профілю не можна уявити без оволодіння ним знаннями в галузі математичного моделювання економічних процесів і інформаційних технологій, які забезпечують не тільки обробку даних, зменшення затрат часу та зусиль, а і є вирішальними при прийнятті керівних рішень.

Саме у навчальному закладі розвивається особистість, а завдання викладачів математики – підтримати її, дати поштовх до пізнання нових знань, сформулювати організованість, активність та стійкість, здатність студента задовольняти свої потреби через соціально схвалювану діяльність, допомогти отримати гарну освіту, а в подальшому цікаву роботу.

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ НЕМАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Олена Королюк,
Алла Прус
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Математика у наш час перетворилася на реальну силу, яка здійснює великий вплив як на науку, так і на технології. У зв'язку із цим математична освіта для певних спеціальностей природничої, економічної, технічної та ін. галузей повинна здійснювати свій внесок у формування сучасного фахівця, здатного орієнтуватися у напрямках розвитку сучасної науки та методах пізнання навколишнього світу, спроможного планувати та реалізовувати всі етапи наукових досліджень, прогнозувати вплив діяльності людини на суспільство і довкілля.

Серед розділів вищої математики, які значною мірою сприяють вишукуванням у певних галузях, можна назвати лінійну алгебру, теорію множин, топологію, теорію ймовірності, математичну статистику, математичний аналіз тощо.

Сучасні вимоги до фахового рівня спеціалістів, їх професійної компетентності, а також глибоке проникнення математичних методів у науку та практику потребують посилення прикладної спрямованості математичних курсів, установлення безпосереднього зв'язку зі спеціальною підготовкою, виховання в студентів бажання реалізувати свої знання заради професійних цілей, що забезпечує виконання схеми: „*знання – осмислення – застосування – розуміння – творчість*". „Під час навчання математики, – на думку М. С. Бернштейна, – … потрібно навчити учня користуватися самостійно прийомами логічного мислення, які виконують особливо важливу функцію в сучасній науці, техніці й житті, які збагачені різноманітними й корисними застосуваннями" [3, С. 36].

Важливим засобом реалізації прикладної спрямованості курсу вищої математики для студентів нематематичних спеціальностей, на наш погляд, є *використання прикладних задач.*

Зауважимо, що у науково-методичній літературі поняття прикладна задача означається по-різному, але, на наш погляд, суть його зберігається у кожному із них. Наприклад, прикладна задача – це задача, яка вимагає перекладу з природної мови на математичну (Р. М. Возняк та К. П. Маланюк, М. П. Маланюк, А. М. Тихонов та Д. П. Костомаров). Під прикладними задачами курсу математики *розуміють такі навчальні задачі, розв'язування яких включає етап формалізації практичної ситуації або етап інтерпретації того чи іншого математичного результату, або ж обидва ці етапи (М. І. Якутова). Прикладна задача – це задача, яка виникає за межами математики, але розв'язується математичними методами (М. О. Терешин, З. І. Слєпкань). Прикладною називається задача нематематичного змісту, для розв'язування якої необхідно використовувати математичні методи (М. Мирзоахмедов). Прикладними називають задачі про реальні, матеріальні об'єкти та зв'язки між ними (Г. П. Бевз). Задача, у ході розв'язування якої доводиться переходити від реальної ситуації до її математичного опису, або, як кажуть, будувати її математичну модель, називається прикладною (Ю. М. Колягін та В. А. Оганесян).*

Стосовно нашого дослідження, вважаємо, можна використовувати таке формулювання: *прикладні задачі* – це задачі, які виникають поза курсом математики і розв'язуються математичними методами і способами.

Поряд із терміном прикладна задача (ПЗ) синонімічно у науково-методичних джерелах, у розмовній практиці часто вживаються терміни практична задача, математична задача із практичним змістом, задача прикладного характеру, сюжетна задача, життєва задача тощо.

У дослідженнях науковців (І. Б. Бекбоєв, В. М. Брадіс, С. С. Варданян, П. Я. Дорф, Є. С. Дубинчук, Н. А. Камілов, Л. М. Ліман, Т. Я. Нестеренко, Л. О. Соколенко, І. А. Рейнгард, І. Ф. Тесленко, І. М. Шевченко та ін.) сформульовані вимоги до ПЗ з математики:

1. ПЗ повинна мати реальний практичний зміст.
2. ПЗ повинні демонструвати застосування математичних методів, зокрема, методу математичного моделювання.
3. Числові значення величин, які подані в умовах ПЗ, повинні бути характерними для практики.
4. У процесі розв'язування ПЗ потрібно використовувати правила наближених обчислень, а також застосовувати обчислювальні засоби, інформаційно-комунікаційні технології.
5. ПЗ повинна відповідати педагогічним вимогам до довільної задачі взагалі.
6. Дидактичний рівень розв'язування ПЗ всередині математичної моделі не повинен перевищувати за складністю загального рівня розв'язування суто математичних задач даної теми.
7. ПЗ мають відображати передові досягнення науки, техніки, виробництва, бути, по можливості, пов'язані з місцевим матеріалом.
8. Формулювання ПЗ не повинно містити незрозумілу термінологію для тих, хто навчається, а відомості про вузькотехнічні або інші складні виробничі чи інші процеси повинні відповідати їх спеціальності.
9. У змісті ПЗ, по можливості, повинен бути відображений особистий досвід студентів, матеріал, який відповідатиме обраному фаху, що допоможе викликати інтерес до математики, математичних методів.

Наведемо декілька прикладних задач, які задовольняють указаним вимогам, що можуть бути використані у навчанні фахівців природничих спеціальностей (біологія, хімія, екологія тощо).

Задача 1*. Горщик для кімнатної рослини має форму зрізаного конуса. Дно горщика займає 113 см*^{2}*, висота дорівнює 20 см, а висота його стінки від одного краю до іншого – 20,5 см. Господині треба пересадити кімнатні рослини. Горщиків у неї 10, а коріння займає приблизно 40% об'єму. Скільки землі потрібно купити господині, якщо земля має бути пухкою та її густина ≈ 1,5 г/см*^{3}*?*

Попередній аналіз та формалізація задачі. Пропонуємо аналіз задачі у формі евристичної бесіди.

- *Що означає вимога задачі «скільки землі потрібно купити господині»? (Вона означає, що потрібно визначити, яка буде маса землі, бо землю продають на кілограми).*
- *Що дано в задачі, якщо горщик для квітів ототожнити з геометричним тілом? (Зрізаний конус, його висота, площа меншої основи (бо горщик для квітів – це конус, що «стоїть» на меншій основі) та його твірна).*
- *Як пов'язані вимога задачі та умова? (Такого зв'язку у явному вигляді не дано).*
- *Отже, якщо потрібно знайти масу землі, а в умові дано її густину, то яку величину тоді можна визначити? (Об'єм землі).*

- *Тоді до чого, по суті, «звелась» задача? (До відшукання об'єму горщика, тобто зрізаного конуса).*

Аналіз задачі здійснено. Переходимо до формулювання математичної задачі: «У зрізаному конусі 40% об'єму не заповнено. Залишок об'єму займає речовина, густина якої 1,5 г/см^3. Знайти масу цієї речовини в 10 однакових зрізаних конусах, якщо висота конуса дорівнює 20 см, довжина твірної – 20,5см, площа меншої основи 113 см^2 ». Зауважимо, що умову задачі можна вважати формалізованою. Однак у формулюванні умови є слова «маса речовини», «густина». Ці поняття більше стосуються до фізики, хімії, але залишити їх цілком допустимо. Водночас відкоригувати формулювання можна так:

«Дано зрізаний конус із висотою 20 см, площею меншої основи 113 $см^2$ та твірною 20,5 см. Знайти об'єм V_1, що становить 60% від об'єму даного конуса V. Обчислити величини m_1 та m_{10} за формулами: $m_1 = 1{,}5 \cdot V_1$; $m_{10} = 10\ m_1$ ».

Розв'язання задачі всередині побудованої моделі.

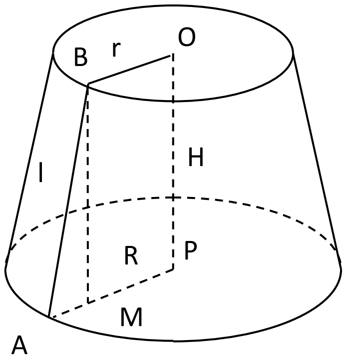


Рис. 1

1. Позначимо висоту конуса $OP = H$ =20 см, твірну $AB = l$ =20,5 см, радіус меншої основи $BO = r$, радіус більшої основи $AP = R$. Опустимо з точки B перпендикуляр $BM = H$ на більшу основу конуса (рис. 1).

2. Знайдемо радіус меншої основи: $r = \sqrt{\dfrac{113}{\pi}} \approx 6$ см.

3. За теоремо Піфагора з трикутника ABM визначимо $AM = \sqrt{20{,}5^2 - 20^2} = 4{,}5$ см.

4. Шукаємо радіус більшої основи зрізаного конуса: $R = 4{,}5 + 6 = 10{,}5$ см.

5. Знайдемо об'єм зрізаного конуса: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20 \cdot \left(10{,}5^2 + 10{,}5 \cdot 6 + 6^2\right) \approx 4380$ см^3.

6. Об'єм, який займає речовина: $V_1 = \dfrac{4380 \cdot 60}{100} = 2628$ см^3.

7. Обчислимо $m_1 = 1{,}5 \cdot 2628$ =3942 г.

8. Обчислимо $m_{10} = 10 \cdot 3942$ =39 420 г $\approx$ 39 кг.

Відповідь: 39 кг.

Інтерпретація отриманого результату. Господині потрібно купити 39 кг землі.

Задача 2 [2]. *(елементи лінійної алгебри) Три види бактерій співіснують у пробірці й споживають три субстрати. Відомо, що в середньому бактерія i-го виду споживає в день a_{ij} одиниць j-го субстрату, $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, а кожного дня подають h_i одиниць j-го субстрату. Знайдіть кількість популяцій трьох видів бактерій, які можуть існувати в даному середовищі, якщо вважати, що бактерії споживають увесь запас субстрату.*

Розвязати задачу, коли матриця A = (a_{ij}) має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

А матриця субстратів H = $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 30000 \\ 45000 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. **Позначимо кількість бактерій кожного з трьох видів відповідно: x_1, x_2, x_3.**

Матимемо систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3, \end{cases}$

За даними задачі – це система виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30000, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 45000. \end{cases}$$

В результаті перетворень системи одержуємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15000, \\ x_2 + 2x_3 = 15000, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Тоді $x_1 = \frac{15000-x_2}{2}$ і $x_3 = \frac{15000-x_2}{2}$, де x_2 – будь-яке.

Кількість бактерій не може бути від`ємною, отже $0 \le x_2 \le 15000$, $0 \le x_1 \le 7500$, $0 \le x_3 \le 7500$.

Отже, загальна кількість співіснуючих популяцій бактерій складає 15000, а кількість бактерій кожного з видів дорівнює відповідно $x_1 = x_3$ і $x_2 = 15000 - x_1$, якщо вони споживають усі субстрати.

Задача 3. (елементи теорії ймовірності) *У кароких батьків є четверо дітей, з яких двоє блакитнооких мають I і IV групи крові, а двоє кароких – II і III. Карий колір очей домінує над блакитним і визначається аутосомним геном. Яка ймовірність народження наступної блакитноокої дитини з I групою крові?*

Розв'язання. *Оскільки у кароких батьків є блакитноокі діти, то батьки гетерозиготні за цією ознакою. Одна дитина має I групу крові, тому ген О повинен бути в обох батьків. Але є діти II, III і IV груп крові, тому один з батьків буде мати ген А, а другий – ген В. Отже, генотипи батьків: СсАО, СсВО, тобто вони гетерозиготні за обома ознаками і будуть утворювати чотири типи гамет (С – ген кароокості, с – блакитноокості).*

Позначимо події: A_1 – поява блакитноокої дитини; A_2 – поява дитини з першою групою крові; D – поява блакитноокої дитини з I групою крові.

За законом Менделя $P(A_1)=1/4$, $P(A_2)=1/4$.

Тоді за теоремою множення ймовірностей: $P(D)= P(A_1) P(A_2)=1/16$.*

Відповідь: *імовірність народження блакитноокої дитини з I групою крові 1/16.*

Таким чином, навички та вміння, які одержать студенти розв'язуючи прикладні задачі, допоможуть їм під час засвоєння курсів фахових дисциплін. Водночас уведення завдань практичного змісту сприятиме максимальному використанню прикладних можливостей навчального курсу вищої математики.

Список використаних джерел

1. Васіна Л. С. Прикладне математичне забезпечення професійної підготовки фахівців в умовах ступеневої освіти / Л. С. Васіна // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, досвід, проблеми : зб. наук. праць. – К.–Вінниця : ДОВ Вінниця, 2004. – Вип. 6. – С. 183–188.
2. Лавренчук В.П. Вища математика. Загальний курс. Частина 1. Лінійна алгебра й аналітична геометрія : навч. посіб. / Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С. – Чернівці : Книги – XXI, 2010. – 319 с.
3. Педагогический сборник. – 1969. – № 11. – С. 36.

ПРОЕКТНА ДІЯЛЬНІСТЬ СТУДЕНТІВ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ОСНОВ ТАРИФНИХ РОЗРАХУНКІВ З РИЗИКОВИХ ВИДІВ СТРАХУВАННЯ

Яніна Гончаренко

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Основи тарифних актуарних розрахунків традиційно вивчаються в курсі «Актуарна математика», який є складовою підготовки студентів спеціальностей 111 Математика або 112 Статистика зі спеціалізацією «Фінансова та актуарна математика». В НПУ імені М.П.Драгоманова здійснюється підготовка студентів освітнобого рівня «Магістр» за спеціальністю «Математика (спеціалізація: фінансова та актуарна математика)». В рамках магістерської підготовки студенти даної спеціальності вивчають курс актуарної математики. Навчальним планом підготовки з даної спеціальності передбачено, що на момент вивчення цього курсу студенти вже вивчали такі дисципліни, як «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Основи фінансової та актуарної математики», «Статистика», «Економетрія», «Стохастична фінансова математика», а також в почали вивчати «Економічний ризик та методи його вимірювання». Це дозволяє використовувати широкий спектр математичних методів актуарних розрахунках.

Досвід навчання студентів даної дисципліни дозволяє зробити висновки, що однією з дуже ефективних форм організації навчальної діяльності при вивчення тем, що стосуються тарифних розрахунків для різних видів страхування, є проектна діяльність студентів.

Передумовами успішності саме такого виду роботи є те, що студентам при вивченні даної теми не доводиться опановувати великий обсяг нового теоретичного матеріалу. Основною їх задачею є створення інформаційної бази власного дослідження та відбір найдоцільніших методів для вирішення поставлених завдань з усієї сукупності набутих раніше знань та вмінь, їх творча інтерпретація та застосування.

На початку вивчення даної теми проводиться лекція, на якій вводяться необхідні нові знання та систематизується інформація про підходи та методи, що використовуються в тарифних розрахунках.

Основними поняттями, які необхідно засвоїти та навчитись ними оперувати, є поняття нетто- та брутто-ставок.

На початковому етапі співвідношення між цими поняттями та їх складовими можна представити у вигляді наступної схеми (рис. 1).

Після чого нагадуємо зі студентами основну формулу для розрахунку нетто-ставки: $T_n = P(A) \cdot K,$ де $P(A)$ - ймовірність страхового випадку, а K - відношення середньої страхової виплати на середню страхову суму на один страховий договір.

Для обчислення ймовірності страхового випадку можуть використовуватись як теоретико-ймовірнісні міркування, так і статистичний підхід. Розгляд основних ймовірнісних методів для визначення ймовірності страхового випадку передує вивченню даної теми, тому разом з студентами достатньо просто актуалізувати наявні знання.

Необхідно також звернути увагу студентів на те, що K є по суті показником збитковості діяльності страхової компанії. Аналіз саме цього показника дозволяє обчислити ризикову надбавку.

Величина ризикової надбавки залежить від динаміки показника K. Як правило в практичних розрахунках розглядається динаміка за останні 5 років.

Рис. 1. Структура тарифних ставок.

Обчислення ризикової надбавки зручно представити у вигляді наступного алгоритму (рис. 2)..

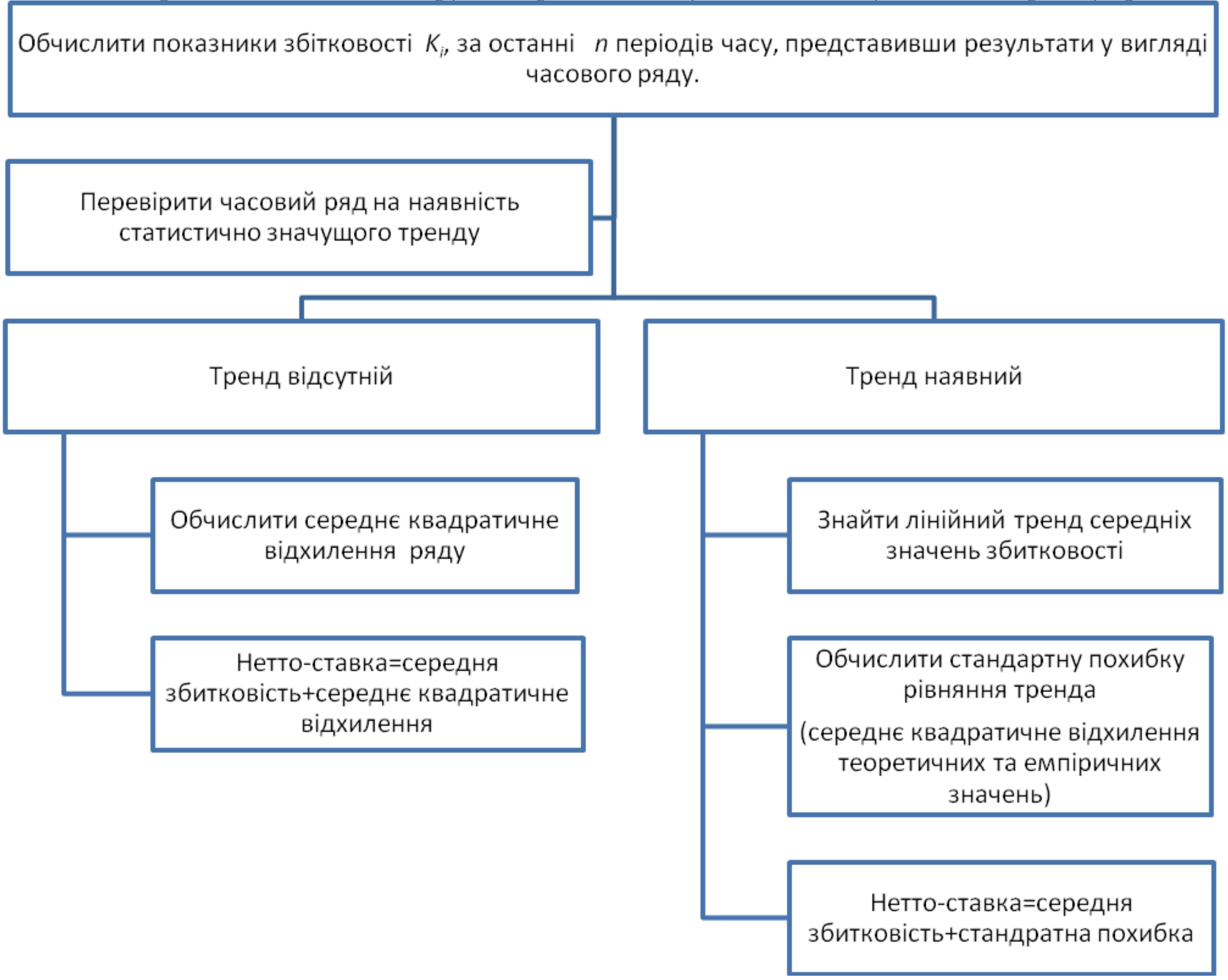


Рис. 2. Алгоритм обчислення ризикової надбавки

Після опрацювання систематизації та узагальнення теоретичних відомостей щодо основних методів актуарних розрахунків студентам пропонується виконати проекти, якими передбачається здійснення комплексу актуарних розрахунків по певному виду страхування. Найчастіше я пропоную студентам розрахувати тарифні ставки в медичному страхуванні. Це обумовлено тим, що добровільне медичне страхування (ДМС) грунтується на моделях страхування життя, але в той же час його виплати розраховуються на основі принципу відшкодування збитків, що дозволяє використовувати весь спектр актуарних методів при розрахунку тарифів.

Завдання пректів з розрахунку тарифних ставок ДМС передбачає виконання студентами таких етапів дослідження:

- Розробку власної програми ДМС з врахуванням основних видів медичної допомоги (амбулаторно-поліклінічна, стаціонарна, комплексна), вікових, гендерних груп або груп здоров'я.
- Збір статистичних даних, що стосуються кількості звернень по певний вид медичної допомоги протягом певних часових періодів, а також демографічних показників, що також впливають на розрахунок тарифі ДМС.
- Обчислення ймовірностей настання страхових випадків для кожного з обраних видів страхування.
- Виявлення та моделювання тенденції зміни відповідних ймовірностей, формулювання та перевірка гіпотез щодо типів розподілів ймовірностей.
- Моделювання динаміки страхових відшкодувань та страхових виплат.
- Обчислення збитковості та аналіз її динаміки.
- Факторний аналіз збитковості, визначення факторів, які позитивно (негативно) впливають на ефективність страхової діяльності.

- Обчислення ризикових надбавок.
- Визначення тарифних ставок для кожного з обраних видів страхування.
- Прогнозування рівня розвитку страхування в обраній галузі.

Виконання таких проектів дозволяє студентам виконати дослідження максимально наближене до реальної професійної діяльності актуарія, поглибити і розширити набуті знання та вміння, ознайомитись з найсучаснішими нормами, методами та підходами, що використовуються в актуарних розрахунках. Все це, безсумнівно, сприяє активізації пізнавальної діяльності студентів, формуванню дослідницьких навичок, готує до майбутньої професійної діяльності. Найцікавішим для студентів є те, що вони виконують реальне дослідження на основі реальних даних, які актуальні тут і зараз. Так в 2020 році, виконуючи такі проекти, ми ставили також завдання: врахувати динаміку розвитку пандемії Covid-2019 і обчислити відповідну ризикову надбавку для обраних видів ДМС.

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ СТУДЕНТАМИ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ПІД ЧАС ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Горбачук Василь
Національний університет імені М.П. Драгоманова

На сьогодні, процес навчання математичної статистики потребує постійних змін та удосконалення, щоб цілком відповідати вимогам часу та значному збільшенню частки використання методів та інструментів статистики для розв’язання практичних завдань в економіці, освіті, педагогіці.

Ці зміни та удосконалення мають стосуватись у першу чергу методів, форм та засобів навчання. Авторами вже було здійснено спробу досягти якісних зрушень у навчанні математичної статистики, скориставшись комбінованою формою проведення занять — лабораторно-практичним заняттям (ЛПЗ).

Сама структура ЛПЗ дозволяє досягати більшої актуалізації знань і уявлень, мотивації навчальної діяльності, кращого розуміння змісту завдань, самостійного виконання, узагальнення і систематизації результатів, тощо. Лабораторно-практичні заняття носять переважно розвиваючий науково-дослідницький характер і, в результаті, формують особистість, яка здатна самостійно переносити знання і вміння у нову ситуацію; помічати проблеми у звичних умовах; бачити зміст і структуру об’єкту пізнання; знаходити альтернативні способи розв’язання проблем; знаходити різні комбінації розв’язання завдань тощо[1].

Проте для того, щоб ЛПЗ були максимально ефективними у формуванні вказаних характеристик особистості, потрібно правильно підібрати навчальний матеріал та задачі для опрацювання на заняттях, а також методи та засоби їх розв’язання.

В часи стрімкого, експоненційного розвитку технічних засобів та програмного забезпечення (ПЗ) якраз процес підбору і використання засобів розв’язання прикладних задач потребує постійних змін та вдосконалення. Оволодіння передовими сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями (ІКТ) дає можливість майбутнім викладачам набути досвіду використання цих технологій у своїй професійній діяльності як інструменту навчання та організації підготовки і самопідготовки студентів.

Враховуючи вищесказане, нами була запропонована нова типізація задач математичної статистики, яка грунтується в першу чергу на особливостях і ролі застосування ІКТ в навчанні дисципліни. Вона покликана полегшити і удосконалити підбір прикладних задач та використання програмних засобів для їх розв’язання. Відтак, ми виділяємо 5 основних типів задач, згідно нашої типізації:

- тестові завдання та вправи - класичні тести, що використовуються для отримання допуску до певних видів діяльності та для перевірки рівня засвоєння теоретичних знань;

- обчислювальні задачі - для цих задач характерні вибіркові числові дані у ролі вихідних даних, вихідні дані та результати обчислень мають наближений характер;
- граничні задачі - на основі результатів, отриманих для вибірки, необхідно знайти оцінки невідомих параметрів або перевірити певні статистичні гіпотези для генеральної сукупності; результати мають наближений характер і отримуються з певним рівнем надійності;
- аналітичні задачі - встановлення однорідності вибірки та розбиття вибірки на однорідні групи за певною ознакою; визначення відносного впливу факторів на значення результуючого показника; проведення кореляційного та регресійного аналізу;
- ситуаційні або дослідницькі задачі - передбачають побудову і аналіз математичної моделі, вибір методу розв’язання; можуть розв’язуватись різними методами, при чому результат може залежати від вибору методу.

Приклади окремих задач:

- обчислювальні:

Дається невпорядкована вибірка об'єму n. Потрібно: 1) побудувати точковий варіаційний ряд, полігон частот; 1) записати емпіричну функцію розподілу; 3) обчислити вибіркове середнє, дисперсію і середнє квадратичне відхилення; 4) якщо це можливо, знайти довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення з $\alpha = 0{,}03$.

- аналітичні:

За даними вибірки визначити щільність зв’язку між заданими змінними. З заданим рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про статистичну значущість отриманого значення коефіцієнта кореляції.

A	45	55	47	32	40	44	51	50	43
B	17	19	15	18	21	23	20	19	30

Отже, описана типізація дозволяє змістити акценти при виборі задач в бік застосування ІКТ при їх розв’язанні. А це, в свою чергу, забезпечує варіативність при виборі програмних засобів для використання на лабораторно-практичних заняттях або для дистанційного навчання. Так для створення та опрацювання тестових завдань можна використовувати будь-яке ПЗ: від звичайних Google Forms до спеціалізованих засобів проведення тестування як Kahoot!, Quizlet та ін. Для опрацювання задач обчислювального та граничного типів доцільно використовувати звичні для викладачів та студентів програмні засоби як MS Excel, GRAN. Вони часто вже знайомі користувачам і мають зрозумілий і відносно простий інтерфейс, що значно скорочує час на їх опанування. Для роботи над аналітичними та дослідницькими задачами, на наш погляд, найдоцільніше використовувати більш серйозні спеціалізовані статистичні програми (SPSS, Statistica, тощо) та мови програмування з потужними статистичними бібліотеками (Python, R, Java). Хоча вказані програмні засоби і є складнішими для опанування в порівнянні з тим же MS Excel, вони, в той же час, дозволяють користуватись будь-якими відомими методами і підходами до розв’язання статистичних задач як теоретичного так і, що дуже важливо, прикладного характеру.

Список використаних джерел

1. Горбачук В.О. Математична статистика. Лабораторно-практичні заняття: навчальний посібник / В.О. Горбачук. - К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016 - 129 с.
2. Колягин Ю. М. Методические проблемы применения задач в обучении математики / Ю. М. Колягин // Преподавание алгебры и геометрии в школе. - М. : Просвещение, 1982. - С. 116-122.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Богдана Кочулап

Студентка Волинського національного університету імені Лесі Українки

Серед великого розмаїття типів функціональних залежностей в ході розвитку науки виділилась невелика група функцій, які особливо часто зустрічаються в найрізноманітніших задачах науки і практики. Природно, що цей клас так званих елементарних функцій виявився найбільш вивченим.

До числа основних елементарних функцій відноситься і показникова функція , де В множині таких функцій виділяють "головну" функцію , яку називають експоненціальною функцією.

Універсальність експоненціальної залежності пов'язана з двома її властивостями. По-перше, похідна від цієї функції дорівнює самій функції, по-друге первісна цієї функції також рівна самій функції.

Перша властивість вимагає неперервної рівності швидкості росту величини самій величині. Друга властивість передбачає неперервну рівність кожного значення функції сумі всіх її попередніх значень, тобто її інтегральному значенню.

Оскільки має місце рівність: то, знаючи властивості експоненціальної функції можна з'ясувати і властивості показникової функції .

У науковій і навчально-методичній літературі існують різні способи означення показникової функції :

- як узагальнення степеня ([1], [2]);
- з допомогою рядів ([3], [4]);
-з допомогою функціональних рівнянь ([5], [6]);
- означення показникової функції як оберненої до логарифмічної ([7]);
- з допомогою диференціальних рівнянь ([3], [7]) та ін.

Загальна методична схема вивчення будь-яких функцій в вищій школі така: після мотивації і введення означення функції будується її графік, за графіком "читаються" властивості функції, після чого вони доводяться аналітично.

В даній роботі пропонується інший методичний підхід: спочатку означається з допомогою диференціального рівняння експоненціальна функція, яку позначають вивчаються властивості цієї функції на основі такого означення, встановлюється зв'язок між функцією і степенем: $exp(x$ і тільки після цього на основі встановлених властивостей будується графік функції .

Виклад матеріалу ґрунтується на основі теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші: і найпростіших відомостей з диференціального числення (похідна функції, таблиця похідних, геометричний зміст похідної, теореми про похідну суми і добутку диференційовних функцій, формула похідної складеної функції, лема про неперервність диференційовної функції, теорема Больцано-Коші про перетворення в нуль неперервної функції, достатні ознаки зростання і спадання функції на проміжку, теорема Вейєрштрасса про існування границі монотонної обмеженої числової послідовності та ін.).

Багато процесів у природі і техніці математично виражається за допомогою показникової функції, зокрема, її найпростішого випадку: експоненціальної функції У практичному застосуванні показникові функції зустрічаються здебільшого у вигляді

або де -сталі.

Розглянутий спосіб означення експоненціальної функції $y = e^x$може бути використаний на факультативних заняттях, спецкурсах з математики, в класах науково-природничого профілю,в класах з поглибленим вивченням математики.

Список використаних джерел

1. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу [Текст] : Проб. підручник для 10 - 11 кл. серед. шк. (М. І. Шкіль [та ін.]. – К. : Зодіак - ЕКО, 1995. – 608 с.

2. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: [Текст] : Проб. підручник для 11кл. з поглибл. вивченням математики. – К.: Освіта,1994. – 304с.

3. Элементарные функции [Текст] : Учеб. пособие / А. Архипов [и др.]. – Мн. : Выш .шк., 1991. – 140 с.

4. Одинец В. П. Построение элементарных функций [Текст] : учеб. пособие / В. П. Одинец, А. И. Поволоцкий ; Российский педагогический ун-т им. А. И. Герцена. – СПб. : Образование, 1995. – 71 с.

5. Бродский Я.С. Функциональные уравнения [Текст] / Я. С. Бродский, А. К. Сліпенко. – К.: Вища шк., 1983. – 96 с.

6. Лихтарников Л. М. Элементарное введение в функциональные уравнения [Текст] / Л.М. Лихтарников. – Спб.: Лань, 1997. – 160 с.

7. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 - х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ: Пер. с нем. Под ред. В. Г. Болтянского. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. фнз. - мат. лит., 1987. – 432 с.

РИСУНКОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Іван Ленчук

Житомирський державний університет імені Івана Франка

Розв'язування задач стереометрії не обмежується виключно геометричною складовою, в них «левову частку» місця займають формально-аналітичні перетворення й вираження, а завершують операції арифметичні обчислення. Звісно, схожі вправи не зайві у навчанні, демонструючи, зокрема, тісні міжпредметні зв'язки у середовищі математичних дисциплін. Усе таки, із фахово-змістового погляду поза предметні дії нівелюють сутність задач, оскільки: «Геометрія має бути геометричною». Це означає, що її ***головним*** діючим об'єктом повинна стати ***фігура*** …, а ***головним*** засобом навчання – ***рисунок***, **картинка**» [1, с. 75].

У посібниках методичного характеру превалює думка, що рисунки в стереометрії є допоміжним засобом розв'язування задач ([2, с. 6]; [3, с. 15]). Проте без рисунка непросто дійти результату в більш-менш серйозній задачі, а майбутній учитель (учень), уважно прочитавши умову, моделює бінарним зображенням уявлювану конструкцію й лише опісля ґрунтовно аналізує реальну просторову ситуацію. Отож, немає сумнівів, що грамотно виконаний рисунок – перший, головний і вкрай необхідний стереометричний засіб. Окрім того, на якісному рисунку побудовними методами (зокрема, із застосуванням сучасних ІКТ) з надвисоким ступенем точності розв'язуються різного роду позиційні та метричні задачі, що візуально демонструє ***прикладну*** сутність дисципліни «Геометрія» [4, 5].

Геометрія формує життєво важливі для учня *знання*, *вміння* і *навички*, адже: «… викладання геометрії включає три тісно пов'язані, але поряд із тим і протилежні елементи: ***логіку***, ***наочне уявлення***, ***застосування до реальних речей***. Цей «трикутник» складає … **душу** ***викладання геометрії***» [6, с. 57].

Такі якості особистості ефективно розвиватимуться лише за умови, якщо в закладі вищої педагогічної освіти першій з наук буде відведено одне із пріоритетних місць.

Найменше, що у змозі зробити вчитель, – це геометрично підсилити, максимально унаочнити задачу на обчислення, додаючи конструктивізму і рисункової візуалізації алгоритму її покрокового розв'язання, орієнтуючи тих хто вчиться на примітивний (поки що), але ***практичний*** результат.

Як цього досягти? Продемонструймо прикладом.

Задача. *Задано правильну трикутну піраміду SABC зі стороною основи a. Бічне ребро піраміди у два рази більше сторони основи.*

1. *Побудуйте на поверхні піраміди* ГМТ *рівновіддалених від вершин S і A.*

2. *Знайдіть формально-логічно та графічно площу фігури, яку утворює* ГМТ. *Оцініть точність рисункових операцій.*

3. *Побудуйте розгортку зрізаної піраміди.*

Насамперед варто змоделювати загальногеометричний підхід до уявлюваного вирішення сформульованої пропозиції, тобто визначитися із правило-орієнтиром покрокових операцій у просторовій конструкції.

Наразі відомо, що ГМТ простору, рівновіддалених від вершин S і A, є площина $\boldsymbol{\Sigma}$, перпендикулярна SA й така, яка точкою P ділить відрізок навпіл (рис. 1). Отже, за логікою міркувань, першим кроком слід провести через точку P ($SP = PA$) площину $\boldsymbol{\Sigma}$ (метрична операція), а другим – відшукати фігуру перерізу поверхні піраміди цією площиною (позиційна операція). Розуміння, «бачення» в уявленнях цих дій забезпечує правильний шлях у наступних побудовах безпосередньо на зображенні тривимірного тіла.

1-*й спосіб* (рис. 1). Скористаємося залежностями між визначальними елементами піраміди, котрі випливають з умови задачі.

Трикутник APB рівнобедрений ($SP = PA = AB = a$). Тому ділимо відрізок PB точкою Y навпіл і проводимо першу висоту AY цього трикутника. Але у трикутнику SAB, оскільки він теж рівнобедрений ($SA = SB$), медіана SM є одночасно і висотою. Тож відрізок PZ, проведений паралельно SM, є ще однією (другою) висотою трикутника APB. Відомо, що висоти трикутника перетинаються в одній точці. Нехай $N = AY \cap PZ$. Отже, третя висота BX трикутника APB однозначно визначається його вершиною B і ортоцентром N. Цим у грані SAB знайдено перпендикулярний напрям до ребра SA. Тепер через точку P у цій грані проведемо відрізок PQ, паралельний XB, а через точку Q у грані SBC – відрізок QR, паралельний BC (адже площина $\boldsymbol{\Sigma}$ розділяє ребра SB і SC правильної піраміди у перетині з ними в одному і тому ж відношенні, що очевидно). Точки P, Q і R в об'єднанні зі всіма точками відрізків PQ, QR і RP (трикутник PQR) й будуть шуканим ГМТ на поверхні піраміди.

У такому алгоритмі **конструктивних** операцій спостерігаємо факт злиття, (накладання) кроків проведення через точку P площини, перпендикулярної ребру SA, і побудови перерізу піраміди площиною. Дві, загалом різні за геометричною суттю операції (метрична і позиційна), в цьому конкретному випадку неподільні.

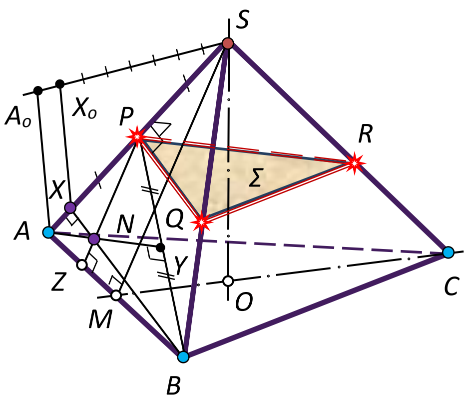


Рис. 1

2-*й спосіб* (рис. 1). У рівнобедреному трикутнику SAB опустимо із точки B перпендикуляр на його бічну сторону SA, розрахувавши розташування його основи X на цій стороні ***формально-аналітично***.

Отже, $AB = a$; $SA = SB = 2a$. Позначимо $AX = x$, тоді $XS = AS - x$. У трикутнику SAB справедлива рівність: $AB^2 - x^2 = SB^2 - (AS - x)^2$. Звідси маємо: $x = AX = \frac{a}{4}$, $XS = \frac{7a}{4}$ і $AX : XS = 1{:}7$. ***Графічне*** завершення задачі, яке згідно з узагальненою теоремою про пропорційні відрізки дозволяє змоделювати на зображенні знайдене відношення, не викликає труднощів.

Щоб подати площу рівнобедреного трикутника PQR функцією параметра a, виразимо через a його бічні сторони ($PQ = PR$) і кут QPR між ними.

1. Трикутник AXB прямокутний і $XB^2 = AB^2 - AX^2$, тому $XB = \dfrac{\sqrt{15}\,a}{4}$.

2. $\Delta\, SXB \backsim \Delta\, SPQ$, отже $\dfrac{PQ}{XB} = \dfrac{SP}{SX} \Rightarrow PQ = \dfrac{\sqrt{15}\,a}{7}$, а $PQ : XB = 4 : 7 = k$.

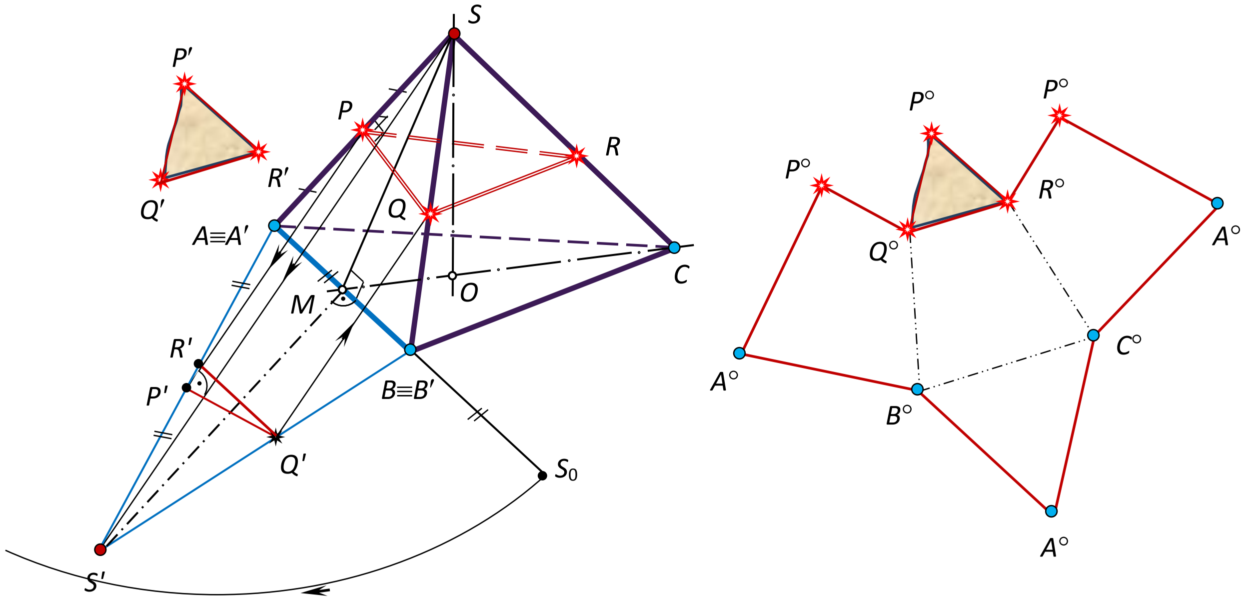
3. $\angle CXB = \angle RPQ$ ($XB = XC$, $BC = a$); із трикутника CXB за теоремою косинусів отримаємо $\cos \angle RPQ = \dfrac{7}{15}$ і, отже, $\sin \angle RPQ = \dfrac{4\sqrt{11}}{15}$.

4. $S_{\Delta\, PQR} = \dfrac{1}{2} PQ^2 \cdot \sin \angle RPQ = \dfrac{2\sqrt{11}}{49} a^2$. (*)

Можна скористатися також відомим фактом про те, що *площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних елементів*. У такій ситуації площу трикутника CXB неважко знайти, наприклад, за основою BC і висотою XK, проведеною з вершини X на сторону BC.

3-*й спосіб* (рис. 2, *а*). Сумістимо ліву грань піраміди SAB із картинною площиною: **змоделюємо**

її ***виносне*** креслення, обравши на зображенні в якості оригінального ребро $AB \equiv \equiv A'B'$. У побудові $M'S' \perp A'B'$ і $A'S' = B'S' = 2A'B'$. Провівши через точку P' ($A'P' = P'S'$) відрізок $P'Q'$ справді під кутом 90° до $A'S'$, одержимо точку Q', котра з шуканою точкою Q пов'язана пропорцією: $S'Q' : Q'B' = SQ : QB$. Точки Q і R будуємо вже звичним прийомом.



а) *б*)

Рис. 2

Тут рівнобедрений трикутник PQR (рис. 2, *а*) неважко зобразити у натуральну величину ($A'B' = a$), адже його бічні сторони і основа мають розміри відрізків $Q'R'$ і $P'Q'$ відповідно, де $Q'R' \parallel A'B'$.

Щоб методом трикутників побудувати розгортку піраміди, зрізаної площиною Σ, усі потрібні розміри ребер «знімаємо» з виносного креслення грані $S'A'B'$. Тут: $A°B° = B°C° = C°A° = = A'B'$; $A°P° = A'P'$; $B°Q° = C°R° = B'Q'$; $P°Q° = P°R° = P'Q'$ і $Q°R° = Q'R'$. Умовно розрізаємо піраміду вздовж ребер $A'P'$, $A'B'$, $A'C'$, $P'Q'$, $P'R'$ і «розкладаємо» її бічні грані та нижню й верхню основи на площину зображень (рис. 2, *б*). За розгорткою, виконаною на цупкому папері, неважко склеїти модель. Задачу розв'язано повністю.

Заміри (див. винесене креслення на рис. 2, *а*), виконані на ПК у системі автоматизованого проектування «КОМПАС 3D-LT v.10» із точністю 4-го знаку після коми, мають такі значення: $A'B'$ = 23,4232 мм, $P'Q' = P'R'$ = 12,9087 мм, $Q'R'$ = 13,4972 мм. Підрахунок площі трикутника PQR за формулою Герона дає результат: $S_{\Delta\, PQR}$ = 74,2625 мм^2.

Якщо a = 23,4232 мм підставити у формулу (*), отримаємо дещо інше значення шуканої площі: $S_{\Delta\, PQR}$ = 74,2716 мм^2, яке приймаємо за істинне.

Абсолютна похибка комп'ютерних випробувань складає 0,0091 мм^2, а відносна похибка – $1{,}222\cdot10^{-2}$ %. Констатуємо, що останній (конструктивний) спосіб є найпростішим!

Висновки. Знаменитий італійський вчений, фізик і астроном, один із засновників достотного природознавства Г. Галілея (1564-1642 рр.) писав: «*Геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей і дає нам можливість правильно мислити і розмірковувати*». Французький філософ і енциклопедист Д. Дідро (1713-1784) був переконаний, що «*Країна, в якій навчали б рисувати так, як учать читати і писати, перевершила б незабаром всі інші країни у всіх науках і мистецтвах*».

Не нехтуючи формальними обчисленнями, а доповнюючи висновок стереометричної задачі конструктивною складовою, алгоритмізуючи та візуалізуючи шлях її покрокового розв'язання у рисунковому моделюванні, навіч демонструючи достовірність теоретично з'ясованих закономірностей і прикладний характер дисципліни, ми наближаємо студентів університету до життєвих реалій, вчимо образно мислити, діяти розумом й руками, відчутно геометризуємо та унаочнюємо їхні міркування і зміст дисципліни «Геометрія» в цілому.

Можливість *побачити на рисунку* чи *визначитися за допомогою рисунка* з різними питаннями взаємних розташувань фігур або метричного вираження одних фігур через інші й є тією притягальною силою, яка формує в кожного індивідуума прихильність, потяг до геометрії. Якраз рисунковою моделлю як джерелом інформації та графічним втіленням уявлень, що реалізовуються за чіткими правилами і які є органічно невід'ємною складовою цього курсу, й вирізняється евклідова геометрія з інших розділів математики.

Ще в 40-х роках минулого століття проф. Четверухін М.Ф. наголошував: «Недоліком сучасного викладання є *надлишкова штамповка вимірювальних задач*, переважання у виборі задач таких, в яких розв'язання зводиться до підстановки в завчену формулу числових даних і до підрахунку результату. Задачі такого роду мало дають учням у розумінні їх геометричного розвитку. Такі задачі, швидше, потрібно вважати арифметичними. *Таким чином, в області вимірювальної геометрії потрібно переглянути питання про підбір задач із тим, щоб* ***підсилити їх геометричний зміст***» [7, с. 11].

Прикро усвідомлювати, однак позитивних зрушень по суті цієї проблеми у школі немає й сьогодні, питання недосконалості змісту і методики навчання диво-науки не вирішуються. Програма курсу евклідової геометрії з роками набула дивного (надприродно нестрогого) характеру, а тому стан справ у її **викладанні** й **учінні** не покращується.

Список використаних джерел

1. Шарыгин И.Ф. Нужна ли школе XXI века Геометрия? / И.Ф. Шарыгин. // Математика в школе. - №4. – 2004. – С. 72-79.
2. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителей / Я.Е. Гольдберг. – К.: Радянська школа, 1990. – 120 с.
3. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії: Посібник для вчителів / Я.М. Жовнір. – К.: «Освіта», 1991. – 96 с.
4. Ленчук І.Г. Психолого-педагогічні передумови застосування геометричних знань до розв'язування задач / І.Г. Ленчук, М.В. Працьовитий // Наукові записки: [збірник наукових статей] / МОН України, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова; упор. Л.Л. Макаренко. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. – Випуск CXXXXI (141). – С.113-121.
5. Ленчук І.Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навчальний посібник / І.Г. Ленчук. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 368 с.
6. Александров А. Д. О геометрии / А.Д. Александров // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 56-62.
7. Четверухин Н.Ф. О научных принципах преподавания геометрии в советской школе / Н.Ф. Четверухин. – М.: Известия АПН РСФСР, 1951– Вып. 31. – С. 5-12.

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Володимир Листопад

Національний університет харчових технологій, Київ

Виконання будь-яких операцій з матрицями (додавання, віднімання, множення, знаходження оберненої, транспонування тощо) або їх елементами є достатньо громіздкими та довготривалими в часі. На практичному занятті по темі «Дії з матрицями та обчислення оберненої матриці» вдається розібрати максимально 2-3 приклади. Якщо при вивченні цієї теми скористатися комп'терною підтримкою, то кількість виконаних завдань зросте в 4-5 разів. Для роботи кожен викладач обирає програму (для комп'ютерної підтримки), яка є в наявності, або ту, з якою здобувачі освіти знайомились на практичних/лабораторних заняттях з інформатики раніше.

Нагадаємо деякі відомі факти з матричної алгебри [1, с.92](без доведення).

Теорема 1. Довільну невироджену матрицю A з допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної матриці E .

$$A \to E \, . \tag{1}$$

Теорема 2. Якщо до одиничної матриці порядкуу n застосувати ті самі елементарні перетворення тільки над рядками і в тому ж порядку з допомогою яких невироджена квадратна матриця A порядку n зводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця A^{-1} буде обернена до матриці A .

Описана в теоремі 2 схема дає спосіб знаходження оберненої матриці до даної з допомогою елементарних перетворень. При цьому зручно записувати матриці A і E поруч, розділяючи їх вертикальною рискою (розглядаючи розширену матрицю $(A|E)$), та одночасно проводити елементарні перетворення над рядками матриць A і E . В результаті перетворення рядків матриця $(A|E)$ перетвориться в матрицю $(E|A^{-1})$, тобто

$$(A|E) \to (E|A^{-1}). \qquad (2)$$

Цей метод обчислення оберненої матриці називають методом Жордана-Гауса. Проілюструємо його реалізацію на прикладі користуючись засобами Ms Excel.

Приклад 1. [2, с.66] Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Розв’язання.

Таблиця 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Обчислення оберненої матриці за методом**						
2				**Жордана-Гауса**				
3		**A**				**E**		
4	1	2	3	4	1	0	0	0
5	2	3	1	2	0	1	0	0
6	1	1	1	-1	0	0	1	0
7	1	0	-2	-6	0	0	0	1
8								
9	1	2	3	4	1	0	0	0
10	0	-1	-5	-6	-2	1	0	0
11	0	1	2	5	1	0	-1	0
12	0	2	5	10	1	0	0	-1
13								
14	1	0	-7	-8	-3	2	0	0
15	0	1	5	6	2	-1	0	0
16	0	0	-3	-1	-1	1	-1	0
17	0	0	-5	-2	-3	2	0	-1
18								
19	1	0	0	-5 2/3	- 2/3	- 1/3	2 1/3	0
20	0	1	0	4 1/3	1/3	2/3	-1 2/3	0
21	0	0	1	1/3	1/3	- 1/3	1/3	0
22	0	0	0	- 1/3	-1 1/3	1/3	1 2/3	-1
23								
24	1	0	0	0	22	-6	-26	17
25	0	1	0	0	-17	5	20	-13
26	0	0	1	0	-1	0	2	-1
27	0	0	0	1	4	-1	-5	3
28			**E**			A^{-1}		

У зафарбованих клітинках помічено розв’язні елементи для кожного кроку переходу.

Зауваження 1. Для переходу до наступної таблиці користуємося правилом прямокутника (Жорданові виключення) з обов'язковою фіксацією (клавіша F4) у створюваній формулі елементів розв'язного стовпця. Перевірку можна виконати користуючись функцією МУМНОЖ.

Зауваження 2. Теорема 2 виконується, якщо елементарні перетворення виконувати над стовбцями (Жорданові виключення по вертикалі), тобто матрицю E розташовують під матрицею A, тоді

$$\left[\frac{A}{E}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}}\right] \tag{3}$$

Зауваження 3. Якщо у співвідношенні (4) на місце одиничної матриці справа від вертикальної риски поставити матрицю B (це матриця-стовбець правої частини системи), то в результаті відповідних перетворень отримаємо матрицю $A^{-1}B$:

$$\left(A\middle|B\right) \to \left(E\middle|A^{-1}B\right), \tag{4}$$

де $A^{-1}B$ - є розв'язком системи в матричному вигляді.

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$

Розв'язання прикладу 3 проводиться за формулою (4). Відповідь. $x = 4,\ y = 2, z = 1.$

Зауваження 4. Якщо в співвідношенні (3) замість одиничної матриці під горизонтальною рискою поставити матрицю B, то в результаті відповідних перетворень отримаємо матрицю $A^{-1}B$:

$$\left[\frac{A}{B}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}B}\right] \tag{5}$$

Обернена матриця використовується при розв'язуванні матричних рівнянь вигляду $AX = B$ (розв'язок $X = A^{-1}B$) та $YA = B$ (розв'язок $Y = BA^{-1}$).

<u>Приклад 4.</u> Розв'язати систему із прикладу 3 матричним методом самостійно. (Скористатися функціями МОБР та МУМНОЖ із Ms Excel).

Розглянемо приклади на розв'язування матричних рівнянь.

<u>Приклад 5. [2, с.67]</u>

Розв'язати матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Запишемо наше рівняння в матричному вигляді:

$X \cdot A = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Знаходимо матрицю обернену до матриці A - A^{-1}.

2) Множимо наше рівняння справа на A^{-1}. Отримаємо $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, або $X = C$, де $C = B \cdot A^{-1}$

3) Отже $X = B \cdot A^{-1}$ (див. таблицю 2)

Таблиця 2

66		Розв'язування матричного рівняння (приклад 5)								
67										
68		4	0	1	Крок 1		1	-1	0	
69	A=	3	0	1		$A^{-1} =$	2	-3	1	
70		1	1	1			-3	4	0	
71										
72		1	1	1	Крок 2			0	0	1
73	B=	1	1	1		$C=B\cdot A^{-1} =$		0	0	1
74		2	2	2				0	0	2

Відповідь. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Переваги застосування електронних таблиць Ms Excel при реалізації методу Жордана – Гауса на заняттях з вищої математики:

1. Процес розв'язання займає лічені хвилини в порівнянні з підрахунком вручну .
2. Паралельно добре засвоюється теоретичний матеріал.
3. Виробляються:
4. навички реалізації алгоритмічних процедур;
5. вміння формулювати навчальну задачу, планувати діяльність щодо її розв'язання;
6. вміння добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм та окремі функції);
7. вміння складати програми для розв'язування типових навчальних задач;
8. навички володіння основами логічного програмування;
9. вміння добирати ефективний метод для розв'язування поставленої задачі.

Використовуючи запропоновану методику, викладач за досить короткий час може скласти систему завдань для проведення тематичного та підсумкового контролю.

Запропонований підхід має досить широкий спектр застосування в методах розв'язання задач лінійного програмування.

Список використаних джерел:

1. Гусак А.А.Справочник по высшей математике:/[Справочник]. Гусак А.А., Гусак Г.М. - Мн.: Наука і техніка, 1991. - 480 с.

2. Алгебра і теорія чисел. Практикум: В 2-х частинах/Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.А. – К.: Вища школа. Головне вид-тво, 1983. – ч. 1. 232 с.-Укр.

ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ

Оксана Ніколаєва

Національний університет харчових технологій

Найважливішим компонентом навчального процесу є контроль знань студентів, до основних завдань якого відносять наступне:

1) оцінювання рівня здобутих знань, умінь та навичок студентів і якості засвоєння ними навчального матеріалу;
2) порівняння фактичних результатів навчальної діяльності із запланованими;
3) виявлення труднощів у засвоєнні студентами навчального матеріалу та типових помилок для подальшої корекції та усунення цих помилок;
4) стимулювання систематичної самостійної роботи та пізнавальної активності студентів;
5) діагностування рівня готовності студентів до сприйняття нового матеріалу.

Виділяють наступні види контролю: попередній, поточний, тематичний та підсумковий. Попередній контроль (вхідний контроль) дозволяє встановити рівень початкових знань студенів. На його основі можна корегувати рівень матеріалу, який буде викладено протягом семестру з навчальної дисципліни, планувати проведення додаткових занять з метою заповнення наявних пропусків в знаннях студентів.

Поточний контроль знань є необхідною частиною навчального процесу і мірою засвоєння навчального матеріалу. Мета поточного контролю полягає у отриманні об'єктивних даних про рівень знань студентів, про ступінь засвоєння навчального матеріалу, результати поточного контролю дозволяють здійснити подальше планування навчального процессу.

Тематичний контроль знань є показником якості вивчення окремих розділів, тем і пов'язаних з цим пізнавальних, методичних, психологічних та організаційних якостей студентів. Він дозволяє перевірити засвоєння отриманих знань через тривалий період і охоплює значну за обсягом кількість матеріалу.

Підсумковий контроль — це перевірка рівня засвоєння знань, умінь студентів за семестр або курс. Під час цього контролю встановлюється система і структура знань студентів з дисципліни, з'ясовується, чи може студент застосувати набуті знання до розв'язання практичних та професійно-орієнтованих задач.

Проведення всіх наведених видів контролю можливе у формі тестування, яке належить до найефективніших інструментів контролю рівня знань студентів. У широкій інтерпретації термін "тестування" – це тестовий метод, результат тестування й інтерпретація результатів тестування.

Тестовий контроль компетенцій може реалізуватися за допомогою таких типів тестів відкритої (з самостійним формулюванням відповіді на запитання) та закритої (з вибором правильної відповіді з переліку можливих варіантів) форм: 1) з множинним вибором; 2) на вибір правильної відповіді з двох запропонованих; 3) на відповідність; 4) на розпізнавання; 5) на знаходження відповідностей між двома параметрами; 6) у вигляді речень, котрі мають пропущені частини; 7) на групування фактів; 8) для відновлення деформованого тексту, в якому пропущені елементи; 9) що потребують від студентів розташування, інтегрування, інтерпретування матеріалу і висловлення власної думки та інші. Тест повинен обов'язково містити як завдання закритої форми так і завдання відкритої форми для того, щоб тестування не зводилося до простого вгадування відповідей. Зростаюча складність завдань допомагає визначити так званий поріг знань для кожного тестованого.

Висновки. Розумна, науково обґрунтована організація контролю знань студентів сприяє підвищенню якості освіти, має велике виховне значення, оскільки підвищує відповідальність за виконану роботу не тільки студентів, а й викладачів, привчає студентів до систематичної праці.

ЗАВДАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ ДЛЯ НЕМАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Олена Радзієвська

Національний університет харчових технологій, Київ

В сучасній науці, техніці і інших галузях людської діяльності математика відіграє надзвичайне важливе значення. Тому майбутні інженері, біологи, економісти, фізики, соціологи та інші фахівці потребують якісної математичної підготовки, яка давала б можливість розв'язувати нові проблеми, застосовувати комп'ютерну техніку, використовувати теоретичні досягнення на практиці. Для цього їм необхідно одержати правильно загальне уявлення про математичні методи і моделі та їх застосування для вивчення явищ реального світу. На цьому шляху виникають наступні принципіальні проблеми математичної освіти: вибір обсягу і змісту математичних дисциплін, визначення мети навчання, правильне поєднання інформативності і глибини викладання, строгості і наочності, тобто вибір найбільш ефективних і раціональних шляхів навчання. Все це потрібно робити з урахуванням обмеженого часу, відведеного на вивчення математики для студентів не математичних спеціальностей. В таких умовах успіх залежить від правильної методики викладання і професіоналізму викладача. Труднощі при вивченні будь-якого предмета виникають уже при відборі матеріалу, який потрібно викладати студентам. При вивченні математичних дисциплін справа ускладнюється через широке використання математики в різноманітних галузях науки і практики. Часто спеціалісти в цих галузях надзвичайно щиро переконанні, що вони краще за інших, зокрема, краще самих математиків знають в чому суть математики, як і чому потрібно навчати в ній. При цьому кожен, як правило, виходить із свого багажу математичних знань, вважаючи, що потрібно знати саме те, що знає він і забуває, що навчання людей як і будь-яка інша людська діяльність, вимагає своїх професіоналів.

Ефективність навчання, як будь-якої праці, в великій мірі залежить від його організації. Для правильної організації навчання суттєвим є регулярний контроль за працею студентів. Це особливо успішно можна робити в умовах рейтингового оцінювання знань студентів, який зараз запроваджений в усіх вищих навчальних закладах України. Проте для якісного та об'єктивного оцінювання знань студентів на основі рейтингу необхідно, щоб в групах було не більше 15 студентів, що, нажаль, рідко буває в Вузах України. Дуже важливим етапом всього процесу освіти є іспит. Перш за все іспит має бути добре підготовлений викладачем. Зокрема, студенти завчасно повинні бути проінформовані про екзаменаційні питання і джерела, в яких з ними можна ознайомитись. На іспиті екзаменатору потрібно не тільки вияснити рівень знань студентів, але й сам студент повинен обов'язково чітко розуміти, чому він за свою відповідь одержав саме таку оцінку а не іншу. Важливо, щоб студент усвідомив, що якщо він добросовісно працював впродовж семестру, то це суттєво полегшило йому підготовку до іспиту і гарантувало успішно його складання. Швидкі темпи розвитку науки і техніки практично унеможливлює у вищих навчальних закладах давати випускникам готові рецепти для вирішення усіх проблем, що можуть зустрітися в процесі роботи. Тому потрібно щоб студент отримав в процесі навчання необхідну математичну культуру, яка дозволить йому набути додаткові знання для вирішення тих проблем, які у нього можуть виникнути в процесі його професійної діяльності. Одна з найцінніших якостей спеціаліста – творчій підхід до вирішення різноманітних задач, які виникають в його роботі. Стосовно математики творчий підхід може означати побудову необхідної математичної моделі, іі дослідження, та застосування цих результатів на практиці.

ОСОБЛИВОСТІ ТА ПЕРЕВАГИ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Вікторія Романенко
Національний університет харчових технологій, Київ

Дистанційне навчання - форма дистанційної освіти, коли студент фізично не присутній на занятті – стало особливо затребуваним в 2020 році в умовах пандемії. На щастя, потужності Інтернету сьогодні дозволяють продовжувати освітній процес за будь-яких умов. В залежності від різноманітності курсів збільшується гнучкість та доступність можливостей навчання. Насправді, навіть існує низка переваг дистанційного навчання перед традиційними моделями навчання.

Оскільки Інтернет стирає межу між близьким та далеким, дистанційне навчання налаштоване на порушення нинішньої парадигми освіти. Завдяки всьому, починаючи від алгоритмів навчання, керованих штучним інтелектом, і закінчуючи простими дошками оголошень, існує більше можливостей, ніж будь-коли, навчитися усьому, що потрібно знати.

Хоча кваліфіковані викладачі і надалі залишатимуться невід'ємною частиною життя кожного студента, сучасні технології будуть містити фізичний простір між викладачами та студентами. Дистанційне навчання вже є частиною програм багатьох освітніх установ, зокрема, університетів, і воно має стати ще більшою частиною освітнього сектору .

Ще до недавна, дистанційною освітою можна було назвати заочні курси, на яких студенти спілкувалися зі своїми навчальними закладами чи викладачами поштою. Зараз дистанційна освіта перейшла в Інтернет, включивши величезний спектр систем та методів практично на будь-якому підключеному пристрої. В Інтернеті існує безліч варіантів навчання (і викладання), існує кілька видів, які добре підтримуються існуючими системами та усталеною педагогікою.

Відеоконференції - це звичний спосіб безпосередньої взаємодії викладачів зі студентами на заняттях у прямому ефірі. Це може бути індивідуальний сеанс або подібний до аудиторного сценарій, коли група студентів підключаються до викладача в прямому ефірі.

Синхронне навчання - це коли всі студенти навчаються разом одночасно (і часто навіть у одному місці), але викладач знаходиться в іншому місці. У ньому часто є відео- або телеконференції, які цифровим способом з'єднують викладачів та студентів.

Асинхронне навчання - це менш зв'язаний, але також менш обмежений формат. Замість живих онлайн-уроків студентам дають навчальні завдання із зазначенням термінів. Потім вони самостійно навчаються, щоб виконати завдання.

Інтернет-курси з **відкритим розкладом** додають ще один рівень гнучкості. Це тип асинхронного налаштування курсу, за винятком того, що немає ніяких термінів. Це ідеально підходить для студентів, які мають інші вимоги до свого часу. Наприклад, ті, хто працює паралельно з навчанням чи батьки малолітніх дітей.

Інтернет-курси з **фіксованим робочим часом** - це тип синхронного курсу, який вимагає, щоб користувачі мережі відвідували певне віртуальне місце у встановлений час та місце (наприклад, вебінар). На відміну від більш жорстких синхронних уроків, це дозволяє студентам з будь-якої точки світу підключатись та взаємодіяти в Інтернеті.

Комп'ютерна дистанційна освіта - це синхронний урок на комп'ютерах, як правило, в комп'ютерній лабораторії. Це найчастіше зустрічається в існуючих установах, які вже мають доступ до необхідних пристроїв.

Гібридне навчання - це специфічний тип змішаного навчання, коли студенти вивчають один і той же урок у режимі реального часу (тобто синхронне дистанційне навчання), але частина учнів присутня фізично, тоді як інші навчаються дистанційно.

Дистанційна освіта явно відрізняється від звичайної з точки зору фізичної присутності студента або викладача. Здебільшого це означає збільшення свободи як для студентів, так і для викладачів, але також вимагає вищого ступеня дисципліни та планування для успішного проходження курсу навчання.

Посилена свобода дистанційного навчання найяскравіше проявляється в тому, що студенти можуть обирати курси, які відповідають їх розкладу та ресурсам. (Викладачі можуть робити те саме.) А у випадку цифрового навчання студенти також можуть вибрати місце розташування та стилі викладання, які найкраще відповідають їхнім потребам.

Зворотна сторона свободи - це дисципліна, необхідна для максимального використання уроків. Студенти повинні самомотивуватися, щоб фактично виконати роботу, особливо в системах, які не вимагають від них присутності у певний час чи місце. Викладачі також повинні бути краще організовані з непередбачуваними ситуаціями, якщо їхні студенти потребують додаткових пояснень, особливо, якщо вони не викладають у прямому ефірі та використовують відеозаписи.

Однак, у деяких випадках дистанційне навчання вимагається не просто, а є найкращим з можливих варіантів. Бувають випадки, коли переваги дистанційної освіти стають очевидними. Звичайно, живі інструкції - це чудово. Очний контакт дозволяє викладачам та студентам зв'язуватися дуже автентично, що часто призводить до міцного зв'язку та взаєморозуміння. Як виявляється, при дистанційному навчанні є ряд своїх переваг.

Головною перевагою дистанційної освіти є її гнучкість. Студенти можуть обирати час, місце і спосіб навчання. Для тих, хто хоче прямого доступу до викладачів, є варіанти відеоконференцій. Але для студентів, які можуть проходити навчання за роботою програмою, більш спокійний графік може працювати краще. Є варіанти, які відповідають практично будь-яким потребам.

Завдяки широкому розповсюдженню варіантів онлайн-навчання, існують розроблені курси практично з будь-якої теми, яку людина хотіла б вивчати.

Легкий доступ до знань теж є перевагою. Чи через віддалене розташування, чи через інвалідність, деякі студенти не мають базового доступу до навчальних закладів. Програми дистанційного навчання пропонують кожному студентові можливість вчитися та вдосконалюватись у тому середовищі, яке вони вважають найбільш ефективним.

Дистанційне навчання також відкриває нові горизонти освіти в умовах міжнародних інституцій. Основні університети та торгові школи у всьому світі пропонують визнані ступені, сертифікати та професійну кваліфікацію в Інтернеті студентам різного віку. Вмотивовані люди можуть отримати більше базових сертифікатів про закінчення навчання скрізь від Udemy до Google Skillshop.

Зазвичай, вартість дистанційної освіти є меншою. Завдяки масштабованості цифрового навчання є навіть акредитовані університети, що працюють лише в Інтернеті, навчаючись у яких, студенти несуть витратити безпосередньо на навчання і уникають витрат на дорогу до навчального закладу, проживання та харчування. А ті університети, які пропонують обидва варіанти навчання очне та дистанційне, можуть запропонувати одну і ту ж програму за різко різними цінами.

Простота використання дистанційного навчання - це головне. Будь-яка система, яку ви приймаєте або для навчання, повинна бути зручною для всіх, хто бере участь. Це означає чіткий інтерфейс та набір певних важливих функцій, які включають:

- Цифрова дошка та анотації
- Створення та обмін медіа
- Запис екрану з аудіо
- Безпосереднє спілкування студента з викладачем
- Сумісність із декількома пристроями

Довіра до платформи дистанційного навчання - це справді поєднання інструктора та самої платформи. Для тих, хто навчається, важливо зазначити, наскільки добре визнані повноваження цієї платформи. Чи забезпечує він визнаний ступінь? Професійний сертифікат? Свідоцтво про закінчення? Це все, про що слід пам'ятати перед реєстрацією.

А викладачам, які хочуть застосувати систему дистанційного навчання, важливо знати, яку акредитацію ця система може надати від вашого імені або від імені вашого закладу. Щодо наукових ступенів або професійних кваліфікацій, можливо, буде потрібно визнання сторонніми регуляторними органами.

Дистанційне навчання, безумовно, не є чарівною паличкою, і завжди буде місце для навчання в аудиторії. У той же час дистанційне навчання все ще має багато невикористаного потенціалу, щоб зв'язати викладачів та здобувачів освіти новими способами. Зважаючи на підвищену гнучкість нових стилів такого навчання, впевнено можна сказати, що дистанційне навчання буде все частіше застосовуватися в майбутньому.

Список використаних джерел:

1. Технологія розробки дистанційного курсу : навчальний посібник / [Биков В. Ю., Кухаренко В. М., Сиротенко Н. Г.та ін.], за ред. В. Ю. Бикова, В. М. Кухаренка – К.: Міленіум, 2008. – 324с

2. Інформаційні технології в навчанні / За ред. Морзе Н. В. – К. : Видавнича група BHV, 2004. – 240 с.

АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ НАУКОВОЇ ТЕОРІЇ В ОПОРНИХ КОНСПЕКТАХ

Наталія Шаповалова

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Аліна Бублик

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Аксіоматичний або дедуктивний метод є одним із основних методів побудови наукової теорії. Його застосування передбачає, що строга наукова побудова будь-якої математичної теорії повинна задовольняти наступним вимогам:

1. Будь-яке твердження повинно бути серед списку аксіом або строго доведене на основі аксіом та раніше сформульованих і доведених теорем.

2. Будь-яке поняття повинно бути або в числі основних або визначене за допомогою основних та раніш визначених понять.

Аксіоматичний метод полягає в тому, що:

1. Перераховуються і називаються *основні поняття*.

2. Формулюються певні закони, в яких висловлюються властивості цих основних понять (*аксіоми*).

3. Формулюються ряд понять, які в список основних понять не ввійшли, які ми означаємо, користуючись основними поняттями і аксіомами (*означення*).

4. Формулюються ряд тверджень, які ми доводимо, користуючись правилами логіки і раніше доведеними твердженнями (*теореми*).

Інтерпретацією основних понять є надання їм певного змісту, побудова моделей певної теорії. Для того, щоб система аксіом служила науковим обґрунтуванням певної теорії, необхідно, щоб виконувались три вимоги:

1. Несуперечливість або сумісність системи аксіом.
2. Незалежність або мінімальність системи аксіом.
3. Повнота або категоричність системи аксіом.

Наукова теорія, яка задовольняє цим вимогам є *змістовною аксіоматичною теорією*.

На відміну від змістовних аксіоматичних теорій існують *формальні* аксіоматичні теорії, в яких вводяться правила логічного виводу.

Формування у студентів вмінь побудови моделей різних аксіоматик, перевіряти виконання вимог до системи аксіом сприяє і налаштовує їх на розуміння наукової побудови геометричних знань і фактів. Необхідність не лише констатації чи перевірки, а строго наукового доведення фактів як евклідової, так і неевклідових геометрій, вимагає від студентів ґрунтовної теоретичної та практичної основи для подальшої професійної діяльності.

Тому створення та використання опорних конспектів, де інформація, необхідна для засвоєння навчального матеріалу, викладена стисло у вигляді схем, рисунків, таблиць, діаграм, кольорових відповідностей тощо, є нагальним і доцільним, особливо, в умовах дистанційного навчання.

Значимість опорних конспектів, які є одночасно і засобом наочності, і засобом систематизації отриманих знань, і засобом інтенсифікації навчального процесу обумовлена часом.

Як приклад наведемо частину одного з опорних конспектів при навчанні аксіоматичного методу студентів математичних спеціальностей фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, а саме, при перевірці виконання трьох вимог до системи аксіом.

Модель структури певного роду.

Якщо знайдена конкретна множина M, на якій відношення Δ_t набувають конкретного змісту так, що виконуються аксіоми A_t, то кажуть, що побудована інтерпретація системи аксіом.

Множина М — модель структури роду Т

$\exists$ Множина M — модель структури роду T. → Інтерпретація системи аксіом

$\exists$ База структури роду Т → Система аксіом несуперечлива

Ознака: ***Система аксіом буде несуперечливою, якщо можна, побудувати її інтерпретацію.***

Це змістовна несуперечливість

Означення: Система аксіом називається *внутрішньо-несуперечливою*, якщо з неї не можна вивести два твердження, з яких одне заперечує інше.

це справа математичної логіки.

Якщо система аксіом змістовно несуперечлива, то щоб вона була і внутрішньо несуперечливою треба, щоб внутрішньо несуперечливою була система тих понять, які використовуються для побудови її інтерпретації.

Перша вимога до системи аксіом, щоб побудувати теорію

Несуперечливість **або *Сумісність***

Позначимо $\sum = \{A_1, A_2, ..., A_t\}$.

Нехай $\sum$- ***несуперечлива*** система аксіом.

? Чи всі аксіоми із $\sum$ потрібні для побудови теорії?

Якщо A_i залежить від решти аксіоми $\sum$, то .вона є логічним наслідком цих аксіом, тому.................…

Означення: Аксіома A називається *залежною* від решти аксіом системи, якщо інтерпретація системи аксіом $\sum$ є і інтерпретацією системи аксіом $\sum' = \sum \setminus \{A\}$.

? ознака

незаклежності

аксіоми від решти?

Нехай

$\sum$ — несуперечлива система, $A \in \sum$, A-залежна від решти аксіом системи.

Позначимо $\bar{A}$—заперечення аксіоми A, тобто твердження, протилежне за змістом.

Розглянемо $\sum^* = \sum' \, U\{\bar{A}\} = (\sum\setminus\{A\}) \, U\{\bar{A}\}$

Нехай

M $\quad$ M' $\quad$ M^*

$\sum$ $\quad$ $\sum' = \sum\setminus\{A\}$ інтерпретація $\sum^* = \sum' \, U\{\bar{A}\}$

M^* іінтерпр етація

$\sum \ni A$

$\sum^* \ni \bar{A}$ $\Rightarrow$ що не можливо

$\sum^*$ -- суперечлива система аксіом,

(А якою була аксіома А ?)

Ознака: Аксіома A буде незалежною від решти аксіом $\sum$, якщо система аксіом $\sum^* = (\sum \setminus \{A\})\, U\{\bar{A}\}$— є несуперечливою.

Друга вимога до системи аксіом, щоб побудувати теорію

Незалежність *кожної аксіоми від решти аксіом системи. Або* ***Мінімальність*** *системи аксіом.*

НЕХАЙ $\sum$- ***несуперечлива система аксіома.***

Означення: Якщо $\exists A \notin \sum$ |

1. не вводить нових відношень між елементами.
2. A—не залежить від аксіом $\sum$.
3. Система аксіом $\sum U\{A\}$—несуперечлива,

то система аксіом $\sum$ називається ***неповною.***

(1,2,3)

Означення: Якщо $\exists A$

то система аксіом $\sum$ називається ***повною***.

Нехай $\sum$- неповна $\Rightarrow \exists A$ |

(2) $\Rightarrow \sum U\{\bar{A}\}$ -несуперечлива, позначимо $\sum^* = \sum U\{\bar{A}\}$ -

(3) $\Rightarrow \sum U\{A\}$ -несуперечлива, позначимо $\sum' = \sum U\{A\}$

Нехай

M^* -- інтерпретація $\sum^*$

M' – інтерпретація $\sum'$

M^*, M' — інтерпретації $\sum$

$\Downarrow$

M^*, M' – не ізоморфні тому, що.....

При якій умові ∑– була неповною.?

Ознака: Система аксіом буде ***категоричною***, якщо всі її інтерпретації будуть ізоморфні.

Ознака: Система аксіом буде ***повною***, якщо дві її інтерпретації будуть ізоморфні.

Третя вимога до системи аксіом, щоб побудувати теорію

Повнота *системи аксіом*

ON MODERN THEMATIC PREPARATION FOR EIA IN MATHEMATICS: FUNCTIONS

Oleksandr Shkolnyi
National Dragomanov Pedagogical University, Ukraine

External Independent Assessment (EIA) is now the main instrument of assessing the quality of mathematical preparation for Ukrainian graduates. In particular, this instrument can be used for conducting the State Final Attestation (SFA) of academic achievements of senior school students, as well as a tool for competitive selection of applicants to universities. Therefore, there is no doubt about the relevance and the need for research on various aspects of preparation for the EIA in mathematics.

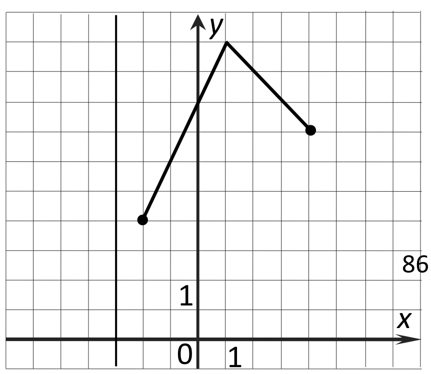
One such aspect is the systematic and thematic repetition of the school mathematics course. Based on our many years of experience in preparing for EIA, during this repetition we divide the whole mathematics course into 10 thematic blocks: «Numbers and Expressions», «Functions», «Equations and Systems of Equations», «Inequalities and Systems of Inequalities», «Text Problems», «Elements of mathematical analysis», «Geometry on the plane», «Geometry in the Space», «Coordinates and vectors», «Elements of combinatorics and stochastics».

It is this division that allows repeated repetition of the same material throughout the preparation process for the EIA. For example, the transformations of trigonometric expressions are repeated during the study of thematic blocks 1, 2, 3, 6, 7, 8 and 9. This permits the teacher constantly, as one said, to keep the student in a tone, when he would forget something, but he cannot do this, because proposed thematic training system does not allow it.

During more than last 15 years, our author’s team has been working to provide methodological support for the process of preparation for the EIA in mathematics. For the training and systematization of the school mathematics course we use the methodological set of books [1] and [2].

In the report we will regard a couple of basic tasks from the content block «Functions» and also will put a solutions for these tasks with some methodological comments to them. Here we will present only two of such tasks.

<ins>Task 1</ins>. On the graph you can see the graph of a function $y = f(x)$, defined on $[-2;4]$. Find: 1) the *smallest* value of the function $y = f(x)$ on its definition area; 2) $x_0 + y_0$, where $(x_0; y_0)$ is the common point of function graphs $y = f(x)$ and $y = 2^x$.

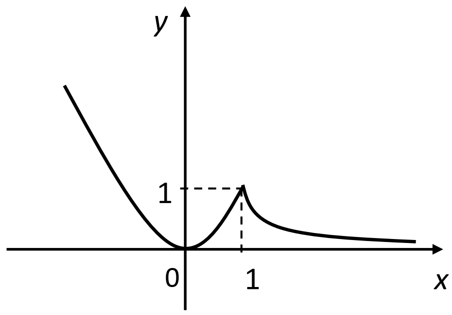


Solution. 1) From the figure we can see that the smallest value of a function in its domain is **4**. 2) We sketch the function graph $y = 2^x$ n the same coordinate system as the given graph. We see that the intersection point of these graphs $M(3;8)$, therefore, $x_0 + y_0 = 3 + 8 =$ **11**.

Comment. This task tests the ability to read graphs, understanding the concept of the largest and smallest value of a function on a segment, as well as the ability to plot the graph of the exponential function $y = 2^x$. It should be noted by the students that quite often the function on this segment acquires its extreme values at the end points of this segment. When analyzing Task 9, you can also ask students to find not only the smallest but also the largest value of the function in the definition area, which is already reached at its inner point.

<u>Task 2</u>. Let $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty;1); \\ \frac{1}{x}, & x \in [1;+\infty). \end{cases}$ 1) Find $f(-4)$. 2) Plot a function $y = f(x)$ graph. 3) Find the set of values of the function $y = f(x)$. 4) Find all the values m, when the line $y = m$ has only one common point with the graph of $y = f(x)$.

Solution. 1) Whereas $-4 \in (-\infty;1)$, then $f(-4) = (-4)^2 = 16$. 2) The graph of this function consists of fragments of graphs of functions $y = x^2$ and $y = \frac{1}{x}$, that have the common point $(1;1)$ (see figure). 3) Because $E(f)$ is the set of all possible values of variable y, then by the figure and the properties of functions $y = x^2$ and $y = \frac{1}{x}$ we can define that $E(f) = [0;+\infty)$. 4) The line $y = m$ is parallel to the axis Ox. By providing parameter values m and using the figure, we define that one intersection point with the function graph $f(x)$ this line has for all $m \in \{0\} \cup (1;+\infty)$.



Comment. In this task, the most important is the ability of students to justify their reasoning. Paragraph 1) requires the student to explain why he or she chose to calculate the first line in the function definition and not the second. For item 2), the students should be asked to show the graphs of both functions with a dotted line $y = x^2$ and $y = \frac{1}{x}$, and then adjust their joints at appropriate intervals. For paragraph 3), the student needs to explain that the set of values is the set of all possible values of the dependent variable. For paragraph 4), it is necessary for the student to be able to explain that the wanted set of parameter values is determined by the parallel transfer (motion) of a line parallel to the axis Ox. If the student did this task correctly, then teacher can put some additional questions that he or she can answer orally, e.g.: find $f(10)$; find all values m for which the line $y = m$ has with graph of function $y = f(x)$ only two common points or has no common points etc.

We believe that well-organized thematic training for EIA and SFA in mathematics will allow teachers to overcome the problems encountered by students in the systematization and repetition of the school mathematics course. We hope that the materials provided will be useful for teachers to ensure that the graduates are properly trained to standardized mathematics testing.

References

1. Zakhariichenko Yurii O., Shkolnyi Oleksandr V., Zakhariichenko Liliana I., Shkolna Olena V. (2019). Povnyi kurs matematyky v testah. Encyklopediya testovyh zavdan': U 2 ch. Ch. 1: Riznorivnevi zavdannia [Full course of math in tests. Encyclopedia of test items. In 2 parts. Part 1. Tasks of different levels]. 9-th edition. Kharkiv: Ranok. [in Ukrainian].

2. Zakhariihenko Yurii O., Shkolnyi Oleksandr V., Zakhariichenko Liliana I., Shkolna Olena V. (2019). Povnyi kurs matematyky v testah. Encyklopediya testovyh zavdan': U 2 ch. Ch. 2: Teoretychni

vidomosti. Tematychni ta pidsumkovi testy [Full course of math in tests. Encyclopedia of test items. In 2 parts. Part 2. Theoretical information. Thematic and final tests]. 3-rd edition. Kharkiv: Ranok. [in Ukrainian].

МАТЕМАТИЧНІ І ЛОГІЧНІ СОФІЗМИ

Ганна Циганкова
Національний університет харчових технологій, Київ

З античних часів математика вважається наукою, що дає істинні знання. Але не завжди можна бути впевненим чи істинне, чи хибне знання ми отримали в результаті міркувань. Тільки впевненість в істинності вихідних міркувань та правильності законів, за якими будуються висновки, дає гарантію істинності отриманого знання. Інколи цілком логічне і правильне на перший погляд доведення містить в собі непомітну помилку, зроблену свідомо чи несвідомо. Така помилка робить все доведення хибним і створює софізм. Міркування будуть правильними, якщо дотримуватись основних принципів формальної логіки – закону тотожності, закону суперечності, закону виключеного третього і закону достатньої підстави. Порушення одного з цих законів або принципів приводить до хибних тверджень і виникнення, як наслідок, софізмів [1, с.24].

Софізмом – з грецької «вигадка, хитрий умовивід» – є навмисне приховано-помилкове твердження, що приводить до хибних висновків. Софізм має видимість правильного, абсолютно логічного за структурою умовиводу. Математичний софізм – це хибне математичне твердження з прихованою помилкою в математичних міркуваннях. Відкриття софізмів стало великим кроком у дослідженні закономірностей людського мислення.

Першим, хто ввів софізми і став засновником школи софістів у Древній Греції, був Протагор із Абдери. Школа сприяла вдосконаленню ораторського мистецтва і культури логічного мислення. Відомими софістами були Аристотель, Зенон, Сократ, Платон та інші. Використовуючи те, що з одного неправильного умовиводу можна довести все, що завгодно, софісти відволікають увагу слухачів і навмисне допускають замасковану помилку. Софізми – це навмисне розставлені логічні пастки. Логічні софізми часто використовують журналісти, юристи, наприклад, адвокати можуть заховати логічну пастку за впевненістю і чіткістю своїх висловлювань.

Математичні софізми бувають арифметичні, алгебраїчні, геометричні, числові. Арифметичні софізми часто замасковано містять в собі заборонену математичну дію ділення на нуль. Такі софізми зустрічаються в алгебрі, геометрії, тригонометрії. Наприклад, ми можемо довести софістичне твердження, що $2 \cdot 2 = 5$.

Нехай $a = b + c$. Тоді $5a = 5b + 5c$ і $4b + 4c = 4a$.

Додамо почленно дві останні рівності: $4b + 4c + 5a = 5b + 5c + 4a$.

Тепер, віднімемо від обох частин по $9a$, отримаємо $4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$.

Або $4(b + c - a) = 5(b + c - a)$. Звідки $4 = 5$.

Багато логічних пасток виникало навіть у XIX ст. при дослідженні рядів, які пізніше виявились розбіжними, і, тому, будувати на них будь-яке доведення є неправильним.

Розглянуті софізми пов’язані з деяким протиріччям, обумовленим прихованою помилкою в міркуваннях. Виявити помилку у софізмі – це маленьке відкриття, що дозволяє усвідомити її і не повторювати в інших математичних міркуваннях. Існування софізмів вносить пожвавлення в математичну науку, оскільки, як писав Б. Паскаль, «предмет математики настільки серйозний, що не варто пропускати нагоди зробити його трохи цікавішим». Вивчення софізмів є ефективним засобом розвитку логічного мислення, спостережливості, критичного ставлення до навчального матеріалу. Воно може бути корисним молодим людям, учням, студентам і всім, кому потрібно аналізувати отриману інформацію, а також відстоювати правильність своїх думок і вчинків.

Список використаних джерел:

1. Конфорович А. Г. Математичні софізми і парадокси / Андрій Конфорович. – Київ: Радянська школа, 1983. - 208с.