



АБІТУРІЄНТУ

Т. І. Олешко, К. І. Мазур,
О. К. Мазур, О. К. Мазур

Усна Математика

**на вступних випробуваннях
у вищих навчальних
закладах**



57
УДК 51(075/8)

ББК В10я7

У 759

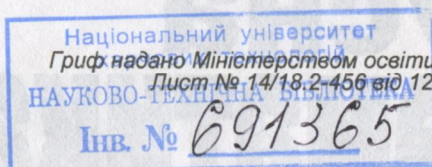
У-75

Автори:

Т. І. Олешко, К. І. Мазур,
О. К. Мазур, О. К. Мазур

Рецензенти:

О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Київський національний університет ім. Тараса Шевченка)
М. А. Мартиненко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний університет харчових технологій)



У 759 **Усна математика на вступних випробуваннях у вищих навчальних закладах:** Навч. посіб. / Т. І. Олешко, К. І. Мазур, О. К. Мазур, О. К. Мазур. — К.: НАУ, 2004. — 808 с.
ISBN 966-598-172-2

Посібник написано відповідно до програми з математики для вступників до вищих навчальних закладів. Він містить програму з математики та докладні відповіді на теоретичні запитання розділу 1 «Основні математичні поняття і факти» та розділу 2 «Основні формули і теореми» цієї програми, а також розв'язання прикладів, вправ і задач згідно з її розділом 3 «Формування основних умінь і навичок». Окремо подаються контрольні запитання з курсу алгебри, початків аналізу і геометрії, зразки екзаменаційних білетів усних іспитів, варіантів співбесід та білетів тестування знань з математики, вибрані конкурсні задачі, які пропонувалися на вступних випробуваннях у провідних вищих навчальних закладах України, довідковий матеріал з математики.

ББК В10я7

*Розповсюджувати та тиражувати
без офіційного дозволу НАУ забороняється*

ISBN 966-598-172-2

© Т. І. Олешко, К. І. Мазур,
О. К. Мазур, О. К. Мазур, 2004
© НАУ, 2004

Передмова	4
Програма з математики	5
Частина I. Відповіді на теоретичні запитання усного іспиту	8
Розділ 1. Основні математичні поняття і факти	8
Розділ 2. Основні формули і теореми	38
Розділ 3. Формування основних умінь і навичок.....	82
Контрольні запитання з курсу алгебри, початків аналізу і геометрії.....	273
Частина II. Зразки екзаменаційних білетів усних іспитів, варіантів співбесід та білетів тестування знань з математики	299
Частина III. Вибрані конкурсні задачі	394
Відповіді до частини III.....	648
Частина IV. Основні формули, теореми та співвідношення	772
Загальноживані позначення.....	805
Додатки.....	806
Список використаної та рекомендованої літератури.....	807

ПЕРЕДМОВА

Цей посібник призначено для вступників до вищих навчальних закладів, які складатимуть усний іспит з математики.

Він містить увесь пакет матеріалів, необхідних для самостійної підготовки до вступних іспитів з математики до вищих навчальних закладів України, а також програму з математики для вступників до вищих навчальних закладів України.

У першій частині посібника подаються відповіді на теоретичні запитання усного іспиту й контрольні запитання з курсу алгебри, початків аналізу та геометрії. Це допоможе вступникам підготуватися до можливих запитань екзаменаторів.

У другій частині наведено зразки екзаменаційних білетів усних іспитів, варіантів співбесід та варіантів білетів тестування знань з математики.

Найбільшою за обсягом є третя частина, де вміщено вибрані конкурсні приклади, вправи і задачі, які пропонувалися на вступних іспитах у більшості провідних вузів в останні 2-3 десятиліття.

У четвертій частині стисло викладено довідковий матеріал, що охоплює весь шкільний курс математики.

Складаючи цю книгу, автори використовували матеріали відомих шкільних підручників і посібників, поданих у списку літератури, варіанти вступних іспитів, опублікованих у пресі, а також власний досвід викладацької роботи.

Книга може бути корисною учням загальноосвітніх шкіл, гімназій, ліцеїв, коледжів, а також слухачам підготовчих курсів і факультетів, студентам педагогічних вузів, учителям математики, репетиторам, а також усім бажаючим розвинути і закріпити здібності до самостійного логічного мислення, збагатити свою математичну культуру.

Бажаємо успіхів

Автори

На іспиті з математики вступник до вищого навчального закладу повинен показати:

- а) чіткі знання означень математичних понять, термінів, формулювань правил, теорем, передбачених програмою, вміння доводити їх;

- б) вміння точно і стисло висловлювати математичну думку в усному і письмовому викладі, використовувати відповідну символіку;

- в) впевнене володіння математичними знаннями і навичками, передбаченими програмою, вміння застосовувати їх при розв'язуванні задач і вправ.

Програма з математики для вступників до вищих навчальних закладів складається з трьох розділів. Перший з них є переліком основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти вступник (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем). У другому розділі вказано теореми, які необхідно вміти доводити. Зміст теоретичної частини екзамену повинен черпатись з цього розділу. У третьому розділі подано основні математичні вміння і навички, якими має володіти вступник.

Розділ 1. Основні математичні поняття і факти

Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа (N). Прості та складені числа. Дільник, кратне. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне.

2. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10.

3. Цілі числа (Z). Раціональні числа (Q). Їх додавання, віднімання, множення і ділення. Порівняння раціональних чисел.

4. Дійсні числа (R), їх запис у вигляді десяткового дробу.

5. Зображення чисел на прямій. Модуль числа, його геометричний зміст.

6. Числові вирази. Вирази із змінними.

7. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь.

8. Логарифми, їх властивості.

9. Одночлен і многочлен. Дії над ними. Формули скороченого множення.

10. Многочлен з однією змінною. Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена).

11. Поняття функції. Способи задання функції. Область визначення, область значень функції. Функція, обернена до даної.

12. Графік функції. Зростання і спадання функції, періодичність, парність, непарність.

13. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку. Поняття екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма). Достатня умова екстремуму. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

14. Означення й основні властивості функцій: лінійної $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневі $y = ax^n$ ($n \in Z$), показникової $y = a^x$, $a > 0$, логарифмічної $y = \log_a x$, тригонометричних функцій ($y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$).

15. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними.
16. Нерівності. Розв'язування нерівностей. Рівносильні нерівності.
17. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь.
18. Арифметична та геометрична прогресії. Формула n -го члена і суми n перших членів прогресії.
19. Синус і косинус суми та різниці двох аргументів (формули).
20. Перетворення в добуток сум $\sin \alpha + \sin \beta$, $\cos \alpha + \cos \beta$.
21. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст.
22. Похідні функцій: $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Геометрія

1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка. Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути. Паралельні прямі. Перетворення подібності та його властивості. Відношення площ подібних фігур.
2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії.
3. Вектори. Операції над векторами.
4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника.
5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.
6. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція.
7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна. Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола. Дуга кола. Сектор, сегмент.
8. Центральні та вписані кути.
9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, трапеції.
10. Довжина кола та довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга і площа сектора.
11. Площина. Паралельні площини та площини, що перетинаються.
12. Паралельність прямої і площини.
13. Кут прямої з площиною. Перпендикуляр до площини.
14. Двогранні кути. Лінійний кут двогранного кута. Перпендикулярність двох площин.
15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Пряма й похила призми; піраміда. Правильна призма й правильна піраміда. Паралелепіеди, їх види.
16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери й кулі. Площина, дотична до сфери.
17. Формули площ поверхні й об'єму призми, піраміди, циліндра, конуса.
18. Формули об'єму кулі та її частин і формула площі сфери.

Розділ 2. Основні формули і теореми

1. Функція $y = ax + b$, її властивості, графік.
2. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості, графік.
3. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості, графік.
4. Формула коренів квадратного рівняння.
5. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
6. Властивості числових нерівностей.

7. Логарифм добутку, степеня, частки.
8. Функції $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, їх означення, властивості, графіки.
9. Корені рівнянь $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.
10. Формули зведення.
11. Залежність між тригонометричними функціями однокго й того ж аргументу.
12. Тригонометричні функції подвійного аргументу.
13. Похідна суми, добутку й частки двох функцій.
14. Рівняння дотичної до графіка функції.

Геометрія

1. Властивості рівнобедреного трикутника.
2. Властивості точок, рівновіддалених від кінців відрізка.
3. Ознаки паралельності прямих.
4. Сума кутів трикутника. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника.
5. Ознаки паралелограма.
6. Коло, описане навколо трикутника.
7. Коло, вписане в трикутник.
8. Дотична до кола та її властивість.
9. Вимірювання кута, вписаного в коло.
10. Ознаки подібності трикутників.
11. Теорема Піфагора.
12. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
13. Формула відстані між двома точками площини. Рівняння кола.
14. Ознака паралельності прямої й площини.
15. Ознака паралельності площин.
16. Теорема про перпендикулярність прямої й площини.
17. Перпендикулярність двох площин.
18. Паралельність прямих і площин.

Розділ 3. Формування основних умінь і навичок

Вступник повинен уміти:

1. Виконувати арифметичні дії над числами, заданими у вигляді десяткових і звичайних дробів; користуватися калькулятором і таблицями для проведення обчислень.
2. Виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні й тригонометричні функції.
3. Будувати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної й тригонометричних функцій.
4. Розв'язувати рівняння й нерівності першого та другого степеня, а також рівняння й нерівності, що зводяться до них; розв'язувати системи рівнянь і нерівностей першого і другого степеня й ті, що зводяться до них; найпростіші рівняння й нерівності, що мають степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції.
5. Розв'язувати задачі на складання рівнянь і систем рівнянь.
6. Зображувати геометричні фігури на площині й виконувати найпростіші побудови на площині.
7. Використовувати геометричні відомості при розв'язуванні алгебраїчних задач, а методи алгебри й тригонометрії — при розв'язуванні геометричних задач.
8. Виконувати на площині операції над векторами (додавання й віднімання векторів, множення вектора на число) і користуватися властивостями цих операцій.
9. Застосовувати похідну при дослідженні функцій на зростання (спадання), на екстремуми і для побудови графіків функцій.
10. Застосовувати інтеграл для обчислення площі фігури.

Частина 1

ВІДПОВІДІ НА ТЕОРЕТИЧНІ ЗАПИТАННЯ УСНОГО ІСПИТУ

Розділ 1

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ І ФАКТИ

1.1. Арифметика, алгебра і початки аналізу

1.1-1. *Натуральні числа (N). Прості та складені числа. Дільник, кратне. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне*

Натуральні числа — це числа виду $1, 2, 3, \dots$. **Множина натуральних чисел** позначається буквою N . Натуральне число називається **простим**, якщо воно ділиться націло тільки на себе і на одиницю. У протилежному разі воно називається **складеним**. Число k називається **дільником** числа m , якщо m націло ділиться на k , тобто $m = kp$ для деякого натурального p . Натуральне число k називається **кратним** для натурального числа m , якщо k ділиться на m без остачі. Число k називається **найбільшим спільним дільником** натуральних чисел p_1, \dots, p_n , якщо воно є найбільшим із усіх чисел, які є дільниками кожного із $p_i, i = 1, \dots, n$. Аналогічно, число k — **найменше спільне кратне** для натуральних чисел p_1, p_1, \dots, p_n , якщо воно найменше з усіх чисел, які діляться на кожне $p_i, i = 1, \dots, n$.

1.1-2. *Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10*

Натуральне число k ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується однією із цифр: 0, 2, 4, 6, 8. Число k ділиться на 3 (відповідно на 9) тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3 (відповідно на 9). Число k ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується на одну із цифр: 0, 5. І насамкінець k ділиться на 10 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується нулем.

1.1-3. *Цілі числа (Z). Раціональні числа (Q). Їх додавання, віднімання, множення і ділення. Порівняння раціональних чисел*

Цілими числами називаються числа виду $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. **Множина цілих чисел** позначається буквою Z . Число q **раціональне**, якщо існують цілі числа m і n , такі що $n \neq 0$ і $q = \frac{m}{n}$. **Множина раціональних чисел** позначається буквою Q . Якщо

дано два раціональних числа p і q , то арифметичні операції з ними визначаються так: $p + q = \frac{ad + bc}{bd}$, $p - q = \frac{ad - bc}{bd}$, $p \cdot q = \frac{ac}{bd}$, $p : q = \frac{ad}{bc}$, де a, b, c, d — будь-які чис-

ла, такі що $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$. Окрім того, в означенні операції ділення передбачається,

що $q \neq 0$. Якщо дано раціональні числа $p = \frac{a}{b}$ і $q = \frac{c}{d}$, то $p < q$ тоді і тільки тоді, коли $ad < bc$. У цьому разі можна довести також, що результат порівняння чисел p і q

не залежить від вибору цілих чисел a, b, c, d , таких що $p = \frac{a}{b}$ і $q = \frac{c}{d}$.

1.1-4. Раціональні (Q) та дійсні (R) числа, їх запис у вигляді десяткового дробу

Чіткого означення раціональних чисел у шкільному курсі немає. Проте залишається інший (аксіоматичний) шлях побудови множини R раціональних чисел. У цьому разі припускається відомим, що таке *натуральне* число; далі без означення впроваджується термін «раціональне число» і формулюються *властивості* раціональних чисел (тобто аксіом, які дають, власне кажучи, «непряме означення» множини раціональних чисел). Далі наводиться перелік основних властивостей множини раціональних чисел.

Множина Q усіх раціональних чисел має такі чотири групи властивостей.

1. Для будь-яких двох раціональних чисел a, b визначено їхню *суму* $a + b$. Операція взяття суми — *додавання* — комутативна та асоціативна, тобто для будь-яких раціональних чисел a, b, c справджуються співвідношення $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$. Існує таке число 0 (нуль), що $a + 0 = a$ для будь-якого раціонального числа a .

Для будь-яких двох раціональних чисел a, b знайдеться, і притому тільки одне, раціональне число, що є коренем рівняння $b + x = a$; це число називається *різницею* чисел a та b і позначається $a - b$, а операція взяття різниці називається *відніманням*. Різницю $0 - a$ позначають також просто $-a$.

2. У множині Q раціональних чисел містяться всі натуральні числа. Раціональні числа, які можна подати у вигляді різниці двох натуральних чисел, називаються *цілими числами*.

3. Для будь-яких двох раціональних чисел a, b визначено їхній *добуток* ab . *Множення* (операція взяття добутку) комутативне, асоціативне і дистрибутивне: $ab = ba$, $(ab)c = a(bc)$, $a(b + c) = ab + ac$. Для будь-якого раціонального числа a справджується співвідношення $1 \cdot a = a$.

Для будь-яких двох раціональних чисел a, b , з яких b відмінне від нуля, знайдеться, і притому тільки одне, раціональне число, що є розв'язком рівняння $b x = a$; це число називається *часткою* чисел a та b і позначається $\frac{a}{b}$, а операція знаходження частки називається *діленням*.

4. Будь-яке раціональне число подається у вигляді частки $\frac{a}{b}$ деяких двох цілих чисел a, b (де $b \neq 0$).

Можна довести (проте це виходить за рамки шкільної програми), що *ці чотири групи властивостей повністю характеризують множину Q всіх раціональних чисел*. Інакше кажучи, вимогу щодо виконання цих властивостей можна вважати *означенням* множини Q всіх раціональних чисел (якщо властивості натуральних чисел вважати відомими). Звідси, зокрема, випливає, що будь-яке твердження, що стосується раціональних чисел, може бути *доведене* на підставі цих чотирьох груп властивостей.

Отже, на запитання про те, які числа називаються раціональними, правильна відповідь така: раціональними називаються числа, яким притаманні розглянуті щойно чотири групи властивостей.

Ця коротка відповідь визнається правильною, коли, звичайно, абітурієнт розуміє, що у множині всіх раціональних чисел здійсненні чотири арифметичні дії, котрі мають зазначені властивості.

Число, яке не є раціональним (тобто його не можна подати у вигляді відношення цілих чисел), називають *ірраціональним*. *Множиною R дійсних чисел* називається множина всіх раціональних та ірраціональних чисел.

Кожне дійсне число можна подати у вигляді десяткового дробу (скінченного або нескінченного). При цьому дріб буде періодичним тоді і тільки тоді, коли подане ним число раціональне.

1.1-5. Зображення чисел на прямій. Модуль числа, його геометричний зміст

Для того щоб зобразити числа на прямій l , на ній вибирають довільну точку O , яка зображатиме нуль. Якщо дано додатне число r , то воно зображується такою точкою A на прямій l , яка міститься праворуч від точки O (увага! Тут «праворуч» — неозначуване поняття), причому довжина відрізка OA дорівнює r . Якщо r — від'ємне число, то воно зображується на прямій l такою точкою A , що міститься ліворуч від точки O (звичайно ж, поняття «ліворуч» належить до первісних, тобто до неозначуваних понять), і довжина відрізка OA дорівнює $-r$. Нагадаємо, що **довжина відрізка** описується так. Нехай еталоном одиниці вимірювання взято деякий відрізок MN . Тоді кожному відрізку AB можна поставити у відповідність число $|AB|$ — його довжину. При цьому виконуються такі властивості: 1) довжина будь-якого відрізка є додатним числом; 2) рівні відрізки мають рівні довжини; 3) якщо точка C лежить на відрізку AB , то довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин відрізків AC і BC ; 4) довжина відрізка MN дорівнює 1.

Якщо a — довільне число, то

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Число $|a|$ називається **модулем** (або **абсолютною величиною**) числа a . Геометричний зміст модуля полягає в тому, що $|a|$ є відстань на числовій осі від числа a до нуля.

1.1-6. Числові вирази. Вирази зі змінними

Скінченна послідовність символів, які є або числами, або знаками арифметичних операцій, або дужками, називається **числовим виразом**. Якщо в цій послідовності присутні і змінні, то маємо **вираз зі змінними**. Вирази можуть мати зміст (смісл), а можуть і не мати його. Наприклад, вираз $5 + + \times () (7x$ не має змісту, тоді як вираз $x^2 + \frac{7-7+4 \cdot y}{5-6}$ цілком змістовний. Означення того, що означає фраза «вираз має зміст (смісл)», не входить до шкільної програми.

1.1-7. Степінь з натуральним і раціональним показником. Арифметичний корінь

Якщо n — натуральне число і a — дійсне число, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$. Якщо m і n на-

туральні числа, то $a^{\frac{m}{n}}$ є за означенням число $\sqrt[n]{a^m}$. Отже, для додатних раціональних чисел відповідний **раціональний степінь** визначено. Якщо p — від'ємне раціональне число, то $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Нарешті, $a^0 = 1$ для будь-якого $a > 0$. Взагалі, коли розглядаються раціональні, а тим більше довільні дійсні степені даного числа a , потрібно припускати, що $a > 0$. При цьому дещо втрачається. Зрозуміло ж, наприклад, як визначити $\sqrt[3]{-8}$. Але вже цілком неможливо уявити собі, як визначити $(-8)^{\sqrt{2}}$ або 0^0 . Через це, як тільки зайде мова про нецілі степені числа, зауважуйте, що це число має бути додатним.

Якщо $a \geq 0$, то число $\sqrt[n]{a}$, яке називається **арифметичним коренем n -го степеня з a** , є таке невід'ємне число b , що $b^n = a$. Пам'ятайте, що тут може бути задане «єхидне» додаткове запитання: «Чи єдине таке число b ?» Бо інакше означення арифметичного кореня не має смислу. Таке число, зрозуміло, єдине. Спробуйте самі це довести.

1.1-8. Логарифми, їхні властивості

Нехай $a > 0, b > 0, a \neq 0$. Тоді $\log_a b$ є таке число c , що $a^c = b$. Можна записати це означення і так: $a^{\log_a b} = b$ (*), $a > 0, b > 0, a \neq 1$. Формулу (*) часто називають іще *основною логарифмічною тотожністю*. Корисно пам'ятати, що це означення *логарифма*.

Шкільними методами цілком неможливо довести ні існування, ні єдиність логарифма, отож просто майте на увазі, що означення коректне, тобто для будь-яких $a > 0, b > 0, a \neq 0$ число $\log_a b$ існує і єдине. Ось найпростіші властивості логарифмів: 1) для будь-якого $a > 0, a \neq 0$ виконується співвідношення $\log_a 1 = 0$; 2) для будь-якого $a > 0, a \neq 1$ виконується співвідношення $\log_a a = 1$; 3) логарифм добутку двох додатних чисел при даній основі дорівнює сумі логарифмів цих чисел при тій самій основі, тобто для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, x_1 > 0, x_2 > 0$ виконується спів-

відношення $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$; 4) логарифм частки двох додатних чисел при даній основі дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника при тій самій основі, тобто для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, x_1 > 0, x_2 > 0$ виконується співвідношення $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$; 5) для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, x > 0$ і будь-якого дійсного числа α виконується співвідношення $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$; 6) для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0$ виконується співвідношення $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$; 7) для

будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ виконується співвідношення $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (число $\frac{1}{\log_b a}$ в цьому співвідношенні називається *модулем переходу*); 8) для будь-

яких чисел $a > 0, a \neq 1, x > 0, \alpha \neq 0$ виконується співвідношення $\log_a x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$;

9) для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ виконується співвідношення $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; 10) якщо основу і число, що міститься під знаком логарифма, піднести до одного і того самого степеня, відмінного від нуля, то логарифм не зміниться, тобто для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, x > 0, \alpha \neq 0$ виконується співвідношення $\log_a x^\alpha = \log_a x$; 11) для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$ виконується спів-

відношення $\log_a (x^{2n}) = 2n \log_a |x|$; 12) для будь-яких чисел $a \neq 0, x > 0, n \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення $\log_a x = \frac{1}{2n} \log_{|a|} x$; 13) для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, x > 0$

виконується співвідношення $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

1.1-9. Одночлен і многочлен. Дії з ними.

Формули скороченого множення

Вираз виду $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, де a — довільне число, x_1, x_2, \dots, x_n — змінні, k_1, k_2, \dots, k_n — натуральні числа, називається *одночленом*. *Стандартним виглядом одночлена* називається добуток, складений із числового множника (коефіцієн-

та) і степенів різних змінних. Наприклад, -2 , a , 5^4 , y^3 , $-8a^3x^2$, $\frac{3}{5}a$ — одночлени стандартного вигляду. **Степенем одночлена стандартного вигляду** називається сума показників степенів змінних. Наприклад, $8x^4y^2$ — одночлен шостого степеня, степінь одночлена $3x$ дорівнює одиниці, а степінь одночлена 5 дорівнює нулю. Одночлени, що різняться тільки числовим коефіцієнтом або рівні між собою, називаються **подібними**.

Многочленом називається алгебраїчна сума одночленів. Якщо у многочлені всі одночлени записані у стандартному вигляді і зведені подібні члени, то здобутий многочлен називається **многочленом стандартного вигляду**. Наприклад, $2x^2a^3 + 1,8xa^4 - 3a + 7$ — многочлен стандартного вигляду.

Степенем многочлена стандартного вигляду називається найбільший степінь одночлена, який входить до цього многочлена. Наприклад, $1 + 2x^2 - 5x^2y^3$ — многочлен п'ятого степеня. Суму подібних членів можна замінити одним членом, додавши їхні коефіцієнти і залишивши ту саму буквену частину. Таке тотожне перетворення многочленів називають **зведенням подібних членів**. Наприклад, у многочлені $5ab^2c^3 + 6ab^2c^3 - ab$ члени $5ab^2c^3$ і $6ab^2c^3$ будуть подібними доданками, оскільки вони мають одну й ту саму буквену частину.

Одночлени і многочлени можна додавати, віднімати, множити і ділити. **Щоб помножити многочлен на одночлен, достатньо кожний член многочлена помножити на одночлен і знайдені добутки додати.** Ділення многочлена на одночлен виконується за аналогічним правилом. **Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого і знайдені добутки додати.** Наприклад, $5x(x-y) + (2x+y)(x-y) = 5x^2 - 5xy + 2x^2 - 2xy + xy - y^2 = 7x^2 - 6xy - y^2$.

А ось **формули скороченого множення**:

1. $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$. Записавши цю формулу справа наліво, дістанемо $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, тобто **різниця квадратів** двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і їхньої суми. Наприклад, $49x^2 - 9y^2 = (7x)^2 - (3y)^2 = (7x-3y)(7x+3y)$.

2. $(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$. Цю тотожність називають **формулою квадрата суми**. Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу. Наприклад, $(5+3x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 + 30x + 9x^2$.

3. $(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$. Цю тотожність називають **формулою квадрата різниці**. Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу. Наприклад, $(5-3x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$.

4. $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$. Записавши цю формулу справа наліво, дістанемо $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, тобто **сума кубів** двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їхньої різниці. Наприклад, $27a^3 + 8 = (3a)^3 + 2^3 = (3a+2)(9a^2 - 6a + 4)$.

5. $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$. Записавши цю формулу справа наліво, дістанемо $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$, тобто **різниця кубів** двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їхньої суми. Наприклад, $8 - y^3 = (2-y)(4+2y+y^2)$.

6. $(a+x)^3 = (a+x)(a+x)(a+x) = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$. Цю тотожність називають **кубом суми**.

7. $(a-x)^3 = (a-x)(a-x)(a-x) = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$. Цю тотожність називають *кубом різниці*.

8. $(a+x+y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + 2xy$.

9. $(a-x-y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2xy$.

Дві останні тотожності називають *квадратом тричлена*.

1.1-10. Многочлен з однією змінною.

Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена)

Многочлен зі змінною x степеня n є вираз виду $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (*), де a_0, a_1, \dots, a_n — довільні числа.

Якщо $n = 2$, то многочлен називається *квадратним тричленом*. Число p називається *коренем многочлена* (*), якщо $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$. Отже, вираз (*) має перетворюватися на нуль у результаті підставлення в нього числа p замість x . Як правило, квадратний тричлен записують у вигляді $ax^2 + bx + c$. Відповідно, число p є *коренем квадратного тричлена*, якщо $ap^2 + bp + c = 0$.

1.1-11. Поняття функції. Способи задання функції.

Область визначення, область значень функції.

Функція, обернена до даної

Говорять, що визначено деяку функцію y , якщо, по-перше, задано деяку множину X , яку називають *областю визначення функції*, по-друге, задано деяку множину Y , яку називають *областю значень функції*, і, по-третє, вказано певне правило f , за допомогою якого кожному елементу x , взятому з області визначення X , ставиться у відповідність деякий єдиний елемент y з області значень Y . При цьому записують: $y = f(x)$, де x — незалежна змінна, або аргумент, а змінна y — залежна змінна. Значення y , які відповідають заданому значенню x , називають *значеннями функції*. Існує три основних способи задавання числових функцій (тобто таких функцій, що $X \subset \mathbb{R}$ і $Y \subset \mathbb{R}$).

Перший спосіб — *задавання аналітичне* у вигляді формули $y = f(x)$, де змінна x — елемент множини значень аргументу, а змінна y — відповідне значення функції. Наприклад, формула $y = x^2$ визначає деяку функцію, де кожному значенню змінної x , взятому з області визначення функції, відповідає єдине значення змінної $y = x^2$.

Другий спосіб — *табличний*. У таблиці явно подаються числа $f(x)$ для вибраних чисел x . За таким принципом побудовано, наприклад, таблиці логарифмів, таблиці значень тригонометричних функцій і т. д.

Третій спосіб — *задавання за допомогою графіка*. Якщо функцію задано графіком на координатній площині, для кожного (допустимого) значення аргументу x легко можна визначити відповідне значення функції. Для цього досить поставити у відповідній точці осі абсцис перпендикуляр до неї і продовжити його до перетину з графіком. Ордината точки перетину і дає шукане значення функції $f(x)$.

Згадаємо ще *словесний спосіб*. Цей спосіб полягає в тому, що функціональна залежність виражається словами. Наприклад, функція $E(x)$ — «ціла частина числа x ». Взагалі через $E(x) = [x]$ позначають найбільше з цілих чисел, які не перевищують x . Іншими словами, якщо $x = n + r$, де n — ціле число (може бути і від'ємним) і $0 \leq r < 1$, то $[x] = n$. Функція $E(x) = [x]$ стала на проміжку $[n; n+1)$. На цьому проміжку $[x] = n$. (E — початкова буква французького слова entier, що означає «цілий»).

Читається функція $y = E(x)$ так: «Грек дорівнює антье від ікс».) $E(2, 3) = 2$, $E(-\pi) = -4$.

Усі значення, яких набуває незалежна змінна, утворюють **область визначення функції**; усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції**. Застосовують такі позначення: $D(f)$ — область визначення функції, $E(f)$ — область значень функції, $f(x_0)$ — значення функції в точці x_0 . Якщо $D(f) \subset \mathbf{R}$ і $E(f) \subset \mathbf{R}$, то функцію називають **числовою**. Елементи множини $D(f)$ також називають **значеннями аргументу**, а відповідні їм елементи $E(f)$ — **значеннями функції**. Якщо функцію задано формулою і область визначення функції не вказано, то вважають, що область визначення складається з усіх значень незалежної змінної, при яких ця формула має сенс.

Функція $y = f(x)$ називається **оборотною**, якщо вона набуває кожного свого значення єдиний раз. Нехай f — відображення множини E на множину M . Якщо для будь-якого елемента y із множини M існує єдиний елемент $x = g(y)$ множини E , для якого $f(x) = y$, то відображення f називається **оборотним**. Відображення, обернене до f , позначають f^{-1} і називають **оберненою функцією**. Функція $y = f(x)$ при цьому називається **прямою функцією**. Область визначення оберненої функції f^{-1} є областю значень функції f , а область значень f^{-1} є областю визначення функції f . Функції $y = f(x)$ і $x = f^{-1}(y)$ називаються **взаємно оберненими**. Ці функції мають такі властивості: $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$. Для того щоб деяка функція мала обернену, необхідно і достатньо, щоб різним значенням аргументу з області її визначення відповідали різні значення функції. Отже, щоб довести, що якась функція необоротна, досить вказати які-небудь два значення аргументу $x_1 \neq x_2$, для яких $f(x_1) = f(x_2)$.

1.1-12. Графік функції. Зростання і спадання функції, періодичність, парність, непарність

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції, тобто координати яких задовольняють дане рівняння.

Функція $f(x)$ називається **зростаючою на даному числовому проміжку** X , якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає більше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких x_1 та x_2 з проміжку X , таких що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція називається **спадною на числовому проміжку** X , якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає менше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких x_1 та x_2 з проміжку X , таких що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Функція, тільки зростаюча або тільки спадна на даному числовому проміжку, називається **монотонною на цьому проміжку**.

Функція $f(x)$ називається **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що при будь-якому x із області визначення функції числа $x - T$ та $x + T$ також належать цій області і виконується рівність $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. У цьому разі число T називається **періодом функції** $f(x)$.

Якщо T — період функції, то Tk , де $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, — також період функції. Отже, **усяка періодична функція має нескінченну множину періодів**.

Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо вона має такі дві властивості: 1) область визначення цієї функції симетрична відносно точки 0 (тобто якщо точка

a належить області визначення, то точка $-a$ також належить області визначення);
2) для будь-якого значення x , що належить області визначення цієї функції, виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо:

- 1) область визначення цієї функції симетрична відносно точки 0;
- 2) для будь-якого значення x , що належить області визначення цієї функції, виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Зауважимо, що не всяка функція є парною або непарною. Існують функції не парні і не непарні. Такими, наприклад, є функції $y = 12x + 1$, $y = x^4 + x$, $y = (x+3)^2$.

1.1-13. Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку.

Поняття екстремуму функції.

Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма).

Достатня умова екстремуму.

Найбільше і найменше значення функції на проміжку

Якщо функція $f(x)$ має додатну похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона зростає на цьому інтервалі. Якщо функція $f(x)$ має від'ємну похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона спадає на цьому інтервалі. Зауважимо також, що коли функція $f(x)$ монотонна на інтервалі $(a; b)$ і неперервна в точках a та b , то вона монотонна і на відрізку $[a; b]$.

Внутрішні точки області визначення функції, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними**.

Точка x_0 з області визначення функції називається **точкою локального мінімуму цієї функції**, якщо знайдеться δ -окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , такий що для всіх $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається **точкою локального максимуму цієї функції**, якщо знайдеться такий δ -окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , що для всіх $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Точки локального мінімуму та локального максимуму називаються **точками локального екстремуму даної функції**, а значення функції в цих точках відповідно **локальним мінімумом** та **локальним максимумом функції** (або її **локальним екстремумом**).

Теорема Ферма стверджує, що коли точка x_0 є точкою локального екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$. Наприклад, функція $f(x) = x^2 - 2x + 1$ в точці $x = 1$ має мінімум, а отже, за теоремою Ферма похідна функції в цій точці дорівнює нулю: $f'(1) = 0$.

Зауважимо, що теорема Ферма виражає лише **необхідну умову існування локального екстремуму**: з того, що похідна перетворюється на нуль або не існує в даній точці x_0 , не випливає, що x_0 — точка локального екстремуму. Так, похідна функції $f(x) = x^3$ (побудуйте графік) в точці $x = 0$ дорівнює нулю: $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Проте в цій точці функція не має локального екстремуму. Аналогічно, похідна функції $f(x) = 2x + |x|$ (побудуйте графік) у точці $x = 0$ не існує. У цій точці функція не має локального екстремуму.

А тепер запишемо **достатню умову існування локального екстремуму**. Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і має похідну $f'(x)$ в деякому околі $(a; b)$ цієї точки. Тоді: 1) якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; x_0)$ і $f'(x_0) > 0$ на інтервалі

$(x_0; b)$ (тобто похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс»), то x_0 — точка локального мінімуму функції $f(x)$; 2) якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; x_0)$ і $f'(x_0) < 0$ на інтервалі $(x_0; b)$ (тобто похідна змінює знак з «плюса» на «мінус»), то x_0 — точка локального максимуму функції $f(x)$.

Для знаходження найменшого та найбільшого значення функції, диференційовної всередині проміжку і неперервної на його кінцях, потрібно знайти всі критичні точки функції, які лежать всередині проміжку, обчислити значення функції в цих точках і на кінцях проміжку, а після цього з усіх знайдених таким чином чисел вибрати найменше та найбільше. Значення r назвемо *найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на проміжку*, якщо знайдеться така точка x_0 з цього проміжку, що $f(x_0) = r$ і для будь-якої іншої точки x з цього проміжку $f(x) \leq r$ (відповідно, $f(x) \geq r$).

1.1-14. Означення й основні властивості функцій: лінійної $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, степеневі $y = ax^n (n \in \mathbb{Z})$, показникової $y = a^x, a > 0$, логарифмічної $y = \log_a x$, тригонометричних функцій ($y = \cos x, y = \sin x, y = \operatorname{tg} x$)

1. Функція, задана формулою $y = ax + b$, де a і b — довільні числа, називається *лінійною*. Областю визначення лінійної функції є множина R усіх дійсних чисел, оскільки вираз $ax + b$ має сенс при будь-яких значеннях x . Областю значень є R при $a \neq 0$ і одна точка при $a = 0$. Лінійна функція $y = ax + b$ є сталою при $a = 0$; при $a > 0$ вона зростає на всій числовій прямій; якщо $a < 0$, то ця функція спадає також на всій прямій. Коефіцієнт a характеризує кут, який утворює пряма $y = ax$ з додатним напрямом осі Ox , тому a називається *кутовим коефіцієнтом*. Якщо $a > 0$, то цей кут гострий; якщо $a < 0$ — тупий; якщо $a = 0$, то пряма збігається з віссю Ox . Функція $y = ax + b$ періодична (або парна) тоді і тільки тоді, коли $a = 0$. Лінійна функція непарна тоді і тільки тоді, коли $b = 0$.

2. Функція, задана формулою $y = ax^2 + bx + c$, де x, y — змінні, a, b і c — довільні числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратичною*. Якщо $a > 0$, то функція спадає на проміжку $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ і зростає на проміжку $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$. Область визначення функції — уся числова пряма, область значень — промінь $[\frac{4ac - b^2}{4a}; +\infty)$ при $a > 0$ і промінь $(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}]$ при $a < 0$. Функція парна тільки при $b = 0$; при $a \neq 0$ вона неперіодична. Має єдиний екстремум у точці $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

3. *Степенева функція* $y = ax^n$, де a — число, що не дорівнює нулеві (n — натуральне), визначена при будь-яких дійсних x . Її область значень — уся числова пряма при непарному n ; при парному n і $a > 0$ область її значень є промінь $[0; +\infty)$, а при $a < 0$ — промінь $(-\infty; 0]$. Якщо n непарне, то при $a > 0$ (відповідно, $a < 0$) ця функція зростає (відповідно, спадає) на всій числовій прямій. Якщо n парне і $a > 0$ ($a < 0$), то вона спадає (зростає) на $(-\infty; 0]$ і зростає (спадає) на $[0; +\infty)$. Якщо $a > 0$ ($a < 0$), то функція парна (непарна). При всіх a та n степенева функція неперіодична.

4. Функція $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) визначена при будь-яких $x \neq 0$. Її область значень — усі дійсні числа, що не дорівнюють нулю. При $k > 0$ ($k < 0$) ця функція зростає (спадає) на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$. Завжди неперіодична та непарна. Екстремумів не має.

5. Показникова функція $y = a^x$ (де $a > 0$) визначена при всіх x , а її область значень при $a \neq 1$ є проміжок $(0, +\infty)$. При $a = 1$ ця функція тотожно дорівнює одиниці. Якщо $a > 1$ ($0 < a < 1$), то вона зростає (спадає) на всій числовій прямій. Показникова функція не парна і не непарна, періодична тільки при $a = 1$. При $a \neq 1$ не має екстремумів.

6. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ визначена при $x > 0$. Область значень y є вся числова пряма. Якщо $a > 1$ ($0 < a < 1$), то y зростає (спадає) на всій своїй області визначення. Функція y ніколи не має періоду, не парна і не непарна. Не має точок екстремуму.

7. Функція $y = \sin x$ визначена при всіх x , область її значень — відрізок $[-1; 1]$. Функція y зростає (спадає) на всіх проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ $\left(\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]\right)$, де n може набувати будь-яких цілих значень. Будь-яке число виду $2n\pi$, $n \in Z$ є періодом функції y . У точках $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$ функція y має максимуми, а в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in Z$ — мінімуми. Синус — непарна функція.

8. Функція $y = \cos x$ визначена при всіх x , область її значень — відрізок $[-1; 1]$. Функція y зростає (спадає) на всіх проміжках виду $[\pi + 2n\pi; 2\pi + 2n\pi]$ $([2n\pi; \pi + 2n\pi])$, де $n \in Z$. Будь-яке число виду $2n\pi$, $n \in Z$, є періодом y . У точках $x = 2n\pi$, $n \in Z$ функція y має максимуми, а в точках $x = \pi + 2n\pi$, $n \in Z$ — мінімуми. Косинус — парна функція.

9. Функція $y = \operatorname{tg} x$ визначена при $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$. Її область значень — уся числова пряма. Тангенс зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ для $n \in Z$. Будь-яке число виду $n\pi$, $n \in Z$, буде періодом y . Екстремумів не має. Функція непарна.

1.1-15. Рівняння. Розв'язування рівнянь, корені рівняння. Рівносильні рівняння. Графік рівняння з двома змінними

Рівнянням з однією змінною називається вираз виду $f(x) = g(x)$, де x — змінна, а $f(x)$ і $g(x)$ — функції. Число a називається коренем (або розв'язком) рівняння, якщо $f(a) = g(a)$, тобто внаслідок підставлення в рівняння a замість x утворюється правильна рівність (тотожність). Рівнянням з n змінними ($n > 1$) називається вираз виду $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*), де x_1, x_2, \dots, x_n — змінні, а $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $g(x_1, \dots, x_n)$ — функції. Розв'язком рівняння (*) називається такий набір із n чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , що $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_1, a_2, \dots, a_n)$, тобто внаслідок

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА БІБЛІОТЕКА

Інв. № 17 691365

док підставлення в рівняння a_k замість x_k , $k=1, 2, \dots, n$, дістаємо правильну рівність (тотожність). Рівняння (з будь-якою кількістю змінних) називаються **рівносильними** (або еквівалентними), якщо множини їхніх розв'язків збігаються (зокрема, наприклад, коли обидві ці множини порожні).

Графіком рівняння з двома змінними називають множину точок координатної площини, координати яких перетворюють рівняння в правильну рівність.

1.1-16. Нерівності. Розв'язування нерівностей. Рівносильні нерівності

Нерівністю з однією змінною називається вираз виду $f(x) > g(x)$ (або $f(x) \geq g(x)$, або $f(x) < g(x)$, або $f(x) \leq g(x)$), де x — змінна, а $f(x)$ і $g(x)$ — функції. Число a називається **розв'язком нерівності**, якщо $f(a) > g(a)$ (або, відповідно, $f(a) \geq g(a)$, або $f(a) < g(a)$, або $f(a) \leq g(a)$), тобто внаслідок підставлення в нерівність a замість x утворюється правильна нерівність. **Нерівністю з n змінними** ($n > 1$) називається вираз виду $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*), де x_1, x_2, \dots, x_n — змінні, а $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функції. При цьому, зрозуміло, замість знака $>$ може стояти один зі знаків $\geq, <, \leq$. **Розв'язком нерівності** (*) називається такий набір із n чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) , що $f(a_1, a_2, \dots, a_n) > g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (між $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ повинен стояти відповідний знак нерівності), тобто внаслідок підставлення a_k замість x_k , $k=1, 2, \dots, n$, утворюється правильна нерівність.

Нерівності називаються **рівносильними** (або еквівалентними), якщо множини їхніх розв'язків збігаються (зокрема, наприклад, коли обидві ці множини порожні).

1.1-17. Системи рівнянь і системи нерівностей. Розв'язування систем. Корені системи. Рівносильні системи рівнянь

Кілька рівнянь або нерівностей, об'єднаних фігурною дужкою, називаються **системою** (рівнянь, або нерівностей, або рівнянь і нерівностей залежно від того, що об'єднується фігурною дужкою). Якщо всі рівняння і нерівності системи залежать від n ($n \geq 1$) змінних, то система називається **системою з n змінними**. **Розв'язком системи з n змінними** називається набір із n чисел, які є розв'язком кожного рівняння (або нерівності) системи. Дві системи називаються **рівносильними**, якщо множини їхніх розв'язків збігаються (зокрема, якщо обидві ці множини порожні).

1.1-18. Арифметична та геометрична прогресії. Формула n -го члена і суми n перших членів прогресії

1. **Арифметичною прогресією** називається числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, доданому до одного й того самого числа. Інакше кажучи, послідовність (a_n) — арифметична прогресія, якщо для будь-якого натурального n виконується умова $a_{n+1} = a_n + d$, де d — деяке число. З означення арифметичної прогресії випливає, що різниця між будь-яким її членом, починаючи з другого, і попереднім членом дорівнює d , тобто при будь-якому натуральному n справджується рівність $a_{n+1} - a_n = d$. Число d називають **різницею арифметичної прогресії**. Щоб задати арифметичну прогресію, досить знати її перший член і різницю.

Якщо a_1, a_2, \dots, a_n — арифметична прогресія з різницею d , то формула n -го члена арифметичної прогресії має вигляд $a_n = a_1 + d(n-1)$, а формула суми n перших членів арифметичної прогресії має вигляд $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ або $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

2. Геометричною прогресією називається послідовність відмінних від нуля чисел, в якій кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число. Інакше кажучи, послідовність (b_n) — геометрична прогресія, якщо для будь-якого натурального n виконуються умови $b_n \neq 0$ і $b_{n+1} = b_n \cdot q$, де q — деяке число. З означення геометричної прогресії випливає, що відношення будь-якого її члена, починаючи з другого, до попереднього члена дорівнює q , тобто при будь-якому натуральному n справджується рівність $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Число q називають **знаменником геометричної прогресії**. Очевидно, що знаменник геометричної прогресії відмінний від нуля. Щоб задати геометричну прогресію, досить знати її перший член і знаменник.

Якщо b_1, b_2, \dots, b_n — геометрична прогресія із знаменником q , то формула n -го члена геометричної прогресії має вигляд $b_n = b_1 q^{n-1}$, де $n \in N$, а формула суми n перших членів геометричної прогресії має вигляд $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ ($q \neq 1$), або $S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$ ($q \neq 1$).

1.1-19. Синус і косинус суми та різниці двох аргументів (формули)

Формули косинуса суми і різниці двох аргументів: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Формули синуса суми і різниці двох аргументів: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

1.1-20. Перетворення на добуток сум $\sin \alpha + \sin \beta$, $\cos \alpha + \cos \beta$

Перетворення на добуток суми $\sin \alpha + \sin \beta$. Нехай $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$. Тоді $\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y$.

Розв'язавши тепер систему рівнянь $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ відносно x і y , дістанемо

$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$. Отже, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$. Аналогічно перетворюється

на добуток сума $\cos \alpha + \cos \beta$: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

1.1-21. Означення похідної, її фізичний та геометричний зміст

Припустимо, що функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Нехай величина $\Delta x \neq 0$ така, що $x_0 + \Delta x$ належить області визначення функції $f(x)$.

Якщо існує скінченна границя відношення $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (*) при $\Delta x \rightarrow 0$, то ця границя називається **похідною функції $f(x)$ у точці x_0** і позначається $f'(x_0)$.

У тому випадку, коли границя відношення (*) при $\Delta x \rightarrow 0$ не існує, вважатимемо, що функція в точці x_0 не має похідної.

Зауважимо, що відношення (*) є відношенням приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, і тому означення похідної можна сформулювати ще й так: *похідна в даній точці — це границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Якщо похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 існує, то функція називається *диференційовною в точці*. Операцію обчислення похідної іноді називають *диференціюванням*.

Оскільки при формулюванні означення похідної використовується термін «границя», то дано точне означення границі.

Число A називають *границею функції $y = f(x)$ в точці x_0* (або при $x \rightarrow x_0$), якщо для довільної збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$, де $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, послідовність $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу A , і записують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Це перше означення границі функції, яке базується на понятті границі послідовності, тому його називають *означенням «мовою послідовностей»*, або *означенням границі за Гейне*. (Число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Якщо число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$, або змінна x_n , має границю, яка дорівнює числу x_0 .)

Друге означення границі функції називають *означенням «мовою $\varepsilon - \delta$ »*, або *означенням границі за Коші*: число A називається *границею функції в точці x_0* , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таке що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Можна показати, що ці два означення еквівалентні.

Використовуючи точне означення границі, означення похідної можна сформулювати так.

Число $f'(x_0)$ називається *похідною функції $f(x)$ у точці x_0* , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що при $|\Delta x| < \delta$ виконується нерівність:

$$\left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{або} \quad |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x| < \varepsilon |\Delta x| (**).$$

Коли похідна $f'(x_0)$ існує, нерівність (**) означає: для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке додатне число δ , що для всіх значень $x = x_0 + \Delta x$ з інтервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функцію $f(x)$ можна замінити наближенням $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, яке є лінійною функцією від x ; похибка, яка трапляється при обчисленні ординати функції $y = f(x)$ у точці x за допомогою наближеної лінійної функції, буде меншою від $\varepsilon|x - x_0|$. Поняття похідної функції в точці має локальний характер. Точний зміст цього твердження полягає в тому, що для довільного як завгодно малого додатного числа δ зміна значень функції в точках, які лежать зовні околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , не змінює значень похідної функції в точці x_0 . Справедливість твердження впливає з означення похідної.

Похідна має такий фізичний зміст: якщо точка рухається по прямій, пройдений нею шлях в момент часу t дорівнює $s(t)$, то її швидкість в момент t_0 дорівнює точно $s'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної полягає ось у чому. Якщо точка M з координатами (x_0, y_0) лежить на графіку функції $f(x)$, то тангенс кута нахилу дотичної до графіка $f(x)$, яка проходить через точку M , дорівнює $f'(x_0)$.

1.1-22. Похідні функцій $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Якщо від даної функції $f(x)$ обчислити похідну $f'(x)$ в кожній точці, то вийде нова функція, яку позначають також $f'(x)$ і називають похідною функції $f(x)$. Ось формули для обчислення найпростіших похідних: $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

1.2. Геометрія

1.2-1. Пряма, промінь, відрізок, ламана; довжина відрізка.

Кут, величина кута. Вертикальні та суміжні кути.

Паралельні прямі. Перетворення подібності та його властивості.

Відношення площ подібних фігур

Основними геометричними фігурами на площині є *точка* і *пряма*. Означення основних понять не даються, а їхні властивості виражаються в аксіомах (нагадаємо, що аксіомами називаються ті основні положення геометрії, які приймаються як вихідні. Використовуючи основні поняття і аксіоми, ми даємо означення нових понять, формулюємо і доводимо теореми і таким чином вивчаємо властивості геометричних фігур. Наведемо всі аксіоми планіметрії.

1. Кожній прямій належать принаймні дві точки.
2. Існують принаймні три точки, що не лежать на одній прямій.
3. Через будь-які дві точки проходить пряма, до того ж тільки одна.
4. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.
5. Кожна точка O прямої розбиває її на дві частини (два промені) так, що довільні дві точки одного і того самого променя лежать по один бік від точки O , а будь-які дві точки різних променів лежать по різні боки від точки O .
6. Кожна пряма a розбиває площину на дві частини (дві півплощини) так, що будь-які дві точки однієї і тієї самої півплощини лежать по один бік від прямої a , а будь-які дві точки різних півплощин лежать по різні боки від прямої a .
7. Якщо при накладанні суміщаються кінці двох відрізків, то суміщаються і самі відрізки.
8. На довільному промені від його початку можна відкласти відрізок, що дорівнює даному, і до того ж тільки один.
9. Від довільного променя у дану півплощину можна відкласти кут, що дорівнює даному нерозгорнутому куту, і до того ж тільки один.
10. Будь-який кут $\angle k$ можна сумістити накладанням з кутом $\angle h_1 k_1$, що йому дорівнює, двома способами: 1) так, що промінь h суміщається з променем h_1 , а промінь k — з променем k_1 ; 2) так, що промінь h суміщається з променем k_1 , а промінь k — з променем h_1 .
11. Будь-яка фігура дорівнює сама собі.
12. Якщо фігура Φ дорівнює фігурі Φ_1 , то фігура Φ_1 дорівнює фігурі Φ .
13. Якщо фігура Φ_1 дорівнює фігурі Φ_2 , а фігура Φ_2 дорівнює фігурі Φ_3 , то фігура Φ_1 дорівнює фігурі Φ_3 .
14. При вибраній одиниці вимірювання відрізків довжина кожного відрізка виражається додатним числом.
15. При вибраній одиниці вимірювання відрізків для довільного додатного числа існує відрізок, довжина якого виражається цим числом.
16. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Точка не має розмірів. Уявлення про точку дає слід від олівця на папері. Точки прийнято позначати великими латинськими буквами: A, B, C, D, \dots .

Пряма — одне з основних неозначуваних понять. Уявлення про пряму дає натягнута нитка. Пряма нескінченна. Прямі позначаються малими латинськими буквами: a, b, c, d, \dots . Кожна точка, що лежить на прямій, розбиває її на дві частини. Будь-яка з цих частин разом з точкою утворює промінь. Через дві точки можна провести тільки одну пряму. Дві прямі можуть перетинатися тільки в одній точці.

Променем, або *півпрямую*, називається частина прямої, обмежена з одного боку точкою. Ця точка називається *початком променя*.

Відрізком називається частина прямої, що міститься між двома різними точками на прямій.

Ламаною $A_1A_2A_3 \dots A_n$ називається фігура, що складається з точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$, які їх сполучають. При цьому точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ називаються *вершинами ламаної*, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n$ — її *ланками*.

Досить важко визначити довжину відрізка. Це можна зробити, наприклад, так.

Стверджується, що кожен відрізок має визначену (додатну) довжину, якщо:

1) вибрано так званий еталонний відрізок, про який стверджується, що його довжина дорівнює 1;

2) відрізок має довжину n (де n — натуральне число), якщо його можна розбити на n однакових відрізків, кожен з яких дорівнює еталонному;

3) відрізок має довжину $\frac{1}{n}$ (де n — натуральне число), якщо еталонний відрізок можна розбити рівно на n відрізків, що дорівнюють даному;

4) відрізок має довжину $\frac{m}{n}$ (де m і n — натуральні числа), якщо його можна розбити на m відрізків, кожен з яких має довжину $\frac{1}{n}$;

5) стверджується, що довжина одного відрізка більша (менша) за раціональне число h , якщо відрізок містить у собі інший відрізок (відповідно, лежить на іншому відрізку), довжина якого дорівнює h ;

6) відрізок l має ірраціональну довжину r , якщо для будь-яких натуральних чисел m, n, p, q з нерівності $\frac{m}{n} < r < \frac{p}{q}$ впливає, що довжина відрізка l більша, ніж

$\frac{m}{n}$ і менша, ніж $\frac{p}{q}$.

Кутом називається частина площини, обмежена двома променями (які називаються *сторонами кута*), що виходять з однієї точки, яка називається *вершиною кута*. При цьому з означення неможливо однозначно з'ясувати, яка з двох частин площини береться за кут. У кожному конкретному випадку це має бути вказано.

Величина кута — це так само важке питання, як і довжина відрізка. Визначимо спочатку, як порівнювати кути. Якщо є кути α і β , то кут α менший за кут β , якщо кут β містить кут α' з тією самою вершиною, що і β , який дорівнює куту α . І, зрозуміло, кут α більший за кут β , якщо кут β менший за кут α (нагадаємо, що поняття «менше» вже означено).

Згадаємо, що тільки кути на одиничному крузі можуть бути не меншими за 360° . Усі кути між променями на площині вважаються строго меншими за 360° . Скрізь далі замість «величина кута дорівнює» ми будемо казати, що кут дорівнює чомусь. Це може спочатку збивати з пантелику, оскільки в означенні слово «дорівнює» буде зустрічатися в двох різних значеннях — у смислі рівності двох кутів (яка колись називалась конгруе-

нтістю) і рівності кута і деякого числа градусів. Рівність кута якійсь кількості градусів є просто рівність (тобто конгруентність) деякому еталонному куту, про який стверджується, що його величина дорівнює стільком градусам. Отже:

1) кут дорівнює нулю, якщо його сторони збігаються;
2) кут дорівнює 180° , якщо його сторони різні і лежать на одній прямій (такий кут називається також розгорнутим);

3) якщо n — натуральне число, то кут α дорівнює $\left(\frac{180}{n}\right)^\circ$, якщо розгорнутий кут можна розбити на n кутів (всі вершини яких збігаються з вершиною розгорнутого), які дорівнюють α ;

4) якщо число r ірраціональне і $0 < r < 2$, то кут α дорівнює $(180r)^\circ$, якщо для будь-яких натуральних m, n, p, q з нерівності $\frac{m}{n} < r < \frac{p}{q}$ випливає, що кут α має бі-

льше, ніж $\left(180 \cdot \frac{m}{n}\right)^\circ$, але менше, ніж $\left(180 \cdot \frac{p}{q}\right)^\circ$.

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є продовженням сторін другого. Вертикальні кути рівні.

Два кути називаються *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є продовженням одна одної. Сума суміжних кутів дорівнює 180° . Кут, більший за 90° , але менший за 180° , називається *тупим*.

Гострим кутом називається такий кут, градусна міра якого менша за 90° (прямий). Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180° , то кут, суміжний з гострим, — тупий, а суміжний з тупим — гострий. Величину прямого кута іноді позначають буквою d , тобто $90^\circ = d$, тоді $180^\circ = 2d$ і т. д.

Дві прямі на площині називаються *паралельними*, якщо вони не збігаються і не перетинаються.

Перетворенням подібності з коефіцієнтом $k > 0$ називається таке перетворення φ площини, що для будь-яких її точок A і B маємо $A_1B_1 = AB \cdot k$, де $A_1 = \varphi(A)$ і $B_1 = \varphi(B)$.

Перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені в промені, відрізки у відрізки. Крім того, перетворення подібності зберігає кути між півпрямими (тобто кут між променями дорівнює куту між образами цих променів при перетворенні подібності).

Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

1.2-2. Приклади перетворення геометричних фігур, види симетрії

Приклади перетворення фігур на площині: паралельне перенесення, гомотетія, поворот навколо фіксованої точки, симетрія. При цьому паралельне перенесення вважається заданим, якщо зафіксовано дві точки A і B , такі що кожна точка M площини переходить в M' , таку що відрізки MM' і AB , а також MA і $M'B$ паралельні. Гомотетія з центром у точці O і коефіцієнтом $k > 0$ є таке перетворення площини, при якому $O \rightarrow O$, а кожна точка $M \neq O$ площини переходить у точку M' , яка лежить на промені OM , таку що $OM' = k \cdot OM$.

Поворотом навколо точки O на кут α називається таке перетворення площини, що

1) точка O переходить в O ;

2) якщо $M \neq O$ — довільна точка площини, то вона переходить в таку точку M' , що $OM = OM'$, $\angle MOM' = \alpha$ і кут MOM' утворено з тих точок, які замітає промінь OM , обертаючись навколо точки O до променя OM' проти годинникової стрілки.

Можна аналогічно визначити поворот на від'ємний кут за допомогою обертан-ня променя за годинниковою стрілкою.

На площині буває два види симетрії: симетрія відносно точки і симетрія відносно прямої. Перетворення називається симетрією відносно точки O , якщо кожна точка M площини, відмінна від O , переходить в таку точку M' , що O — середина відрізка MM' . Точка O при цьому переходить в себе. Перетворення площини називається симетрією відносно прямої l , якщо всі її точки залишаються на місці, а довільна точка M , яка не лежить на прямій l , переходить в таку точку M' , що пряма l є серединний перпендикуляр до відрізка MM' .

1.2-3. Вектори. Операції над векторами. Поняття вектора

1. Величини, які характеризуються не тільки числом, але ще й напрямом, називаються *векторними величинами*, або просто *векторами*.

2. До векторних величин належать, наприклад, швидкість, прискорення, сила і т. д.

3. Геометрично вектори зображаються напрямленими відрізками (рис. 1).

4. Напрямлений відрізок називається вектором.

5. Вектор цілком характеризується такими елементами:

а) початковою точкою («точкою прикладання»);

б) напрямом;

в) довжиною («модулем вектора»).

6. Якщо початок вектора є A , а його кінець B (рис. 1), то вектор позначається

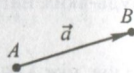


Рис. 1

символом \overrightarrow{AB} або \vec{AB} .

7. Іноді вектор позначають однією буквою напівжирного шрифту (a, b, c і т. д.) або такою самою буквою світлого шрифту з рисочкою вгорі (\vec{a}, \vec{b}), або зі стрілкою вгорі (\vec{a}, \vec{b} і т. д.).

Абсолютна величина і напрям вектора

1. Дві півпрямі називаються *однаково напрямленими*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

2. Дві півпрямі називаються *протилежно напрямленими*, якщо кожна з них однаково напрямлена з півпрямую, доповняльною до другої.

3. Вектори \vec{AB} і \vec{CD} називаються *однаково напрямленими*, якщо півпрямі AB і CD однаково напрямлені.

4. *Абсолютною величиною* (або модулем) *вектора* називається довжина відрізка, що зображає вектор. Абсолютна величина вектора \vec{a} позначається $|\vec{a}|$.

5. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

6. Початок вектора може збігатися з його кінцем. Такий вектор називається *нульовим вектором* і позначається $\vec{0}$. Про напрям вектора $\vec{0}$ не говорять. Абсолютна величина нульового вектора вважається рівною нулю.

7. З властивості паралельного перенесення випливає, що від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному вектору, і тільки один.

Координати вектора

1. Нехай деякий вектор \vec{a} , відмінний від нульового вектора, має початком точку $A_1(x_1; y_1)$, а кінцем — точку $A_2(x_2; y_2)$. *Координатами вектора* \vec{a} називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

2. Координати вектора ставлять поряд з буквеним позначенням вектора, у даному випадку \vec{a} ($a_1; a_2$). Інколи вектор позначають так: $(\vec{a}_1; \vec{a}_2)$.

3. Координати нульового вектора дорівнюють нулю: $\vec{0}$ ($0; 0$).

4. З формули, що виражає відстань між двома точками через їхні координати, виходить, що абсолютна величина вектора з координатами a_1, a_2 , дорівнює $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

5. Рівні вектори мають рівні відповідні координати. І навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Додавання і віднімання векторів

1. Сумою векторів \vec{a} ($a_1; a_2$) і \vec{b} ($b_1; b_2$) називається вектор $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, тобто $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ($a_1 + b_1; a_2 + b_2$).

2. Для будь-яких точок A, B, C виконується векторна рівність $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (правило трикутника).

3. Вектори додаються геометрично за правилом паралелограма: сума двох векторів \vec{a} і \vec{b} , які мають спільний початок, зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах (рис. 2). Позначають так: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

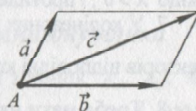


Рис. 2

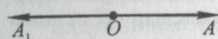


Рис. 3

4. Два вектори \vec{OA} і \vec{OA}_1 , які мають рівні довжини, але протилежні напрями, називаються *протилежними* векторами (рис. 3).

5. Якщо вектор \vec{OA}_1 протилежний вектору \vec{OA} , то $\vec{OA}_1 = -\vec{OA}$.

6. Сума протилежних векторів дорівнює нуль-вектору: $\vec{OA} + \vec{OA}_1 = \vec{OA} + (-\vec{OA}) = \vec{0}$.

7. Для векторів виконуються переставний і сполучний закони додавання: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ і $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

8. Різницю векторів \vec{a} ($a_1; a_2$) і \vec{b} ($b_1; b_2$) називається такий вектор \vec{c} ($c_1; c_2$), який в сумі з вектором \vec{b} дає вектор \vec{a} , тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 4).

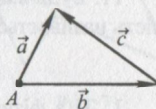


Рис. 4

Координатами вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ будуть $c_1 = a_1 - b_1, c_2 = a_2 - b_2$.

9. Щоб побудувати вектор, що дорівнює різниці векторів \vec{a} і \vec{b} , потрібно за допомогою паралельного перенесення сумістити їх початки, тоді вектор \vec{c} , початок якого збігається з кінцем вектора \vec{b} , а кінець — з кінцем вектора \vec{a} , і буде різницею векторів \vec{a} і \vec{b} , тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB} = \vec{c}$.

Множення вектора на число

1. Добуток вектора $(\vec{a}_1; \vec{a}_2)$ на число λ називається вектор $(\lambda a_1; \lambda a_2)$.

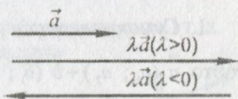
2. З означення операції множення вектора на число випливає, що для будь-якого вектора \vec{a} і чисел λ і μ справджується рівність $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

3. Для будь-яких двох векторів \vec{a} і \vec{b} і числа λ справджується рівність $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

4. Абсолютна величина вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Напрямок вектора $\lambda\vec{a}$ при $\vec{a} \neq 0$ збігається з напрямком вектора \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрямку вектора \vec{a} , якщо $\lambda < 0$.

5. Два відмінних від нуля вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

6. При множенні вектора \vec{a} на число λ маємо новий вектор \vec{c} , колінеарний з вектором \vec{a} і який має довжину



$|\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Цей вектор \vec{c} має однаковий напрям з вектором \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, і протилежний з ним напрям, якщо $\lambda < 0$ (рис. 5).

Рис. 5

7. У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні. І навпаки: якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$, то ці вектори колінеарні.

8. Треба мати на увазі, що складена пропорція з координат колінеарних векторів \vec{a} і \vec{b} втрачає зміст у разі одночасної рівності нулю або перших, або других координат цих векторів (тобто у випадках, коли обидва вектори паралельні осі ординат або осі абсцис).

9. Вектор називається *одичинним*, якщо його абсолютна величина дорівнює одиниці.

10. Одичинні вектори, напрями яких збігаються з напрямками додатних координатних півосей, називаються *координатними векторами*, або *ортами*. Вони, як правило, позначаються $\vec{e}_1(1; 0)$ і $\vec{e}_2(0; 1)$.

11. Будь-який вектор $\vec{a}(a_1; a_2)$ можна подати у вигляді $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Ця рівність називається *розкладом вектора за осями координат* (або за ортами).

Скалярний добуток векторів

1. Ті з фізичних величин, які за вибраної системи одиниць характеризуються тільки числом, мають назву *скалярних*. Наприклад, густина, маса тіла, його температура, електричний заряд і т. д. — скалярні величини.

2. Кутом між будь-якими двома векторами \vec{a} і \vec{b} називається кут між рівними їм векторами зі спільним початком.

3. Кут між векторами, як і кут між променями, може набувати значень від 0° до 180° . Кут між співнапрямленими векторами дорівнює 0° , а кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° .

4. Якщо кут між векторами \vec{a} і \vec{c} дорівнює 90° , то вектори \vec{a} і \vec{c} називаються перпендикулярними (або ортогональними).

5. Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ називається число $a_1b_1 + a_2b_2$.

6. Скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} дорівнює добутку їхніх абсолютних величин на косинус кута α між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$.

7. Скалярний добуток векторів додатний, якщо кут між ними гострий.
8. Скалярний добуток від'ємний, якщо кут між векторами тупий.
9. Якщо кут між векторами дорівнює 90° (тобто косинус кута дорівнює нулю), то скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.
10. Правильне й обернене твердження: якщо скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори перпендикулярні.
11. Властивості скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2; \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}); (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}.$$

12. Нехай $\vec{a} (a_1; a_2)$, $\vec{b} (b_1; b_2)$, тоді косинус кута α між цими векторами обчислюється за формулою

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

1.2-4. Многокутник. Вершини, сторони, діагоналі многокутника

1. Ламаною $A_1 A_2 A_3 \dots A_k$ називається фігура, яка складається з точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ і відрізків $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k-1} A_k$ що їх сполучають. Точки A_1, A_2, \dots, A_k називаються *вершинами* ламаної, а відрізки $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k-1} A_k$ — *ланками* ламаної.

2. Довжиною ламаної називається сума довжин її ланок.

3. Довжина ламаної не менша від довжини відрізка, що сполучає її кінці.

4. Ламана називається *простою*, якщо вона не має самоперетинів.

5. Ламана називається *замкненою*, якщо у неї кінці збігаються.

6. Проста замкнена ламана називається *многокутником*, якщо її сусідні ланки не лежать на одній прямій.

7. Многокутник називається *опуклим*, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону (рис. 6).

8. На рис. 7 многокутник неопуклий.

9. Вершини ламаної називаються *вершинами многокутника*, а її ланки — його *сторонами*. Діагоналями многокутника називаються відрізки, що сполучають вершини многокутника, які не є сусідніми.

10. *Кутом опуклого многокутника при даній вершині* називається кут, утворений його сторонами, які виходять з цієї вершини.

11. *Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині* називається кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника при цій вершині.

12. Сума всіх внутрішніх кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ(n-2)$, а зовнішніх, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

13. Опуклий многокутник називається *правильним*, якщо в нього всі сторони рівні і всі кути рівні. На рис. 8 зображено правильний шестикутник.

14. Відрізок OM називається *апофемою* правильного многокутника $ABCDEF$ (O — центр многокутника і $OM \perp AF$, рис. 9).

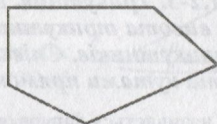


Рис. 6

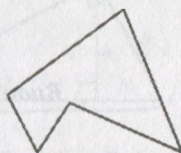


Рис. 7

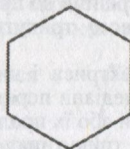


Рис. 8

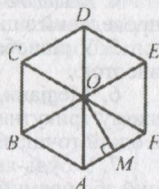


Рис. 9

15. Многокутник називається *вписаним* в коло, якщо всі його вершини лежать на колі. У цьому випадку також кажуть: «Коло, описане навколо многокутника» (рис. 10).

16. Многокутник називається *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола. У цьому випадку також кажуть: «Коло, вписане в многокутник» (рис. 11).

17. Якщо чотирикутник описано навколо кола, то суми протилежних сторін рівні між собою.

18. Якщо чотирикутник вписано в коло, то сума протилежних кутів дорівнює 180° .

19. Радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола для правильного многокутника зі стороною a і кількістю сторін n визначаються так:

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

20. Для правильного (рівностороннього) трикутника $R = \frac{a}{\sqrt{3}}, r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

21. Для правильного чотирикутника (квадрата) $R = \frac{a}{\sqrt{2}}, r = \frac{a}{2}$.

22. Для правильного шестикутника $R \leq a, r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

23. *Плоским многокутником* називається частина площини, обмежена многокутником.

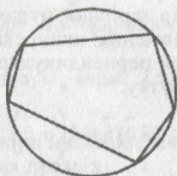


Рис. 10

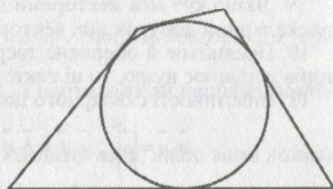


Рис. 11

1.2-5. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості.

Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника

1. *Трикутником* називається фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. Точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки — *сторонами*.

2. *Медіаною трикутника*, проведеною з даної вершини, називається відрізок, який сполучає цю вершину з серединою протилежної сторони трикутника.

3. *Бісектрисою трикутника*, проведеною з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні.

4. *Висотою трикутника*, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, проведений з цієї вершини до прямої, яка містить протилежну сторону трикутника.

5. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.

6. Медіани, бісектриси і висоти трикутника мають такі властивості: у будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці; бісектриси перетинаються в одній точці; висоти або їх продовження також перетинаються в одній точці.

7. У будь-якому трикутнику або всі кути гострі, або два кути гострі, а третій тупий або прямий. Якщо всі три кути гострі, то трикутник називається *гострокутним*. Якщо один з кутів трикутника тупий, то трикутник називається *тупокутним*. Якщо один з кутів трикутника прямий, то трикутник називається *прямокутним*.

8. Нехай ABC — прямокутний трикутник з прямим кутом C і гострим кутом при вершині A , що дорівнює α (рис. 12).

Синусом кута α (позначається $\sin \alpha$) називається відношення протилежного катета BC до гіпотенузи AB : $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$, або $AB \cdot \sin \alpha = BC$.

Косинусом кута α (позначається $\cos \alpha$) називається відношення прилеглого катета AC до гіпотенузи AB : $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$, або $AB \cdot \cos \alpha = AC$.

Тангенсом кута α (позначається $\operatorname{tg} \alpha$) називається відношення протилежного катета BC до прилеглого катета AC : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$, або $AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = BC$.

Котангенсом кута α (позначається $\operatorname{ctg} \alpha$) називається відношення прилеглого катета AC до протилежного катета BC : $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AC}{BC}$, або $BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha = AC$.

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута залежать тільки від величини кута.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Використовуючи тригонометричні функції і знаючи одну зі сторін прямокутного трикутника і гострий кут, можна знайти дві інші сторони, а також гострі кути.

9. З вершини прямого кута прямокутного трикутника опущено перпендикуляр на гіпотенузу. Позначимо елементи прямокутного трикутника так (рис. 13): катети b і c , гіпотенуза a , проєкції катетів на гіпотенузу c' і b' , а також висота h . Вони зв'язані такими чотирма основними рівностями:

$b' + c' = a$ (1), $c^2 = c'a$ (2), $b^2 = b'a$ (3), $h^2 = c'b'$ (4).

Співвідношення (2), (3) і (4) можна записати відповідно так: $c = \sqrt{c'a}$ (5), $b = \sqrt{b'a}$ (6), $h = \sqrt{c'b'}$ (7).

Співвідношення (5), (6) можна сформулювати так: катет прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою і його проєкцією на гіпотенузу (рис. 13).

Співвідношення (7) сформулюється так: висота прямокутного трикутника, опущена з вершини прямого кута, є середнє пропорційне між проєкціями катетів на гіпотенузу (рис. 13).

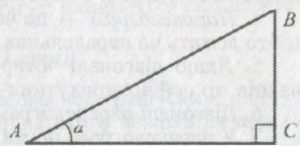


Рис. 12

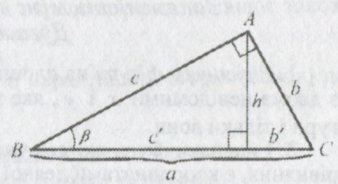


Рис. 13

1.2-6. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція

1. *Чотирикутником* називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно їх сполучають. При цьому ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, що їх сполучають, не повинні перетинатися. Дані точки називаються *вершинами* чотирикутника, а відрізки що їх сполучають — *сторонами* чотирикутника.

2. *Вершини* чотирикутника (рис. 14) називаються *сусідніми*, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. *Вершини*, що не є сусідніми, називаються *протилежними*. Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються *діагоналями*. На рис. 14 діагоналями є відрізки AC і BD .

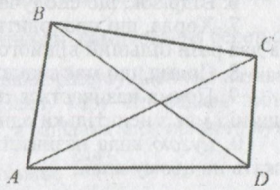


Рис. 14

3. Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються *сусідніми сторонами*. Сторони, які не мають спільного кінця, називаються *протилежними сторонами*. На рис. 14 протилежними сторонами будуть AB і CD , BC і AD .

4. *Паралелограм* — це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, тобто лежать на паралельних прямих.

5. Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

6. Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

7. У паралелограми протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.

8. *Прямокутник* — це паралелограм, в якого всі кути прямі.

9. Діагоналі прямокутника рівні.

10. *Ромб* — це паралелограм, в якого всі сторони рівні.

11. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

12. *Квадрат* — це прямокутник, в якого всі сторони рівні.

13. Квадрат є також ромбом, тому має властивості прямокутника і ромба.

14. *Трапецією* називається чотирикутник, в якого тільки дві протилежні сторони паралельні.

15. Паралельні сторони в трапеції називаються *основами трапеції*. Дві інші сторони називаються *бічними сторонами*.

16. Трапеція, в якій бічні сторони рівні, називається *рівнобічною* (рівнобедреною).

17. Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називається *середньою лінією*.

18. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.

19. У рівнобедреної трапеції кути при основі рівні.

1.1-7. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорда, січна.

Залежність між відрізками у колі. Дотична до кола.

Дуга кола. Сектор, сегмент

1. Рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається рівняння з двома невідомими x і y , яке задовольняють координати будь-якої точки цієї фігури і тільки вони.

2. І навпаки: будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

3. Рівняння кола з центром в точці $A_0(a; b)$ і радіусом R (рис. 15): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

4. Якщо центром кола є початок координат, то рівняння кола має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

5. *Колом* називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок, розміщених на даній відстані від даної точки. Дана точка називається *центром* кола, а відрізок, що сполучає центр з якою-небудь точкою кола, *радіусом* кола. З означення випливає, що всі радіуси мають одну й ту саму довжину.

6. Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається *хордою*.

7. Хорда, що проходить через центр кола, називається *діаметром*. Діаметр кола в два рази більший від його радіуса. Центр кола є серединою будь-якого діаметра.

8. Пряма, що має з колом дві спільні точки, називається *січною*.

9. Пряма називається *дотичною* до кола, якщо вона лежить з нею в одній площині і має з нею тільки одну спільну точку.

10. *Дугою* кола називається її частина, що міститься між двома точками, які лежать на цьому колі.

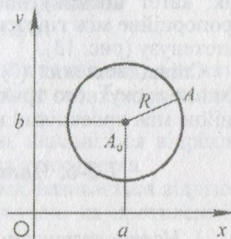


Рис. 15

11. Частина площини, обмежена колом, називається *кругом*.
12. *Сектором* називається частина круга, обмежена двома його радіусами.
13. Частина круга, обмежена хордою і дугою що її стягує, називається *сегментом*.

1.2-8. Центральні та вписані кути

1. *Центральним* кутом у колі називається кут між двома його радіусами.
2. Кутом, вписаним в коло, називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторонами є дві його хорди.

1.2-9. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, трапеції

1. Нехай a, b, c — сторони трикутника, A, B, C — протилежні їм кути, h_a, h_b, h_c — опущені на них висоти, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника, R — радіус описаного навколо нього кола і r — радіус вписаного в нього кола. Тоді його площа S може бути обчислена за допомогою таких співвідношень:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}.$$

2. Площа прямокутника дорівнює добутку його сусідніх сторін. Для визначення площі S прямокутника існує і інша формула: $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$, де α — кут між діагоналями, d — діагональ.

3. Площа паралелограма дорівнює добутку однієї з його сторін на відстань від цієї сторони до сторони, що їй паралельна. Площа паралелограма дорівнює також добутку його сусідніх сторін на синус кута між ними.

4. Площа квадрата дорівнює квадрату сторони.

5. Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її паралельних сторін (основ) на відстань між ними (тобто висоту).

1.2-10. Довжина кола та довжина дуги кола. Радіанна міра кута. Площа круга й площа сектора

1. Довжина кола може бути строго визначена тільки за допомогою поняття границі, яким школярі не володіють. Тому тут треба хитрувати. Отже, довжина кола є таке число l , що периметри правильних многокутників, вписаних в це коло, необмежено наближаються до l , коли кількість сторін цих многокутників необмежено зростає. Довжина кола може бути обчислена за формулою $l = 2\pi r$, де r — радіус кола. Тепер вже легко означити довжину дуги кола. Якщо центральний кут, що спирається на цю дугу, дорівнює α° , то довжина дуги є число $\frac{\alpha}{360} \cdot l$, де як і вище,

l — довжина всього кола.

2. Відношення довжини дуги кола l до її радіуса R називається *радiанною мірою* а цієї дуги: $a = \frac{l}{R}$ (*). При радiанному вимiрюванні кутiв за одиницю вимiрювання береться центральний кут, що спирається на дугу, довжина якої дорiвнює рiдiусу. Цей кут називається *радiаном*. З формули (*) випливає, що коло має радiанну мiру 2π радiан, тобто $360^\circ = 2\pi$. Радiанна мiра кута величиною 180° дорiвнює π , а радiанна мiра прямого кута дорiвнює $\frac{\pi}{2}$. Градусна мiра кута величиною один радiан дорiвнює $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

8. *Пірамідою* називається многогранник, який складається з плоского многокутника — *основи піраміди*, точки, що не лежить в площині основи, — *вершини піраміди* і всіх відрізків, які сполучають вершину піраміди з точками основи. На рис. 18 зображено піраміду $SABCD$, де $ABCD$ — основа, точка S — вершина. Трикутники SAB , SBC , SCD , SDA називаються *бічними гранями*. Прямі SA , SB , SC , SD називаються *бічними ребрами* піраміди. Перпендикуляр SO , опущений з вершини на основу, називається *висотою* піраміди і позначається H .

9. Перетин піраміди, що проходить через вершину і діагональ основи, називається *діагональним перетином піраміди*. Наприклад, трикутник ASC — діагональний перетин піраміди (рис. 18).

10. Піраміда називається *трикутною, чотирикутною* і т. д., якщо її основа — трикутник, чотирикутник і т. д.

11. Піраміда називається *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник, а висота її проходить через центр основи.

12. Бічні грані правильної піраміди — рівнобедрені трикутники, рівні між собою.

13. Висота бічної грані правильної піраміди називається *апофемою* піраміди.

14. Трикутна піраміда називається також *тетраедром*. Якщо всі чотири грані тетраедра — правильні трикутники, то і тетраедр називається *правильним*.

15. Якщо піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то:

— бічні ребра і висота поділяться на пропорційні частини;

— в перетині вийде многокутник, подібний до основи;

— площі перетину і основи відносяться як квадрати їхніх відстаней від вершини.

16. Якщо піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то вийде новий многогранник, який називається *зрізаною пірамідою* (рис. 19). Многокутник $ABCDE$ — нижня основа, многокутник $A_1B_1C_1D_1E_1$ — *верхня основа*.

17. Якщо в піраміді всі бічні ребра рівні, то її вершина проектується в центр вписаного в основу кола.

18. Якщо в піраміді всі двогранні кути при основі рівні, то вершина проектується в центр вписаного в основу кола.

19. *Паралелепіедом* називається призма, у якої основами є паралелограми. Паралелепіеди, як і всякі призми, можуть бути прямі і похилі.

20. З означень випливає:

— у паралелепіеда всі шість граней — паралелограми;

— у прямого паралелепіеда чотири бічні грані — прямокутники, а дві основи — паралелограми;

— у прямокутного паралелепіеда всі шість граней — прямокутники.

21. У будь-якому паралелепіеді:

— протилежні грані рівні і паралельні.

— діагоналі перетинаються в одній точці і діляться в ній навпіл.

22. Квадрат довжини діагоналі прямокутного паралелепіеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

23. Усі діагоналі прямокутного паралелепіеда рівні.

24. Прямокутний паралелепіед, у якого всі ребра рівні, називається *кубом*.

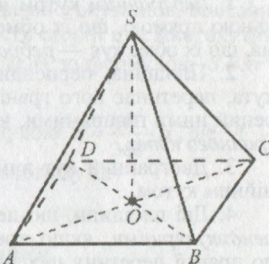


Рис. 18

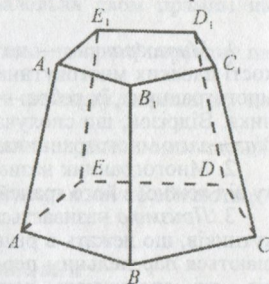


Рис. 19

1.2-16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля.

Центр, діаметр, радіус сфери й кулі. Площина, дотична до сфери

1. *Циліндром* (точніше, круговим циліндром, називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і які можна сумістити паралельним пе-

ренесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів. Круги називаються *основами циліндра*, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — *твірними циліндра*.

2. *Поверхня циліндра* складається з основ циліндра — двох рівних кругів, що лежать в паралельних площинах, і бічної поверхні.

3. Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ. (У школі розглядають тільки прямий циліндр і називають його просто циліндром).

4. *Прямий циліндр* можна розглядати як тіло, отримане при обертанні прямокутника навколо його сторони як осі (рис. 20).

5. *Радіусом* циліндра називається радіус його основи.

6. *Висотою* циліндра називається відстань між площинами основ.

7. *Віссю циліндра* називається пряма, що проходить через центри основ. Вона паралельна твірним.

8. Переріз циліндра площиною, що проходить через вісь циліндра, називається *осьовим перерізом*.

9. Циліндр, осьовий переріз якого квадрат, називається *рівностороннім*.

10. Площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

11. Площина, що проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу, який проведено через цю твірну, називається *площиною, дотичною до циліндра*.

12. *Конусом* (точніше, круговим конусом) називається тіло, яке складається з круга — *основи конуса*, точки, що не лежить в площині цього круга — *вершини конуса*, і всіх відрізків, які сполучають вершину конуса з точками основи. Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються *твірними конуса*.

13. Повна поверхня конуса складається з основ і бічної поверхні.

14. Конус називається *прямим*, якщо пряма, що сполучає вершину конуса з центром основи, перпендикулярна до площини основи. (У школі розглядають тільки прямий конус і називають його просто конусом.)

15. *Висотою конуса* називається перпендикуляр, опущений з його вершини на площину основи. У прямого конуса основа висоти збігається з центром основи.

16. *Віссю прямого конуса* називається пряма, що містить його висоту.

17. Переріз конуса площиною, що проходить через його вісь, називається *осьовим перерізом*.

18. Прямий конус можна розглядати як тіло, отримане при обертанні прямокутного трикутника навколо його катета як осі. На рис. 21 зображено прямий конус з його елементами, де:

- а) B — вершина конуса; б) $AB = BC = l$ — твірна конуса;
- в) $OB = H$ — висота, вісь конуса; г) K — основа конуса — круг;
- д) $AO = OC = R$ — радіус основи; е) AC — діаметр основи;
- є) трикутник ABC — осьовий перетин конуса; ж) $\angle AOB = 90^\circ$.

19. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає конус по колу, а бічну поверхню по колу з центром на осі конуса.

20. Площина, перпендикулярна до осі конуса, відтинає від нього менший конус. Частина що залишилася називається *зрізаним конусом*.

21. *Кулею* називається тіло, яке складається з усіх точок простору, що містяться на відстані, не більшій за дану, від даної точки. Ця точка називається *центром кулі*, а дана відстань — *радіусом кулі*.

22. Межа кулі називається *кульовою поверхнею* або *сферою*.

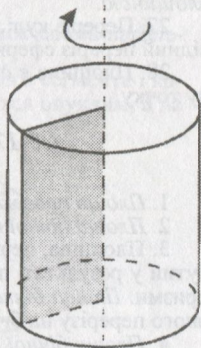


Рис. 20

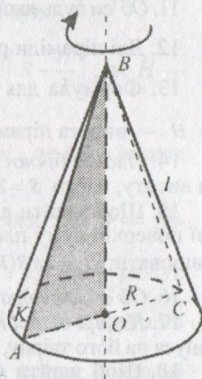


Рис. 21

23. Відрізок, що сполучає дві точки кульової поверхні і проходить через центр кулі, називається *діаметром*.

24. Куля, так само як і циліндр, конус, є тілом обертання. Вона утворюється при обертанні півкола навколо його діаметра як осі.

25. Усякий переріз кулі площиною є круг. Центр цього круга є основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

26. Площина, що проходить через центр кулі, називається *діаметральною площиною*.

27. Переріз кулі діаметральною площиною називається *великим кругом*, а відповідний переріз сфери — *великим колом*.

28. Площина є *дотичною* до *сфери*, якщо вона має з сферою тільки одну спільну точку.

1.2-17. Формули площ поверхні й об'єму призми, піраміди, циліндра, конуса

1. *Площа поверхні* призми — це сума площ всіх її граней.

2. *Площа бічної поверхні* призми — це сума площ всіх бічних граней.

3. Площина, перпендикулярна до бічного ребра призми, перетинає її грані. Здобутий у результаті перетину многокутник називається *перпендикулярним перерізом* призми. *Площа бічної поверхні* призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро.

4. *Площа бічної поверхні* прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми (на довжину бічного ребра).

5. Похила призма рівновелика такій прямій призмі, у якої основою є перпендикулярний переріз похилої призми. *Об'єм* призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

6. Бічна поверхня піраміди дорівнює сумі площ всіх її бічних граней.

7. *Площа бічної поверхні правильної піраміди* дорівнює половині добутку периметра основи на апофему.

8. *Площа повної поверхні піраміди* дорівнює сумі площі бічної поверхні і площі основи.

9. *Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди* дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему.

10. *Площа повної поверхні зрізаної піраміди* дорівнює сумі площ основ і площі бічної поверхні піраміди.

11. *Об'єм* будь-якої *піраміди* дорівнює $\frac{1}{3}$ добутку площі основи на висоту: $V = \frac{1}{3} S \cdot H$.

12. Дві піраміди рівновеликі, якщо рівновеликі їхні основи і рівні їхні висоти.

13. Формула для обчислення *об'єму зрізаної піраміди*: $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$, де H — висота піраміди, S_1 і S_2 — площі основ.

14. *Площа бічної поверхні циліндра* дорівнює довжині кола основи, помноженій на висоту, тобто $S = 2\pi RH$, де R — радіус циліндра, а H — висота.

15. Щоб знайти *площу повної поверхні циліндра*, достатньо додати до площі бічної поверхні суму площ двох основ, тому площа повної поверхні циліндра буде дорівнювати: $S_n = 2\pi R(R + H)$.

16. *Об'єм циліндра* дорівнює добутку площі його основи на висоту, тобто $V = \pi R^2 H$.

17. *Площа бічної поверхні конуса* дорівнює половині добутку довжини кола основи конуса на його твірну, тобто $S = \pi Rl$, де R — радіус основи конуса, l — твірна конуса.

18. Щоб знайти *площу повної поверхні конуса*, достатньо додати до площі його бічної поверхні додати площу основи, тобто $S = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l)$.

19. *Об'єм конуса* дорівнює $\frac{1}{3}$ добутку площі основи на висоту, тобто $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

20. Об'єм зрізаного конуса дорівнює: $V = \frac{1}{3} \pi H \cdot (R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$, де R_1 і R_2 — радіуси основ; H — висота конуса.

1.2-18. Формули об'єму кулі та її частин і формула площі сфери

1. *Кульовим сегментом* називається частина кулі, що відтинається від неї площиною (рис. 22 а, в).

2. *Кульовим шаром* називається частина кулі, що розміщена між двома паралельними площинами, які перетинають кулю (рис. 22 б).

3. *Кульовим сектором* називається тіло, яке виходить з кульового сегмента і конуса (рис. 23). Кульовий сектор, зображений на рис. 23 а називається опуклим, а на рис. 23 б — неопуклим.

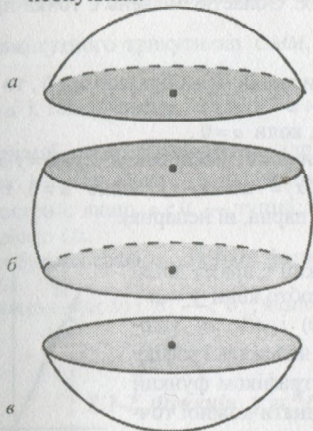


Рис. 22

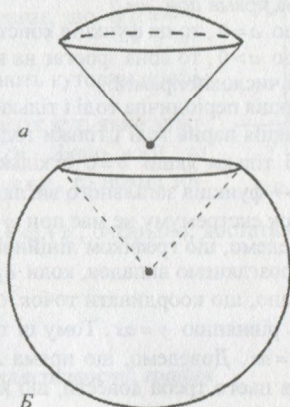


Рис. 23

4. Об'єм кулі визначається формулою $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, де R — радіус кулі.
5. Об'єм кульового сегмента визначається формулою $V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$, де H — висота кульового сегмента, R — радіус кулі.
6. Об'єм кульового сектора визначається формулою $V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$, де H — висота відповідного кульового сегмента, де R — радіус кулі.
7. Площа поверхні кулі (сфери) знаходиться за формулою $S = 4\pi R^2$, де R — радіус кулі.
8. Площа поверхні сферичного сегмента дорівнює $S = 2\pi RH$, де R — радіус сфери, а H — висота сегмента.
9. Площа сферичного шару дорівнює добутку довжини кола більшого круга на висоту шару: $S = 2\pi RH$, де R — радіус сфери; H — висота шару.
10. Площа повної поверхні кульового сектора дорівнює сумі площі поверхні кульового сегмента і площі бічної поверхні конуса.
11. Площа повної поверхні кульового сектора обчислюється за формулою $S_{\text{к.сект}} = S_{\text{сегм}} + S_{\text{біч.кон}} = 2\pi RH + \pi R \sqrt{2RH - H^2} = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$, де R — радіус кулі, H — висота сегмента.