

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ НАМОРОЖЕННЯ ЛЬОДУ НА ВЕРТИКАЛЬНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ

В роботі запропоновано диференціальне рівняння з визначення швидкості намоороження льоду на циліндричній поверхні. З метою отримання точних результатів розрахунків, запропоновані рівняння визначення коефіцієнтів тепловіддачі при кипінні та вимушеній конвекції.

Ключові слова: лід, диференціальне рівняння, час намоороження, товщина льоду, коефіцієнт тепловіддачі.

В зв'язку із постійним зростанням вартості електричної енергії набуває особливої актуальності питання її заощадження або зменшення витрат на оплату енергії за рахунок оптимізації її споживання.

Найбільшим споживачем електричної енергії на підприємствах харчової галузі є електрообладнання холодильних установок. Молокопереробні підприємства вирізняються великою потужністю холодильних систем охолодження льодяної води та значною нерівномірністю її споживання. Льодяна вода на молочних заводах, окрім іншого, використовується для охолодження молока після приймання у процесі пастеризації. Крім цього, виробництво штучного холоду компенсує значні теплонадходження від технологічних процесів і створює нерівномірний графік споживання холоду на підприємствах. Пікове теплове навантаження на холодильну установку від охолодження молока здебільшого співпадає з піковими періодами три зональної сітки оплати спожитої електроенергії.

Для сучасних нових великих офісних та торгово-розважальних центрів, де встановлюються потужні холодильні центри для систем кондиціонування повітря, потреба в холоді в літні місяці може досягати 12 МВт. Специфіка роботи системи кондиціонування повітря і, відповідно, холодильної установки полягає у повному відключенні споживання холоду в нічний час. Таке зменшення потреби в холоді відображається на добовому графіку холодопостачання. Різке збільшення потреби в холоді (від 0 до 8÷9 МВт) вранці призводить до стрибка споживання електричної енергії, який припадає на години вранішнього піку по трьох зональній сітці оплати спожитої електроенергії. Основне споживання холоду (11÷12 МВт) припадає на години денного періоду «напівпіку». Відключення споживання холоду припадає приблизно на початок періоду «ніч».

Таким чином, для молокопереробних підприємств, офісних та торгово-розважальних центрів є доцільним змістити споживання електричної енергії на нічні години, коли вартість найменша. Використання акумуляторів холоду з накопиченням льоду на теплообмінній поверхні є перспективним методом заощадження коштів [1, 2].

В літературі запропоновано різні методи підбору акумуляторів холоду [3], але немає чітких методик підбору та конструювання акумуляторів холоду з фазовим переходом, які б враховували динаміку зміни товщини льоду на поверхні теплообміну, і, отже, час наморозування певної кількості льоду («ємність акумулятора»).

Наявні методики та формули розрахунку часу та товщини льоду на циліндричних поверхнях [3, 4] враховують кінцеві (максимальні) значення товщини льоду та часу на його утворення. В формулах враховано коефіцієнти тепловіддачі від води до стінки та від стінки до киплячого холодильного агента, та підвищення температури води за рахунок її молекулярного тертя. Ці параметри є дуже складними для визначення, оскільки наявні у літературі данні не охоплюють потрібні діапазони змін режимних параметрів, часто протирічать одне одному, а окремі – приведена температура – взагалі не можуть бути точно визначеними.

У [4] наведено виведення формули для визначення товщини льоду на плоскій поверхні, але кінцева формула не є диференціальною і не може описати динаміку росту льоду в часі. Окрім того, в [4] наведено формули з визначення часу наморозування льоду на внутрішній та зовнішній поверхнях труб, але ці формули також не описують динаміку льодоутворення на поверхні теплообміну. У методиках визначення часу та товщини льоду чітко не вказані формули для розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі при кипінні та від води до поверхні льоду.

Нами розроблено формулу для визначення швидкості утворення льоду на зовнішній поверхні труб. Для чіткого окреслення вихідних даних, необхідно рекомендувати формули визначення коефіцієнтів тепловіддачі від води до стінки та від стінки до киплячого холодильного агента на підставі отриманих дослідних даних.

Розглядаючи теплообмін між водою з додатною температурою ($t_w > 0$ °C та $t_w = \text{const}$) та киплячим холодильним агентом ($t_0 < 0$ °C та $t_0 = \text{const}$) через багат шарову циліндричну стінку, визначимо три джерела теплоти (рис. 1). Для спрощення складання теплового балансу багат шарової циліндричної стінки розглядаємо граничні умови третього роду.

Нехай у момент τ на поверхні наявний шар льоду товщиною x . За часовий проміжок dt утворюється незначна кількість льоду dx . Коефіцієнти теплопровідності стінки металеві труби λ_m та шару льоду λ_l , зовнішній $d_{\text{зов}}$ та $d_{\text{вн}}$ внутрішній діаметри – постійні.

Теплонадходження від конвективного охолодження води q_w (Дж/м). Різниця температур води t_w та температури стінки θ_0 (поверхні льоду) за деякий незначний проміжок часу dt за припущення, що конвективний коефіцієнт тепловіддачі α_w є постійним, знайдемо:

$$Q_w = p \cdot D_{ice} \cdot h_o \cdot (T_w - q) \cdot dt = p \cdot (D_{ext} + 2 \cdot x) \cdot h_o \cdot (T_w - q) \cdot dt . \quad (1)$$

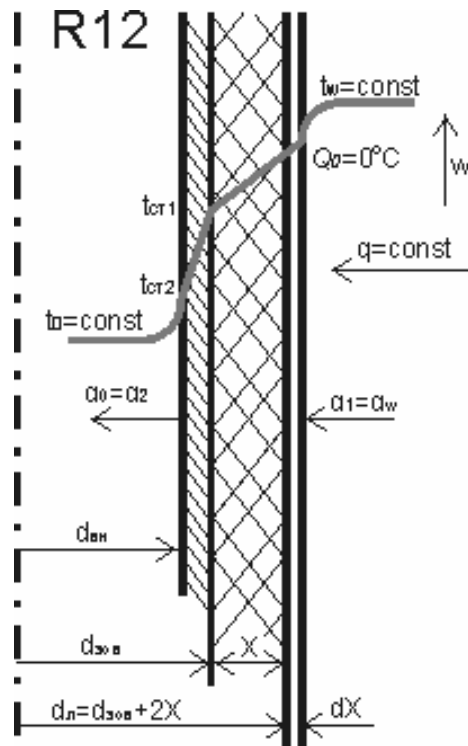


Рисунок 1 – Процес наморозення льоду біля циліндричної стінки

Теплота q_2 (Дж/м) еквівалентна роботі тертя при русі води вздовж стінки визначається з швидкості руху w та сили тертя води біля стінки p . Точно визначити силу тертя p , яка припадає на 1 м^2 теплопередаючої поверхні складно. Академіком Л. С. Лейбензоном запропоновано приблизну залежність між напругою сили тертя p та коефіцієнтом тепловіддачі α_w . Враховуючи вище зазначене, загальна формула по визначенню q_2 в кожен момент часу:

$$Q_2 = \frac{h_o \cdot w^2 \cdot p \cdot (D_{ext} + 2 \cdot x) \cdot \left(2 + \frac{1}{Pr^w} \right)}{3 \cdot C_p^w} \cdot dt, \quad (2)$$

де Pr^w - число Прандтля, c_p^w – ізобарна теплоємність кДж/(кг·К).

Теплота від утворення льоду q_l (кДж/м) визначається з урахуванням того що, за час dt утворюється певна кількість льоду товщиною dx . Віднісши теплоту льодоутворення до одиниці об'єму наморозеного льоду ($\rho = 301 \cdot 10^3 \text{ кДж/м}^3$) та приводячи тепловий потік до одиниці довжини труби, отримаємо:

$$Q_{ice} = \frac{V_{ice2} - V_{ice1}}{L} \cdot h_{ew} \cdot r_e, \quad (3)$$

де V_1 та V_2 – об'єм льоду на початку та в кінці проміжку часу dt , м^3 , L – довжина ділянки теплообміну, м. Перетворюючи (3), одержуємо:

$$Q_{ice} = \frac{p \cdot h_{ew} \cdot r_e}{4} \cdot \left([D_{ext} + 2 \cdot x + 2 \cdot dx]^2 - [D_{ext} + 2 \cdot x]^2 \right). \quad (4)$$

Спростуючи вираз у дужках (4) та нехтуючи значеннями dx вищого порядку, отримаємо:

$$Q_{ice} = \frac{p \cdot h_{ew} \cdot r_e \cdot 2 \cdot dx}{4} \cdot (2 \cdot D_{ext} + 4 \cdot x + 2 \cdot dx) = p \cdot h_{ew} \cdot r_e \cdot dx \cdot (D_{ext} + 2 \cdot x). \quad (5)$$

Для стаціонарного режиму виконуються умови теплового балансу.

Загальну кількість теплоти q_0 , приведену до одиниці довжини труби (Дж/м), що поглинається холодильним агентом, розраховуємо за формулою:

$$Q_0 = \frac{p \cdot (q - T_i)}{\frac{1}{2 \cdot l_{ice}} \cdot \ln \frac{D_{ext} + 2 \cdot x}{D_{ext}} + \frac{1}{2 \cdot l_m} \cdot \ln \frac{D_{ext}}{D_{in}} + \frac{1}{h_i \cdot D_{in}}} \cdot dt. \quad (6)$$

З умови теплового балансу:

$$Q_0 = Q_{ice} + Q_2 + Q_w \quad (7)$$

Підставляючи в (7) значення q_w , q_2 , q_l , та q_0 (1, 2, 5 та 6) та виконуючи перетворення, одержуємо диференціальне рівняння для визначення швидкості наморозження льоду (8):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left[\frac{q - T_i}{\frac{1}{2 \cdot l_{ice}} \cdot \ln \frac{D_{ext} + 2 \cdot x}{D_{ext}} + \frac{1}{2 \cdot l_m} \cdot \ln \frac{D_{ext}}{D_{in}} + \frac{1}{h_i \cdot D_{in}}} - \left[-h_o \cdot (D_{ext} + 2 \cdot x) \cdot \left(T_w - q \right) + \frac{w^2 \cdot \left(2 + \frac{1}{Pr^w} \right)}{3 \cdot C_p^w} \right] \right]}{h_{ew} \cdot r_e \cdot (D_{ext} + 2 \cdot x)}. \quad (8)$$

Коефіцієнти тепловіддачі α_w та α_0 в формулі (8) мають значний вплив на результат розрахунків, тому їхнє визначення є критичним.

Для аналітичного розрахунку конвективного коефіцієнту тепловіддачі α_w за критеріальними рівняннями необхідно знати еквівалентний діаметр. Оскільки перевірка адекватності розрахунків за рівнянням (8) проводиться на дослідному апараті, що являє собою теплообмінник типу труба в трубі з діаметром зовнішньої оболонки 180 мм та внутрішньої труби 10 мм, відповідно еквівалентний діаметр визначається для кільцевого каналу. Використовуючи формулу $d_e = 4 \cdot f / \Pi$ (f – площа живого перерізу каналу, Π – периметр тепло передаючої поверхні), отримуємо еквівалентні діаметри 0,17 м або 3,23 м для різних умов теплообміну. Значення еквівалентного діаметру 0,17 м відповідає одночасному теплообміну через внутрішню та зовнішню поверхні, а 3,23 м – лише через внутрішню. Відповідно, за числом Рейнольдса, для витрат рідини через дослідний апарат $0,0001083 \text{ м}^3/\text{с} \div 0,0001483 \text{ м}^3/\text{с}$, використовуються формули для ламінарного або турбулентного режимів руху рідини. З літератури обрано найбільш часто використовувані формули визначення α_w при ламінарному (еквівалентний діаметр 0,17 м) та турбулентному ($d_e = 3,23 \text{ м}$) режимах руху рідини в кільцевому каналі. Провівши варіативні розрахунки коефіцієнтів тепловіддачі для різних швидкостей руху води, одержуємо співрозмірні результати за формулами для ламінарного руху та розбіжні для турбулентного режиму руху. Таким чином, приймаємо для розрахунку еквівалентний діаметр 0,17 м, тобто різницю зовнішнього та внутрішнього діаметрів апарату. Обраний еквівалентний діаметр співпадає з гідравлічним радіусом кільцевого каналу дослідного апарату, який рекомендовано використовувати для визначення α_w у [5]. Для подальшого використання приймаємо формули (9, 10, 11) визначення α_w для ламінарного руху рідини в кільцевому каналі з зовнішньою теплоізоляцією [5].

$$Nu = Nu_{\infty} + f\left(\frac{D_i}{D_0}\right) \cdot \frac{0.19 \cdot \left[Pe \cdot \left(\frac{D_h}{L}\right)\right]^{0.8}}{1 + 0.117 \cdot \left[Pe \cdot \left(\frac{D_h}{L}\right)\right]^{0.467}}, \quad (9)$$

$$Nu_{\infty} = 3.66 + 1.2 \cdot \left(\frac{D_i}{D_0}\right)^{-0.8}, \quad (10)$$

$$f\left(\frac{D_i}{D_0}\right) = 1 + 0.14 \cdot \left(\frac{D_i}{D_0}\right)^{0.5}, \quad (11)$$

де d_i та d_0 – діаметр внутрішній та зовнішній кільцевого каналу, м; Nu_{∞} - число Нусельта на великому віддаленні від входу в канал; Pe – число Пекле; d_h – гідравлічний радіус каналу, м; L – довжина каналу, м.

Різноманітні формули для визначення коефіцієнтів тепловіддачі при кипінні дають дуже розбіжні результати при розрахунках ($\alpha_0=20\div 1400$ Вт/(м²·К) при $q=500$ Вт/м²) і не описують умов теплообміну у вертикальній мідній трубі внутрішнім діаметром 8 мм з системою подачі фреону R12 DX. За результатами літературного пошуку виділяємо наступні формули для визначення коефіцієнту тепловіддачі при кипінні в трубах. Обрані формули при розрахунках дають розбіжні результати. Результати за формулою Рассохіна Н.Г. [6] та Даніловою Г.Н. [7] близькі. Для подальшого використання прийнято формулу Рассохіна Н.Г. (12) [6], оскільки вона рекомендована для широкого діапазону тисків кипіння та теплових потоків, на відміну від формули рекомендованої Даніловою Г.Н. [7].

$$h_i = 3.1 \cdot p_i^{0.25} \cdot \dot{Q}_i^{2/3}, \quad (12)$$

де p – тиск кипіння, бар; q – тепловий потік, Вт/м².

Проводимо розрахунок чисельними методами у програмі MathCad рівняння (8). Для розрахунку приймаємо: постійні величини - $d_{\text{зовн}}=10$ мм, $d_{\text{вн}}=8$ мм, $\lambda_{\text{м}}=375$ Вт/(м·К), $\lambda_{\text{л}}=2,32$ Вт/(м·К), $\theta_0=0$ °С, $\rho=301000$ кДж/м³; параметри на початку розрахунку - t_w , t_0 , $Q=0,0001287$ м³/с (витрата води через апарат); параметри - P_t^w та c_p^w – розраховуємо за t_w , α_0 та α_w – знаходимо за співвідношеннями з [5, 6].

Для даних змін товщини льоду у часі для різних температур кипіння (рис. 2) використано температури води $t_w=2$ °С та кипіння $t_0=-5\div -25$ °С. Розрахунок проведено, базуючись на припущенні постійних значень коефіцієнтів тепловіддачі $\alpha_w=125$ Вт/(м²·К) та $\alpha_0=1000$ Вт/(м²·К), які розраховано за формулами з [5, 6].

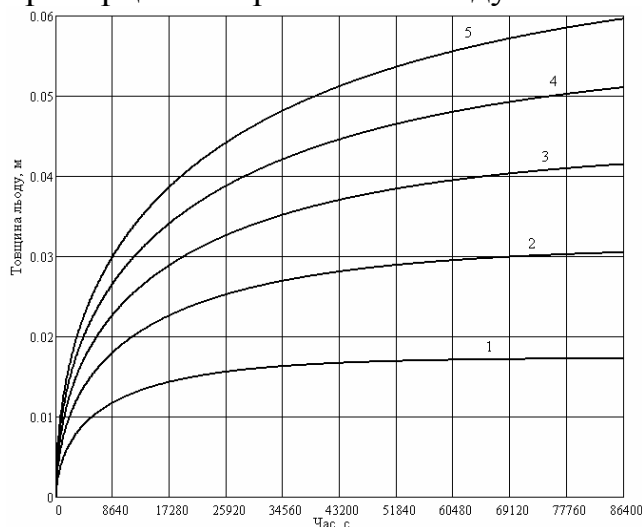
В дійсності значення коефіцієнтів тепловіддачі α_w та α_0 , так само, як і теплового потоку, функцією якого є α_0 , будуть постійно змінюватись під час збільшення товщини льоду.

Попередньо орієнтовно визначимо коефіцієнти тепловіддачі при кипінні α_0 для чистої теплообмінної труби без шару льоду та при наявності незначного шару льоду, через 10 с після початку намоороження. Одержані результати відрізняються в 1,8 раз, оскільки для чистої труби при заданому перепаду температур $\alpha_0=5250$ Вт/(м²·К), а через 10 с - $\alpha_0=2909$ Вт/(м²·К).

Щоб врахувати падіння теплового потоку до киплячого холодильного агенту проводимо побудову графіку зміни товщини льоду в часу частинами. Першим кроком проводимо розв'язок рівняння (8) з мінімальною товщиною льоду на трубі, через 130 с визначаємо товщину льоду та приріст льоду за 1 с. На основі отриманих даних за формулою Рассохіна Н.Г. знаходимо α_0 методом покрокового сходження заданого та отриманого теплового потоку. Одержані результати підставляємо до формули (8) та проводимо її чисельний розв'язок на наступному часовому інтервалі. Повторення вказаних дій проводимо n -ну кількість разів поки значення часу останнього розрахунку не буде дорівнювати 86400 с. Наклавши

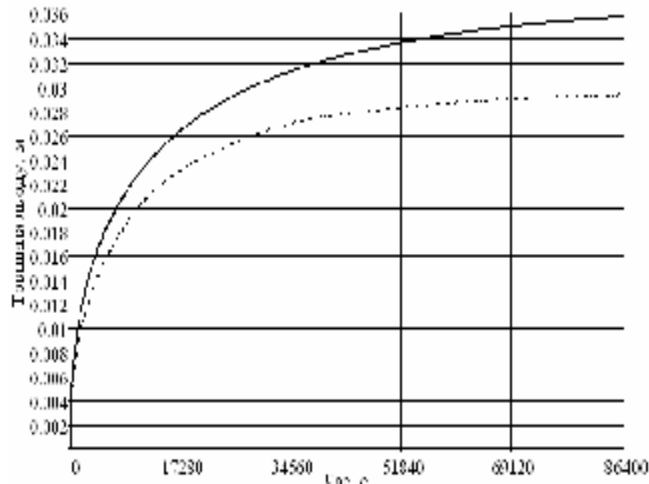
часткові рішення рівняння (8) на одне поле одержуємо криву зміни товщини льоду в часі з врахуванням падіння теплового потоку (рис. 3).

В результаті покрокового розрахунку є можливим побудови графіків зміни теплового потоку в часі (рис. 4) та в залежності від товщини льоду (рис. 5). Характер кривих на рис. 4 та рис. 5 однаковий. Падіння теплового потоку пропорційне наростанню льоду на теплообмінній поверхні.



1 - $t_0 = -5^\circ\text{C}$, 2 - $t_0 = -10^\circ\text{C}$, 3 - $t_0 = -15^\circ\text{C}$, 4 - $t_0 = -20^\circ\text{C}$, 5 - $t_0 = -25^\circ\text{C}$

Рисунок 2 – Зміна товщини льоду в часі за сталих коефіцієнтів тепловіддачі



— - $\alpha_0 = 5250 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)} - \text{const}$, - - - $\alpha_0 = f(q)$

Рисунок 3 – Зміна товщини льоду в часі за різних коефіцієнтів тепловіддачі при $t_w = 2^\circ\text{C}$, $t_0 = -10^\circ\text{C}$

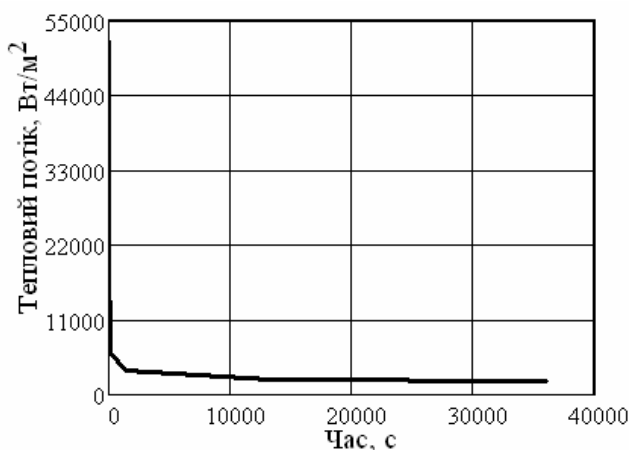


Рисунок 4 – Зміна теплового потоку в часі

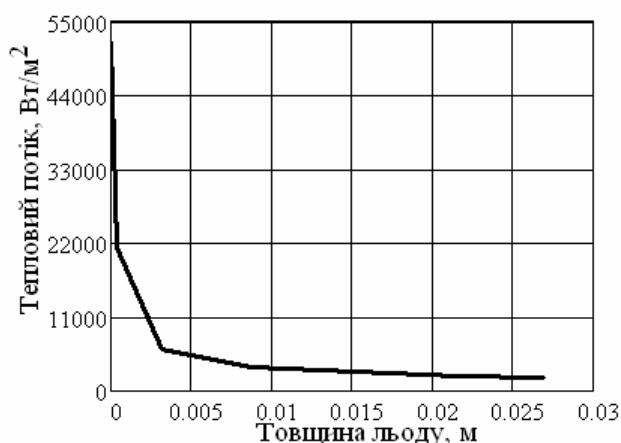


Рисунок 5 – Зміна теплового потоку від товщини льоду

Висновки.

- Запропонована формула визначення товщини льоду на циліндричній поверхні дає змогу визначати максимальну та поточну товщину льоду.
- Рекомендовано формули та література по визначенню коефіцієнтів тепловіддачі.
- Запропоновані графіки зміни товщини льоду в часі ілюструють динаміку льодоутворення і може бути використаний для оптимізації роботи акумуляторів холоду.

- Використання сталого коефіцієнту тепловіддачі при кипінні не враховує падіння теплового потоку при зростанні товщини льоду і тому дає хибні результати.

З метою врахування зміни теплового потоку під час наморозження льоду є доцільним подальше уточнення рівняння (8) корегуючими коефіцієнтами або створення прикладної програми покрокового розв'язання рівняння (8) з малим кроком по часу.

Література

1. *Пилипенко О. Ю.* Обґрунтування доцільності використання акумуляторів холоду з фазовим переходом / О. Ю. Пилипенко, Я. І. Засядько // Холодильна техніка і технологія. – 2008. – № 5 (115). – С. 11-15.
2. *Пилипенко О. Ю.* Варіанти оптимізації енергоспоживання на виробництво штучного холоду / О. Ю. Пилипенко, Я. І. Засядько // Обладнання та технології харчових виробництв: темат. зб. наук. пр. – 2010. – Вип. 24. – С. 54-62.
3. *Явнель Б. К.* Курсовое и дипломное проектирование холодильных установок и систем кондиционирования воздуха / Б. К. Явнель. – 3-е изд. перераб. и доп. – М. : Агропромиздат, 1989. – 223 с.
4. Холодильні установки : в 2 кн. Кн. 2 / під ред. І. Г. Чумака. – К. : Либідь, 1995. – 224 с.
5. Справочник по теплообменникам : в 2 т. Т. 1 / пер. с англ., под ред. Б. С. Петухова, В. К. Шикова. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 560 с.
6. *Цветков Ф. Ф.* Тепломассообмен : учеб. пособие для вузов / Ф. Ф. Цветков, Б. А. Григорьев. – 2-е изд. испр. и доп. – М. : Издательство МЭИ, 2005. – 550 с.
7. Данилова Г. Н. Теплообменные аппараты холодильных установок / Г. Н. Данилова, С. Н. Богданов, О. П. Иванов. – Л. : Машиностроение, 1973. – 323 с.