# 27. ЗОБРАЖЕННЯ КАНОНІЧНИХ АНТИКОМУТАЦІЙНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ З УМОВОЮ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ

**В.Л. Островський**

*Інститут математики НАН України*

**О.В. Островська**

*Національний університет харчових технологій*

**Д.П. Проскурін**

*Київський національний університет ім. Тараса Шевченка*

**Р.Я. Якимів**

*Національний університет біоресурсів та природокористування України*

Канонічні антикомутаційні співвідношення квантової механіки, а також їх численні деформації та узагальнення є об'єктом інтенсивного вивчення протягом останніх десятиліть, див. [1,3,4] та ін. Також, починаючи з роботи [2], багато уваги приділяється вивченню операторних алгебр, породжених співвідношеннями з умовами ортогональності, та класифікації $*$-зображень таких алгебр.

В цій роботі ми вивчаємо зображення $*$-алгебри $A_0^{(d)}$, породженої твірними $a_i$, $a_i^*$, $i=1,\ldots,d$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} a_i^* a_i &= 1 - a_i a_i^*, \quad i=1,\ldots,d, \\ a_i^* a_j &= 0, \quad i \neq j, i, j = 1,\ldots,d. \end{aligned} \tag{1}$$

Ми розглянемо випадок $d>2$. Зауважимо, що на відміну від співвідношень з двома ступенями свободи, алгебра $A_0^{(d)}$ при $d>2$ не є алгеброю типу один. В цій ситуації слід виділяти "ручні" класи зображень. Виявляється, один з таких класів утворюють зображення, в яких часткова ізометрія з полярного розкладу образу хоча б однієї твірної містить унітарну частину. Зауважимо, що ця умова виконується тоді й лише тоді, коли для деякого $j=1,\ldots,d$ образ $a_j^2$ не є нульовим оператором. Нижче ми наведемо опис всіх незвідних зображень такого типу з точністю до унітарної еквівалентності.

Введемо деякі позначення. Для кожного $j=1,\ldots,d$ покладемо

$$\Lambda_j = \{\varnothing, (\alpha_1,\ldots,\alpha_k), k\in\mathbb{N}, \alpha_s = 1,\ldots,d, \alpha_k \neq j, \alpha_s \neq \alpha_{s+1}\}.$$

Через $\Lambda$ будемо позначати множину всіх скінченних впорядкованих наборів елементів з множини $\{1,\ldots,d\}$. Також будемо вважати, що $\varnothing\in\Lambda$. Побудуємо перетворення $\sigma, \sigma_j : \Lambda \to \Lambda$,

$$\sigma(\alpha)=(\alpha_2,\ldots,\alpha_k),\quad |\alpha|>1,\quad \sigma((\alpha_1))=\varnothing, \sigma(\varnothing)=\varnothing,$$
$$\sigma_j(\alpha)=(j,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k),\quad \sigma_j(\varnothing)=(j).$$

Нижче ми позначатимемо $\pi(a_j)$ через $A_j$. Для кожного $\alpha\in\Lambda_j$ позначатимемо через $A_\alpha$ добуток операторів $A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}\cdots A_{\alpha_k}$. Також покладемо $A_\varnothing=\mathbf{1}$.

**ТЕОРЕМА.** Припустимо, що набір $\{A_j, A_j^*, j=1,\ldots,d\}$ визначає незвідне зображення $A_0^{(d)}$ на просторі $\mathcal{H}$ та для оператора $A_k$ унітарна частина $H_u$ з узагальненого розкладу Вольда є ненульовою. Тоді $\dim\mathcal{H}_u=1$ або $\dim\mathcal{H}_u=2$, та, з точністю до унітарної еквівалентності:

1. Простір $\mathcal{H}$ породжений ортонормованим базисом $e_\alpha$, $\alpha\in\Lambda_k$ та для деякого $\phi_k\in[0,2\pi)$

$$A_k e_\varnothing=\frac{e^{i\phi_k}}{\sqrt{2}}\cdot e_\varnothing,\quad A_k^* e_\varnothing=\frac{e^{-i\phi_k}}{\sqrt{2}}\cdot e_\varnothing,$$

$$A_k e_\alpha=(1-\delta_{k\alpha_1})\cdot e_{\sigma_k(\alpha)},\quad A_k^* e_\alpha=\delta_{k\alpha_1}e_{\sigma(\alpha)},$$

$$A_j e_\alpha=(1-\delta_{j\alpha_1})e_{\sigma_j(\alpha)},\quad A_j^* e_\alpha=\delta_{j\alpha_1}e_{\sigma(\alpha)},\quad j\neq k,$$

$$A_j e_\varnothing=e_{(j)},\quad A_j^* e_\varnothing=0,\quad j\neq k.$$

Зображення, що відповідають різним $k=1,\ldots,d$ або різним $\phi_k\in[0,2\pi)$, є нееквівалентними.

2. Простір $\mathcal{H}$ породжений ортонормованим базисом $e_\alpha^{(1)}, e_\alpha^{(2)}$, $\alpha\in\Lambda_k$ та для фіксованих $x_k\in(0,1/2)$, $\phi_k\in[0,2\pi)$

$$A_k e_\varnothing^{(1)}=\sqrt{1-x_k}\cdot e_\varnothing^{(2)},\quad A_k e_\varnothing^{(2)}=e^{i\phi_k}\sqrt{x_k}\cdot e_\varnothing^{(1)},$$

$$A_k^* e_\varnothing^{(1)}=e^{-i\phi_k}\sqrt{x_k}\cdot e_\varnothing^{(2)},\quad A_k^* e_\varnothing^{(2)}=\sqrt{1-x_k}\cdot e_\varnothing^{(1)},$$

$$A_k e_\alpha^{(r)}=(1-\delta_{k\alpha_1})\cdot e_{\sigma_k(\alpha)}^{(r)},\quad A_k^* e_\alpha^{(r)}=\delta_{k\alpha_1}e_{\sigma(\alpha)}^{(r)},\quad r=1,2,$$

$$A_j e_\alpha^{(r)}=(1-\delta_{j\alpha_1})e_{\sigma_j(\alpha)}^{(r)},\quad A_j^* e_\alpha^{(r)}=\delta_{j\alpha_1}e_{\sigma(\alpha)}^{(r)},\quad j\neq k, r=1,2,$$

$$A_j e_\varnothing^{(r)}=e_{(j)}^{(r)},\quad A_j^* e_\varnothing^{(r)}=0,\quad j\neq k, r=1,2.$$

Зображення, що відповідають різним $k$ чи різним парам $(x_k,\phi_k)$ не еквівалентні.

**Література:**


1.Albeverio S., Proskurin D., Turowska L. On $*$-representations of a deformation of a Wick analogue of the CAR algebra // Rep. Math. Phys. – 2005. – 56, no. 2. – P. 175–196.

2.Cuntz J. Simple $C^*$-algebras generated by isometries// Commun. Math. Phys. – 1977. – 57. – P. 173–185.

3.Nagy G., Nica A. On the quantum disk and non-commutative circle // Algebraic Methods in Operator Theory, – Boston: Birkhauser, 1994. – P. 276–290.

4.Proskurin D., Savcnuk Yu., Turowska L. On $C^*$-algebras generated by some deformations of CAR relations // Contemp. Math. – 2005 – 391 – P. 297–312.