

УДК 517.537.72

О. Ю. ЗАДОРЖНА, О. М. МУЛЯВА

ПРО СПРЯЖЕНІ АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНОГО РЯДУ
ДІРІХЛЕO. Yu. Zadorozhna, O. M. Mulyava. *On the conjugate abscissas convergence of the double Dirichlet series*, Matematychni Studii, 28 (2007) 29–36.

We consider new relations between conjugate abscissas convergence and absolute convergence of the double Dirichlet series.

О. Ю. Задорожна, О. М. Мулява. *О сопряженных абсциссах сходимости двойного ряда Дирихле* // Математичні Студії. – 2007. – Т.28, №1. – С.29–36.

Устанавливаются новые соотношения для сопряженных абсцисс сходимости и абсолютной сходимости двойных рядов Дирихле.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n^{(1)})$ і $(\lambda_m^{(2)})$ – послідовності невід'ємних чисел, $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = 0$, а

$$F(s_1, s_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1 \lambda_n^{(1)} + s_2 \lambda_m^{(2)}\}, \quad s_j = \sigma_j + it_j \quad (j \in \{1, 2\}), \quad (1)$$

– подвійний ряд Діріхле. Абсолютну збіжність ряду (1) за умови

$$\lim_{m+n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+m)}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0 \quad (2)$$

досліджував В. П. Громов ([1 - 3]). Він довів, що якщо подвійний ряд Діріхле абсолютно збіжний в околі точки $(\sigma_1^0 + it_1^0, \sigma_2^0 + it_2^0) \in \mathbb{C}^2$, то він збіжний абсолютно в області $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_1^0, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_2^0\}$. Тому ([2]), якщо B – множина всіх точок $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, які є абсциссами точок абсолютної збіжності ряду (1), і $B^0 = \operatorname{int} B$, то сукупність крайових точок множини B^0 (за умови, що ряд (1) не є абсолютно збіжний всюди в \mathbb{C}^2) утворює криву θ_a , яка розділяє \mathbb{R}^2 на дві частини; до однієї з них належать точки $(\sigma_1, \sigma_2) \in B^0$, які є абсциссами точок абсолютної збіжності ряду (1), а до іншої – точки $(\sigma_1, \sigma_2) \notin B$, які є абсциссами точок, у яких ряд (1) не є абсолютно збіжним. Крива θ_a називається ([2]) *лінією спряжених абсцисс* абсолютної збіжності ряду (1), а її координати $(\sigma_{a1}, \sigma_{a2})$ називаються *спряженими абсциссами* абсолютної збіжності цього ряду. Множина B є опуклою, а крива θ_a може бути горизонтальною або вертикальною прямою у залежності від того, чи $\sigma_{a1} = +\infty$ або $\sigma_{a2} = +\infty$. Спряжені абсцисси абсолютної збіжності функціонально залежні, тобто $\sigma_{a2} = \varphi_1(\sigma_{a1})$. В [2] доведено таку теорему.

2000 Mathematics Subject Classification: 30D15.

Теорема А. Якщо виконується умова (2), то для того щоб пара дійсних чисел $(\sigma_{a1}, \sigma_{a2})$ була парою спряжених абсцис абсолютної збіжності подвійного ряду Діріхле (1), необхідно і досить, щоб

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{nm}| + \sigma_{a1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{a2} \lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0.$$

Збіжність подвійних рядів Діріхле вивчав А. Янушаускас ([4-5]), який довів ([4]) таку теорему.

Теорема Б. Якщо ряд (1) збіжний в околі точки $(\sigma_1^0 + it_1^0, \sigma_2^0 + it_2^0) \in \mathbb{C}^2$, то він збіжний у прямому добутковій півплощині $\{s_1 : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_1^0\}$ і $\{s_2 : \operatorname{Re} s_2 < \sigma_2^0\}$, причому збіжність є рівномірною на кожному компактні з цього прямого добутку.

З теорема Б випливає, що для кожного подвійного ряду Діріхле можливі три ситуації: 1) ряд збіжний для всіх скінчених s_1 та s_2 ; 2) ряд не збігається у жодній області з \mathbb{C}^2 ; 3) ряд збіжний в області $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_{c1}, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_{c2}\}$ і не збігається у жодній області $\{(s_1, s_2) : \operatorname{Re} s_1 < \sigma_1^0, \operatorname{Re} s_2 < \sigma_2^0\}$, де або $\sigma_1^0 > \sigma_{c1}$ і $\sigma_2^0 \geq \sigma_{c2}$, або $\sigma_1^0 \geq \sigma_{c1}$ і $\sigma_2^0 > \sigma_{c2}$. Числа σ_{c1} і σ_{c2} називаються [4] спряженими абсцисами збіжності ряду (1). Безпосередньо з означення випливає, що якщо $(\sigma_{c1}^*, \sigma_{c2}^*)$ і $(\sigma_{c1}^{**}, \sigma_{c2}^{**})$ — дві пари спряжених абсцис ряду (1), то з нерівності $\sigma_{c1}^* < \sigma_{c1}^{**}$ випливає нерівність $\sigma_{c2}^* \geq \sigma_{c2}^{**}$. Тому край області збіжності ряду (1) задається рівнянням $\operatorname{Re} s_2 = \varphi_2(\operatorname{Re} s_1)$, де φ_2 — незростаюча функція, властивості якої досліджено в [5].

Зв'язки між спряженими абсцисами збіжності і абсолютної збіжності, а також зв'язки спряжених абсцис з коефіцієнтами подвійного ряду Діріхле досліджувались в [4], де встановлювались формули для абсцис збіжності, подібні до формули Валірона, встановленої для рядів Діріхле від однієї змінної ([6]).

У статті [7] отримано твердження, що містять узагальнення, як згаданої формули Валірона, так і деяких інших подібних формул, а також встановлено зв'язки абсцис збіжності з абсцисами існування максимального члена ряду Діріхле. У даній статті результати з [7] перенесемо на випадок подвійного ряду Діріхле (1).

2. Абсциси існування максимального члена. Спочатку опишемо умови, за яких існує максимальний член

$$\mu(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} : n \geq 0, m \geq 0\}$$

подвійного ряду Діріхле (5), тобто $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$. Зауважимо, що якщо $\mu(\sigma_1^0, \sigma_2^0) < +\infty$, то $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ за умов $\sigma_1 \leq \sigma_1^0$ і $\sigma_2 \leq \sigma_2^0$. Звідси випливає, що є три можливості: 1) $\mu(\sigma_1, \sigma_2) = +\infty$ для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$; 2) $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$; 3) $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $\sigma_1 < \sigma_{\mu 1}$ та $\sigma_2 < \sigma_{\mu 2}$ і $\mu(\sigma_1, \sigma_2) = +\infty$, якщо або $\sigma_1 > \sigma_{\mu 1}$ та $\sigma_2 \geq \sigma_{\mu 2}$, або $\sigma_1 \geq \sigma_{\mu 1}$ та $\sigma_2 > \sigma_{\mu 2}$. Пару $(\sigma_{\mu 1}, \sigma_{\mu 2})$ будемо називати спряженими абсцисами існування максимального члена. Зрозуміло, що у випадку їх скінченності існує функціональна залежність $\sigma_{\mu 2} = \varphi_3(\sigma_{\mu 1})$, де φ_3 — незростаюча функція, а випадку, коли $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ не для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$ і $\sigma_{\mu 1} = +\infty$, то $\sigma_{\mu 2} = \text{const}$.

Теорема 1. Пара $(\sigma_{\mu 1}, \sigma_{\mu 2})$ дійсних чисел є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{nm}| + \sigma_{\mu 1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu 2} \lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0. \quad (3)$$

Доведення. Позначимо через A ліву частину рівності (3) і припустимо, що σ_{μ_1} і σ_{μ_2} є спряженими абсцисами існування максимального члена. Тоді

$$|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \leq \mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$$

для будь-яких $\sigma_1 < \sigma_{\mu_1}$ і $\sigma_2 < \sigma_{\mu_2}$. Тому

$$A \leq \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\sigma_1, \sigma_2) + (\sigma_{\mu_1} - \sigma_1) \lambda_n^{(1)} + (\sigma_{\mu_2} - \sigma_2) \lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} \leq \max\{\sigma_{\mu_1} - \sigma_1, \sigma_{\mu_2} - \sigma_2\}$$

і з огляду на довільність $\sigma_1 < \sigma_{\mu_1}$ і $\sigma_2 < \sigma_{\mu_2}$ отримуємо нерівність $A \leq 0$.

Покажемо, що $A \geq 0$. Справді, якщо $A < 0$, то для будь-якого $\eta \in (A, 0)$ і всіх досить великих $m+n$ правильна нерівність $\ln |a_{nm}| + \sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)} \leq \eta(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})$, звідки $|a_{nm}| \exp\{(\sigma_{\mu_1} - \eta) \lambda_n^{(1)} + (\sigma_{\mu_2} - \eta) \lambda_m^{(2)}\} \leq 1$ тобто $\mu(\sigma_{\mu_1} + |\eta|, \sigma_{\mu_2} + |\eta|) < +\infty$ і σ_{μ_1} та σ_{μ_2} не є спряженими абсцисами існування максимального члена. Необхідність умови (3) доведено.

Доведемо її достатність. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $m+n$ маємо $\ln |a_{nm}| + \sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)} \leq \varepsilon(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})$, тобто $\mu(\sigma_{\mu_1} - \varepsilon, \sigma_{\mu_2} - \varepsilon) < +\infty$ і, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, отримуємо $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для будь-яких $\sigma_1 < \sigma_{\mu_1}$ та $\sigma_2 < \sigma_{\mu_2}$.

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність (\hat{n}, \hat{m}) така, що $\hat{n} + \hat{m} \rightarrow \infty$ і $\ln |a_{\hat{n}\hat{m}}| + \sigma_{\mu_1} \lambda_{\hat{n}}^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_{\hat{m}}^{(2)} \geq -(\varepsilon/2)(\lambda_{\hat{n}}^{(1)} + \lambda_{\hat{m}}^{(2)})$. Тому

$$|a_{\hat{n}\hat{m}}| \exp\{(\sigma_{\mu_1} + \varepsilon) \lambda_{\hat{n}}^{(1)} + (\sigma_{\mu_2} + \varepsilon) \lambda_{\hat{m}}^{(2)}\} \geq \exp\{(\varepsilon/3)(\lambda_{\hat{n}}^{(1)} + \lambda_{\hat{m}}^{(2)})\} \rightarrow +\infty, \quad \hat{n} + \hat{m} \rightarrow \infty,$$

тобто $\mu(\sigma_{\mu_1} + \varepsilon, \sigma_{\mu_2} + \varepsilon) = +\infty$. Завдяки довільності ε , достатність умови (3) і, отже, теорему 1 доведено. \square

Наслідок 1. Пара $(\sigma_{\mu_1}, \sigma_{\mu_2})$ невід'ємних чисел, принаймні одне з яких додатне, є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/|a_{nm}|)}{\sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)}} = 1,$$

а пара $(\sigma_{\mu_1}, \sigma_{\mu_2})$ недодатних чисел, принаймні одне з яких від'ємне, є спряженими абсцисами існування максимального члена тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{nm}|}{-(\sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)})} = 1.$$

Доведення. Зупинимось тільки на доведенні першої частини наслідку. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\min\{\sigma_{\mu_1}, \sigma_{\mu_2}\} > 0$. Рівність (3) можна подати у вигляді

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/|a_{nm}|) - (\sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)})}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0, \quad (4)$$

тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $n+m$ маємо $\ln(1/|a_{nm}|) > \sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)} - \varepsilon(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})$ і, отже,

$$\frac{\ln(1/|a_{nm}|)}{\sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)}} > 1 - \frac{\varepsilon(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})}{\sigma_{\mu_1} \lambda_n^{(1)} + \sigma_{\mu_2} \lambda_m^{(2)}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu_1}, \sigma_{\mu_2}\}},$$

а для деякої підпослідовності (\hat{n}, \hat{m}) такої, що $\hat{n} + \hat{m} \rightarrow \infty$, подібно отримуємо

$$\frac{\ln(1/|a_{\hat{n}\hat{m}}|)}{\sigma_{\mu_1}\lambda_{\hat{n}}^{(1)} + \sigma_{\mu_2}\lambda_{\hat{m}}^{(2)}} < 1 + \frac{\varepsilon(\lambda_{\hat{n}}^{(1)} + \lambda_{\hat{m}}^{(2)})}{\sigma_{\mu_1}\lambda_{\hat{n}}^{(1)} + \sigma_{\mu_2}\lambda_{\hat{m}}^{(2)}} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\min\{\sigma_{\mu_1}, \sigma_{\mu_2}\}}.$$

З огляду на довільність ε ці нерівності рівносильні до рівності (4). \square

Теорема 2. Для того щоб $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, необхідно і досить, щоб

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} \ln \frac{1}{|a_{nm}|} = +\infty. \quad (5)$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, то для кожного $\sigma > 0$ правильна нерівність $|a_{nm}| \exp\{\sigma(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\} \leq \mu(\sigma, \sigma) < +\infty$, тобто $\frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} \ln \frac{1}{|a_{nm}|} \geq \sigma + o(1)$, $n + m \rightarrow \infty$, і з огляду на довільність σ правильна рівність (5). Навпаки, з умови (5) випливає, що для кожного $\sigma > 0$ і всіх досить великих $m + n$ правильна нерівність $\frac{1}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} \ln \frac{1}{|a_{nm}|} \geq \sigma$. Тому, якщо $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, то, вибираючи $\sigma > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, маємо

$$|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(\sigma - \sigma_1)\lambda_n^{(1)} - (\sigma - \sigma_2)\lambda_m^{(2)}\} \rightarrow 0, \quad n + m \rightarrow \infty,$$

тобто $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$. Теорему 2 доведено. \square

Теорема 3. Для того щоб $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $\sigma_1 < +\infty$ і $\sigma_2 < \sigma_{\mu_2} < +\infty$, необхідно і досить, щоб для кожного $\sigma < \sigma_{\mu_2}$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/|a_{nm}|) - \sigma \lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)}} = +\infty. \quad (6)$$

Доведення. Якщо $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$ для всіх $\sigma_1 < +\infty$ і $\sigma_2 < \sigma_{\mu_2}$, то для довільних $\sigma < \sigma_{\mu_2}$ і $\sigma_1 < +\infty$ правильна нерівність

$$\frac{\ln(1/|a_{nm}|) - \sigma \lambda_m^{(2)}}{\lambda_n^{(1)}} \geq \frac{-\ln \mu(\sigma_1, \sigma)}{\lambda_n^{(1)}} + \sigma_1,$$

звідки з огляду на довільність σ_1 отримуємо (6). Навпаки, з умови (6) випливає, що для довільних $\sigma^* < +\infty$ та $\sigma < \sigma_{\mu_2}$ і всіх досить великих n та m правильна нерівність $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\sigma^* \lambda_n^{(1)} + \sigma \lambda_m^{(2)})\}$, тобто для довільних $\sigma_1 < \sigma^*$ та $\sigma_2 < \sigma$

$$|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(\sigma^* - \sigma_1)\lambda_n^{(1)} - (\sigma - \sigma_2)\lambda_m^{(2)}\} \rightarrow 0, \quad n + m \rightarrow \infty,$$

і отже, $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$. З огляду на довільність $\sigma^* < +\infty$ та $\sigma < \sigma_{\mu_2}$ теорему 3 доведено. \square

3. Зв'язок між абсцисами збіжності та існування максимального члена. Зрозуміло, що якщо ряд (1) збіжний у точці $(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)$, то $|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \rightarrow 0$ ($m + n \rightarrow \infty$) і, отже, $\mu(\sigma_1, \sigma_2) < +\infty$. Тому $\sigma_{a1} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{\mu_1}$ і $\sigma_{a2} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{\mu_2}$.

Нехай G_c, G_a відповідно області збіжності та абсолютної збіжності ряду (1), а $G_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \operatorname{Re} z, z \in G_c\}$, $G_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \operatorname{Re} z, z \in G_a\}$ їхні сліди в $\{x \in \mathbb{R}^2 : x = \operatorname{Re} z, z \in \mathbb{C}^2\}$. Через G_μ позначимо область існування максимального члена $\mu(x, F)$ ряду (1). Зрозуміло, що $G_a \subseteq G_c \subseteq G_\mu$.

З іншого боку, для $\gamma > 0$, $\{\delta, \delta_1, \delta_2\} \subset \mathbb{R}$ позначимо

$$h_1(\gamma; \delta) = \lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_{nm}| + \delta(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})}{\ln(n+m)},$$

$$h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) = \lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_{nm}| + \delta_1 \lambda_n^{(1)} + \delta_2 \lambda_m^{(2)}}{\ln n + \ln m}$$

і доведемо таку теорему.

Теорема 4. *i) Якщо $h_1(\gamma; \delta) > 2$, то $\gamma G_c \subseteq G_a + \delta e_1$, де $e_1 = (1; 1)$.*

ii) Якщо $h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) > 1$, то правильні нерівності: 1) $\sigma_{a1} \geq \gamma \sigma_{c1} - \delta_1$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma \sigma_{c2} - \delta_2$; 2) $\sigma_{a1} \geq \gamma \sigma_{\mu 1} - \delta_1$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma \sigma_{\mu 2} - \delta_2$.

Доведення. *i)* Нехай $(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \in G_c$; ряд (1)-збіжний у цій точці, тому $|a_{nm}| \exp\{\sigma_1^0 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2^0 \lambda_m^{(2)}\} \leq M$. Тобто, $(\forall \varepsilon \in (0, h_1(\gamma, \delta) - 2))$ і для всіх $m + n \geq k_0$

$$|a_{nm}| e^{(\gamma \sigma_1^0 - \delta) \lambda_n^{(1)} + (\gamma \sigma_2^0 - \delta) \lambda_m^{(2)}} = [|a_{nm}| e^{\sigma_1^0 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2^0 \lambda_m^{(2)}}]^\gamma |a_{nm}|^{1-\gamma} e^{-\delta(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})} \leq$$

$$\leq M^\gamma \exp\left\{-\frac{(\gamma-1) \ln |a_{nm}| + \delta(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})}{\ln(n+m)} \ln(n+m)\right\} < M^\gamma \exp\{-(h_1(\gamma, \delta) - \varepsilon) \ln(n+m)\}.$$

Оскільки $h_1(\gamma, \delta) - 1 - \varepsilon > 1$, то

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n+m=s} |a_{nm}| \exp\{(\gamma \sigma_1^0 - \delta) \lambda_n^{(1)} + (\gamma \sigma_2^0 - \delta) \lambda_m^{(2)}\} \leq M^\gamma \sum_{s=k_0}^{\infty} (s+1) \exp\{-(h_1(\gamma, \varepsilon) - 1) \ln s\} \leq$$

$$\leq 2M^\gamma \sum_{s=k_0}^{\infty} \exp\{-(h_1(\gamma, \delta) - 1 - \varepsilon) \ln s\} < +\infty.$$

Звідси випливає, що ряд (1) збіжний абсолютно у кожній точці з $\gamma G_c - \delta e_1$, тобто $G_a \supseteq \gamma G_c - \delta e_1$,

ii) Почнемо з твердження 1). Можемо вважати, що $\sigma_1 > -\infty$ і $\sigma_2 \geq -\infty$. Нехай $\sigma_1 < \sigma_{c1}$ і $\sigma_2 < \sigma_{c2}$. Оскільки ряд (1) збіжний у точці (σ_1, σ_2) , то $|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\} \leq M < +\infty$ для всіх n і m . Тому

$$|a_{nm}| \exp\{(\gamma \sigma_1 - \delta_1) \lambda_n^{(1)} + (\gamma \sigma_2 - \delta_2) \lambda_m^{(2)}\} =$$

$$= (|a_{nm}| \exp\{\sigma_1 \lambda_n^{(1)} + \sigma_2 \lambda_m^{(2)}\})^\gamma |a_{nm}|^{1-\gamma} \exp\{-\delta_1 \lambda_n^{(1)} - \delta_2 \lambda_m^{(2)}\} \leq$$

$$\leq M^\gamma |a_{nm}|^{1-\gamma} \exp\{-\delta_1 \lambda_n^{(1)} - \delta_2 \lambda_m^{(2)}\} =$$

$$= M^\gamma \exp\left\{-\frac{(\gamma-1) \ln |a_{nm}| + \delta_1 \lambda_n^{(1)} + \delta_2 \lambda_m^{(2)}}{\ln n + \ln m} (\ln n + \ln m)\right\} \leq$$

$$\leq M^\gamma \exp\{-(h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) - \varepsilon)(\ln n + \ln m)\}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) - 1)$ і всіх досить великих n, m . Оскільки $\sum_{n,m=1}^{\infty} nm^{-h} < +\infty$ для $h = h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) - \varepsilon > 1$, то звідси випливає, що ряд (1) абсолютно збіжний в точці $(\gamma \sigma_1 - \delta_1, \gamma \sigma_2 - \delta_2)$, тобто $\sigma_{a1} \geq \gamma \sigma_1 - \delta_1$ і $\sigma_{a2} \geq \gamma \sigma_2 - \delta_2$. З огляду на довільність чисел $\sigma_1 < \sigma_{c1}$ і $\sigma_2 < \sigma_{c2}$ твердження 1) теореми 4 доведено.

Перейдемо до доведення твердження 2). Можемо вважати, що $\sigma_{\mu 1} > -\infty$ і $\sigma_{\mu 2} > -\infty$. Припустимо спочатку, що $\sigma_{\mu 1} < +\infty$ і $\sigma_{\mu 2} < +\infty$. Тоді з (3) для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх

Перейдемо до доведення твердження 2). Можемо вважати, що $\sigma_{\mu_1} > -\infty$ і $\sigma_{\mu_2} > -\infty$. Припустимо спочатку, що $\sigma_{\mu_1} < +\infty$ і $\sigma_{\mu_2} < +\infty$. Тоді з (3) для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $n + m$ отримуємо нерівність $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\sigma_{\mu_1} - \varepsilon)\lambda_n^{(1)} - (\sigma_{\mu_2} - \varepsilon)\lambda_m^{(2)}\}$ і, як вище, маємо

$$\begin{aligned} & |a_{nm}| \exp\{(\gamma(\sigma_{\mu_1} - \varepsilon) - \delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma(\sigma_{\mu_2} - \varepsilon) - \delta_2)\lambda_m^{(2)}\} = \\ & = (|a_{nm}| \exp\{(\sigma_{\mu_1} - \varepsilon)\lambda_n^{(1)} + (\sigma_{\mu_2} - \varepsilon)\lambda_m^{(2)}\})^\gamma |a_{nm}|^{1-\gamma} \exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \\ & \leq |a_{nm}|^{1-\gamma} \exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) - \varepsilon)(\ln n + \ln m)\} \end{aligned}$$

і, отже, ряд (1) абсолютно збіжний в точці $(\gamma(\sigma_{\mu_1} - \varepsilon) - \delta_1, \gamma(\sigma_{\mu_2} - \varepsilon) - \delta_2)$, тобто $\sigma_{a_1} \geq \gamma(\sigma_{\mu_1} - \varepsilon) - \delta_1$ і $\sigma_{a_2} \geq \gamma(\sigma_{\mu_2} - \varepsilon) - \delta_2$. З огляду на довільність $\varepsilon > 0$ твердження 2) теореми 4 у випадку, коли $\sigma_{\mu_1} < +\infty$ і $\sigma_{\mu_2} < +\infty$, доведено.

Нехай тепер $\sigma_{\mu_1} = \sigma_{\mu_2} = +\infty$. За теоремою 2 правильна рівність (5), тобто $|a_{nm}| \leq \exp\{-\sigma(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\}$ для будь-якого $\sigma > 0$ і всіх досить великих $n + m$. Звідси, як вище, отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} & |a_{nm}| \exp\{(\gamma\sigma - \delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma\sigma - \delta_2)\lambda_m^{(2)}\} \leq \\ & \leq |a_{nm}|^{1-\gamma} \exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) - \varepsilon)(\ln n + \ln m)\}, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $\sigma_{a_1} \geq \gamma\sigma - \delta_1$ і $\sigma_{a_2} \geq \gamma\sigma - \delta_2$ для будь-якого $\sigma > 0$, і отже, $\sigma_{a_1} = \sigma_{a_2} = +\infty$.

Нарешті, якщо $\sigma_{\mu_1} = +\infty$ і $\sigma_{\mu_2} < \infty$, то з (6) для довільних $\sigma^* < +\infty$ та $\sigma < \sigma_{\mu_2}$ і всіх досить великих n та m маємо нерівність $|a_{nm}| \leq \exp\{-(\sigma^*\lambda_n^{(1)} + \sigma\lambda_m^{(2)})\}$. Тому, як вище, отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} & |a_{nm}| \exp\{(\gamma\sigma^* - \delta_1)\lambda_n^{(1)} + (\gamma\sigma - \delta_2)\lambda_m^{(2)}\} \leq \\ & \leq |a_{nm}|^{1-\gamma} \exp\{-\delta_1\lambda_n^{(1)} - \delta_2\lambda_m^{(2)}\} \leq \exp\{-(h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) - \varepsilon)(\ln n + \ln m)\}, \end{aligned}$$

а з неї випливає, що $\sigma_{a_1} \geq \gamma\sigma^* - \delta_1$ і $\sigma_{a_2} \geq \gamma\sigma - \delta_2$ для будь-яких $\sigma^* < +\infty$ та $\sigma < \sigma_{\mu_2}$, тобто, $\sigma_{a_1} = +\infty$ і $\sigma_{a_2} \geq \gamma\sigma_{\mu_2} - \delta_2$. Теорему 4 повністю доведено. \square

Наслідок 2. Нехай (τ_1, τ_2) — пара додатних чисел. Якщо

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \ln m}{\tau_1 \lambda_n^{(1)} + \tau_2 \lambda_m^{(2)}} \leq 1, \quad (7)$$

то $\sigma_{a_1} \geq \sigma_{c_1} - \tau_1$, $\sigma_{a_2} \geq \sigma_{c_2} - \tau_2$, $\sigma_{a_1} \geq \sigma_{\mu_1} - \tau_1$ і $\sigma_{a_2} \geq \sigma_{\mu_2} - \tau_2$.

Справді, з (7) випливає, що $\ln n + \ln m \leq (1 + \varepsilon/2)(\tau_1 \lambda_n^{(1)} + \tau_2 \lambda_m^{(2)})$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх досить великих $m + n$. Тому

$$h_2(1; (1 + \varepsilon)\tau_1, (1 + \varepsilon)\tau_2) = \overline{\lim}_{n, m \rightarrow \infty} \frac{(1 + \varepsilon)\tau_1 \lambda_n^{(1)} + (1 + \varepsilon)\tau_2 \lambda_m^{(2)}}{\ln n + \ln m} \geq \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon/2} > 1$$

і за теоремою 4 $\sigma_{a_1} \geq \sigma_{c_1} - (1 + \varepsilon)\tau_1$, $\sigma_{a_2} \geq \sigma_{c_2} - (1 + \varepsilon)\tau_2$, $\sigma_{a_1} \geq \sigma_{\mu_1} - (1 + \varepsilon)\tau_1$ і $\sigma_{a_2} \geq \sigma_{\mu_2} - (1 + \varepsilon)\tau_2$, тобто з огляду на довільність $\varepsilon > 0$ отримуємо потрібні нерівності.

Зауважимо, що якщо

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \ln m}{\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}} = 0, \quad (8)$$

то (7) виконується для будь-яких $\tau_1 > 0$ і $\tau_2 > 0$, а за наслідком 2 $\sigma_1 = \sigma_{a1} = \sigma_{\mu 1}$ і $\sigma_2 = \sigma_{a2} = \sigma_{\mu 2}$. Неважко показати, що умови (2) і (8) рівносильні і тому звідси та теореми 2 випливає теорема А.

Зауважимо також, що приклад ряду $\sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \exp\{s_1 \ln n + s_2 \ln m\}$ свідчить про точність наведених у наслідку 2 оцінок; тут $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{\mu 1} = \sigma_{\mu 2} = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$ і $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = -1$.

Наслідок 3. Якщо $\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{nm}|}{\ln n + \ln m} = h_0 > 0$, то $\sigma_{a1} \geq \sigma_{c1}(1 + 1/h_0)$, $\sigma_{a2} \geq \sigma_{c2}(1 + 1/h_0)$, $\sigma_{a1} \geq \sigma_{\mu 1}(1 + 1/h_0)$ і $\sigma_{a2} \geq \sigma_{\mu 2}(1 + 1/h_0)$.

Справді, візьмемо в теоремі 4 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ і $\gamma = 1 + 1/h_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h(\gamma; 0, 0) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{(1/h_0 + \varepsilon) \ln |a_{nm}|}{\ln n + \ln m} = 1 + \varepsilon h_0 > 1$$

і з теореми 4, завдяки довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду $\sum_{n,m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} nm \exp\{s_1 \ln n + s_2 \ln m\}$ свідчить про точність наведених у наслідку 2 оцінок; тут $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{\mu 1} = \sigma_{\mu 2} = -1$, $h_0 = 1$ і $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = -2$.

Наслідок 4. Якщо $\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/|a_{nm}|)}{\ln n + \ln m} = h^0 > 1$, то $\sigma_{a1} \geq \sigma_{c1}(1 - 1/h^0)$, $\sigma_{a2} \geq \sigma_{c2}(1 - 1/h^0)$, $\sigma_{a1} \geq \sigma_{\mu 1}(1 - 1/h^0)$ і $\sigma_{a2} \geq \sigma_{\mu 2}(1 - 1/h^0)$.

Справді, візьмемо в теоремі 4 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ і $\gamma = 1 - 1/h^0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 - 1/h^0$. Тоді

$$h(\gamma; 0, 0) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{(1/h^0 + \varepsilon) \ln(1/|a_{nm}|)}{\ln n + \ln m} = 1 + \varepsilon h^0 > 1$$

і з теореми 4, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(nm)^2} \exp\{s_1 \ln n + s_2 \ln m\}$ свідчить про точність наведених у наслідку 4 оцінок; тут $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = \sigma_{\mu 1} = \sigma_{\mu 2} = 2$, $h^0 = 2$ і $\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = 1$.

Наслідок 5. Для кожного ряду Діріхле

$$G_c \subseteq G_a + 2\tau_0 e_1$$

Справді, нехай в теоремі 1: $\gamma = 1$ і $\delta = 2\tau_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h_1(\gamma, \delta) = \lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{(2\tau_0 + \varepsilon)(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})}{\ln(n+m)} = \frac{2\tau_0 + \varepsilon}{\tau_0} > 2$$

і, отже, правильні оцінки $G_a \supseteq G_c - (2\tau_0 - \varepsilon)\ell$, тобто завдяки довільності ε маємо: $G_a \supseteq G_c - 2\tau_0 e_1$.

Справді, нехай в теоремі 1: $\delta = 0$ і $\gamma = 1 + \frac{2+\varepsilon}{h_0}$.

Тоді

$$h_1(\gamma, \delta) = \lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{2+\varepsilon}{h_0} \frac{\ln |a_{nm}|}{\ln(n+m)} \geq 2 + \varepsilon h_0 > 2$$

і, отже

$$G_a \supseteq \frac{2+\varepsilon}{h_0} G_c,$$

звідки, завдяки довільності ε , отримуємо потрібне вкладення.

Наслідок 7. Якщо

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+m)}{\ln \frac{1}{|a_{nm}|}} = h_0 \in [0, 1),$$

то $G_a \supseteq (1 - 2h_0)G_c$.

Справді, якщо в теоремі 1 вибрати $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - 2h_0 - \varepsilon$, то

$$h_1(\gamma, \delta) = \lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{(2h_0 + \varepsilon) \ln \frac{1}{|a_{nm}|}}{\ln(n+m)} = \frac{2h_0 + \varepsilon}{h_0} > 2$$

і, отже, $G_a \supseteq (1 - 2h_0 - \varepsilon)G_c$ звідки, завдяки довільності ε , отримуємо потрібне вкладення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Громов В.П. *Кратные ряды Дирихле*// Сиб. матем. журн. - 1969. - Т. 10, №3. - С. 522-536.
2. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле*// Изв. АН АрмССР. Математика. - 1970. - Т. 5, №5. - С. 449-457.
3. Громов В.П. *К теории кратных рядов Дирихле. II*// Изв. АН АрмССР. Математика. - 1972. - Т. 7, №2. - С. 90-103.
4. Янушаускас А.И. *Двойные ряды Дирихле*// Лит. матем. сб. - 1978. - Т. 13, №3. - С. 201-211.
5. Янушаускас А.И. *Свойства сопряженных абсцисс сходимости двойных рядов Дирихле*// Лит. матем. сб. - 1979. - Т. 14, №1. - С. 213-228.
6. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* - М.: Наука, 1976. - 536 с.
7. Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле*// Матем. студії. 1998. - Т. 9, №2. - С. 171-176.

Київський національний університет харчових технологій
Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет

Надійшло 16.06.2006