Циганкова Г. А.

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ В РОБОЧОМУ ЗАЗОРІ ЕЛЕКТРОДИНАМОМЕТРА.

Останнім часом у роботах різних вчених все більше уваги приділяється дослідженню різних аспектів електромагнітних процесів в дископодібних електричних машинах та інших пристроях з осьовим зазором. Дана робота присвячена вивченню електромагнітного поля в дископодібному електродинамометрі. Враховуючи складну конфігурацію магнітної системи дископодібного електродинамометра, спочатку розглянемо його спрощену модель без ротора рис. 1 .

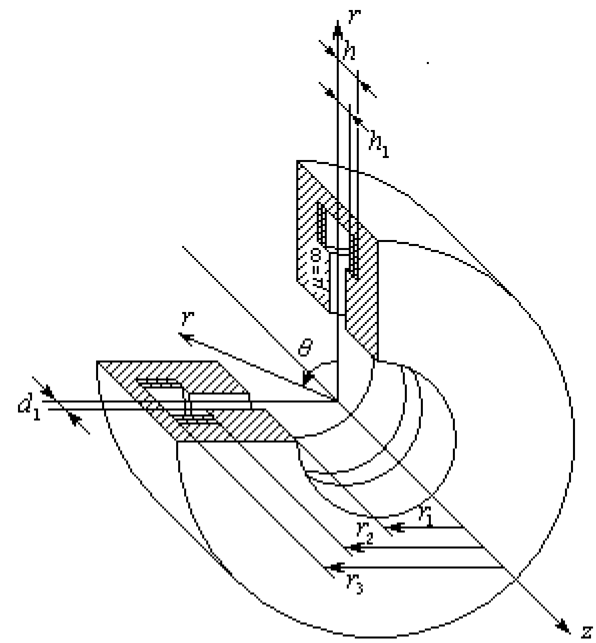

рис. 1

Ми розглянемо задачу знаходження векторного потенціалу поля з врахуванням виконання обмотки збудження із двох секцій, розділених зазором $2h_1$. Зробимо перетин дископодібного магнітопровода рис. 2 .

Оскільки густина струму δ_{cm} в обмотці збудження має лише складову в напрямку координати θ то векторний магнітний потенціал $\vec{A}$ в області, зайнятій обмоткою, має лише складову A_θ. Диференційне рівняння для векторного потенціалу в циліндричних координатах прийме вигляд:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{1}{r^2}A_\theta+\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}=-\mu\delta_{cm}\big(\eta(z-h_1)-\eta(z-h)\big)\ ,$$

де $\eta(z)$ - одинична функція.

В наслідок симетрії конструкції $\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}=0$, а рівняння приймає вигляд

$$\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}A_\theta+\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}=-\mu\delta_{cm}\big(\eta(z-h_1)-\eta(z-h)\big)$$

Позначимо в подальшому $A\equiv A_\theta;\delta\equiv\delta_{cm}$.

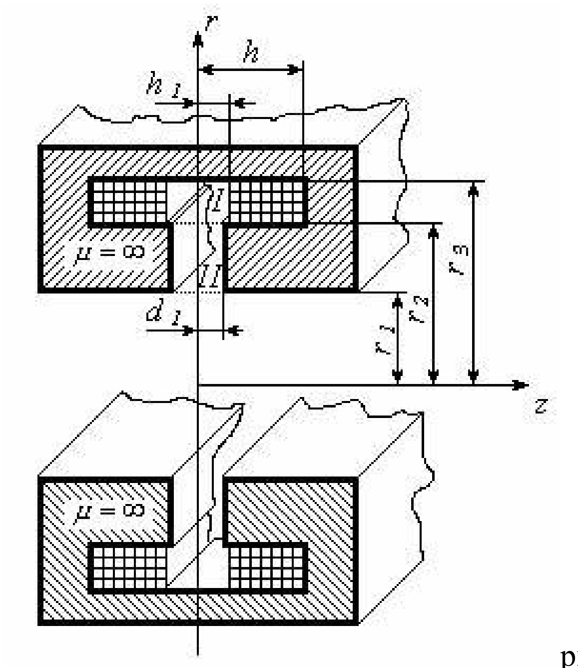

рис. 2

Для області II без струму $(\delta = 0)$ рівняння для векторного потенціалу, який має лише одну складову А, перпендикулярну площині *ROZ*, в циліндричних координатах приймає вигляд

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{r^2}A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

Векторний потенціал А шукаємо у вигляді суми добутків функцій U_n, що залежать тільки від *r*, на функції $\cos\lambda_n z$, що залежать тільки від *z*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r).\cos\lambda_n\ z \text{ , де } \lambda_n = \frac{\pi n}{d_1}$$

Підставивши векторний потенціал та його частинні похідні по *r* та по *z* у рівняння (1) , отримаємо таке рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\lambda_n z\left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2}U_n - \lambda^2{}_n U_n\right) = 0 \qquad (2)$$

або

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2}U_n - \lambda_n^2 U_n = 0 \quad \text{для будь-якого n} \qquad (3)$$

Це є модифіковане рівняння Бесселя з ν =1. Розв’язком такого рівняння є функція

$$U_n(r) = C_{1n}I_1(\lambda_n r) + C_{2n}K_1(\lambda_n r) \qquad (4)$$

де I_1 та K_1 є модифікованими функціями Бесселя першого порядку, а C_{1n} і C_{2n} - довільні сталі для будь-якого *n*. Векторний потенціал А, що є розв’язком рівняння (1), тоді знаходиться так

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}I_1(\lambda_n r) + C_{2n}K_1(\lambda_n r))\cos\lambda_n z\,. \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{d_1} \qquad (5)$$

Врахуємо граничні умови для цієї області для знаходження сталих C_{1n} та C_{2n} . Складова напруженості магнітного поля $H_z=0$ при $r=r_1$. В нашому випадку $H_z = \frac{1}{\mu r}\frac{\partial A}{\partial r}$ (оскільки складові A_r=A_z=0) , а значить $\frac{\partial A}{\partial r}=0$ при r=r_1. Використовуючи відомі співвідношення між модифікованими функціями Бесселя та їх похідними, з граничної умови отримаємо таке співвідношення між сталими

$$C_{2n}=\frac{C_{1n}(I_0(\lambda_n r_1)+I_2(\lambda_n r_1))}{K_0(\lambda_n r_1)+K_2(\lambda_n r_1)}. \qquad (6)$$

Таким чином, за допомогою граничних умов ми можемо зменшити кількість невідомих сталих. Остаточно, для області II векторний потенціал приймає такий вигляд

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{1n}I_1(\lambda_n r)+\frac{C_{1n}(I_0(\lambda_n r_1)+I_2(\lambda_n r_1))}{K_0(\lambda_n r_1)+K_2(\lambda_n r_1)}K_1(\lambda_n r)\right]\cos\lambda_n z\text{, де }\lambda_n=\frac{\pi n}{d_1}. \qquad (7)$$

Розглянемо тепер область I зі струмом. В цій області векторний магнітний потенціал задовольняє такому рівнянню

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{1}{r^2}A+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=-\mu\delta\big(\eta(z-h_1)-\eta(z-h)\big) \qquad (8)$$

Рівняння (8) - це рівняння в частинних похідних другого порядку з правою частиною. Розв’язки цього рівняння шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(r).\cos\lambda_n\, z\text{, де }\lambda_n=\frac{\pi n}{h} \qquad (9)$$

Після підстановки (9) та його частинних похідних по r та по z в рівняння (8) отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\lambda_n z\left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_n-\lambda^2{}_n U_n\right)=-\mu\delta\big(\eta(z-h_1)-\eta(z-h)\big)\quad , \qquad (10)$$

де $\lambda_n=\frac{\pi n}{h}$.

Розкладемо функцію η розподілу густини струму вздовж координати z , що стоїть у правій частині, в ряд Фур’є по $cos\,\lambda_n z$, де $\lambda_n=\frac{\pi n}{h}$.

$$\eta(z-h_1)-\eta(z-h)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\lambda_n z$$

Коефіцієнти Фур’є дорівнюють відповідно $a_0=\frac{2(h-h_1)}{h}, a_n=-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n h_1}{h}$. Тоді

$$\eta(z-h_1)-\eta(z-h)=\frac{h-h_1}{h}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n h_1}{h}\right)\cos\lambda_n z\,,\lambda_n=\frac{\pi n}{h} \qquad (11)$$

Підставимо розклад (11) у рівняння (10) та прирівняємо коефіцієнти при відповідних $\cos\lambda_n z$ для кожного n (нульову складову при цьому розглянемо окремо). Отримаємо

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_n-\lambda_n^2 U_n=-\mu\delta a_n \qquad (12)$$

Однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (12), тотожне рівнянню (3) і його загальний розв’язок має вигляд (4), але з іншими сталими та з $\lambda_n=\frac{\pi n}{h}$:

$$\overline{U}_n(r)=C_{3n}I_1(\lambda_n r)+C_{4n}K_1(\lambda_n r) \qquad (13)$$

Частинний же розв’язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (12) можна знайти методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа) у вигляді

$$U_n^* = C_{3n}(r)I_1(\lambda_n r) + C_{4n}(r)K_1(\lambda_n r), з\lambda_n = \frac{\pi n}{h} \quad (14)$$

при цьому C_{3n} і C_{4n} вважаються функціями від r. Тоді загальний розв'язок рівняння (12) буде сумою загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $U_n = \overline{U_n} + U_n^*$.

Сталі $C_{3n}(r)$, $C_{4n}(r)$ знаходяться з наступної системи

$$C'_{3n}I_1(\lambda_n r) + C'_{4n}K_1(\lambda_n r) = 0$$

$$C'_{3n}I'_1(\lambda_n r) + C'_{4n}K'_1(\lambda_n r) = -\mu\delta a_n$$

Використовуючи відомі співвідношення для функцій Бесселя, отримаємо

$$\begin{cases} C'_{3n}I_1 + C'_{4n}K_1 = 0 \\ C'_{3n}\dfrac{\lambda_n}{2}(I_0 + I_2) - C'_{4n}\dfrac{\lambda_n}{2}(K_0 + K_2) = -\mu\delta a_n \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему відносно функцій C'_{3n} та C'_{4n} . Знайдемо визначник системи Δ, та визначники $\Delta_1 та \Delta_2$. Тоді за формулами Крамера

$$C'_{3n}(r) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -r\mu\delta a_n K_1(\lambda_n r)$$

$$C'_{4n}(r) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = r\mu\delta a_n I_1(\lambda_n r) \quad (15)$$

Звідки

$$C_{3n}(r) = \int_0^r C'_{3n}dr = -\mu\delta a_n \int_0^r rK_1(\lambda_n r)dr$$

$$C_{4n}(r) = \int_0^r C'_{4n}dr = \mu\delta a_n \int_0^r rI_1(\lambda_n r)dr \quad (16)$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд суми загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $U_n = \overline{U_n} + U_n^*$, а саме

$U_n(r) = C_{3n}I_1(\lambda_n r) + C_{4n}K_1(\lambda_n r) + C_{3n}(r)I_1(\lambda_n r) + C_{4n}(r)K_1(\lambda_n r)$,
де $C_{3n}(r)$ і $C_{4n}(r)$ знаходяться з формул (16).

І остаточно, векторний потенціал для області зі струмом приймає такий вид

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{3n}I_1(\lambda_n r) + C_{4n}K_1(\lambda_n r) + C_{3n}(r)I_1(\lambda_n r) + C_{4n}(r)K_1(\lambda_n r)\right)\cos\lambda_n z, \text{де}\ \lambda_n = \frac{\pi n}{h}. \quad (17)$$

Використаємо граничні умови для зменшення кількості сталих.

Складова напруженості магнітного поля $H_z=0$ при $r=r_3$ для $0\angle z\angle h$. Звідси випливає, що $\frac{\partial A}{\partial r} = 0$ при $r=r_3$. Звідси, враховуючи співвідношення між модифікованими функціями Бесселя та їх похідними, будемо мати наступні співвідношення між сталими C_{3n} та C_{4n}

$$C_{4n} = \frac{(C_{3n} + C_{3n}(r_3))\left(I_0(\lambda_n r_3) + I_2(\lambda_n r_3)\right) - C_{4n}(r_3)\left(K_0(\lambda_n r_3) + K_2(\lambda_n r_3)\right)}{K_0(\lambda_n r_3) + K_2(\lambda_n r_3)_n}, \quad (18)$$

де $C_{3n}(r_3)$, $C_{4n}(r_3)$ знаходяться з формул (16).

Розглянемо тепер умови на границі розподілу областей зі струмом I та без струму II. Тут складові напруженостей магнітного поля в першій та другій областях повинні співпадати.

Тобто $H_z^I = H_z^{II}$ при $r=r_2$ для $0\angle z\angle d_1$. А оскільки $H_z = \dfrac{1}{\mu r}\dfrac{\partial A}{\partial r}$, то повинна виконуватись рівність відповідних частинних похідних $\dfrac{\partial A^I}{\partial r} = \dfrac{\partial A^{II}}{\partial r}$ при $r=r_2$. (19)

Після диференціювання та елементарних перетворень отримаємо

$$\frac{\partial A^I}{\partial r}\Big|_{r=r_2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{2}\cos\lambda_n z\Big[C_{3n}\left(I_0(\lambda_n r_2)+I_2(\lambda_n r_2)-\frac{K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)}{K_0(\lambda_n r_3)+K_2(\lambda_n r_3)}\big(I_0(\lambda_n r_3)+I_2(\lambda_n r_3)\big)\right)+$$

$$+C_{3n}(r_2)\left(I_0(\lambda_n r_2)+I_2(\lambda_n r_2)-\frac{K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)}{K_0(\lambda_n r_3)+K_2(\lambda_n r_3)}\big(I_0(\lambda_n r_3)+I_2(\lambda_n r_3)\big)\right)+$$

$$+\big(C_{4n}(r_3)-C_{4n}(r_2)\big)\big(K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)\big)\Big],\ \lambda_n = \frac{\pi n}{h}$$

$$\frac{\partial A^{II}}{\partial r}\Big|_{r=r_2} = \sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}\frac{\lambda_n}{2}\cos\lambda_n z\left[I_0(\lambda_n r_2)+I_2(\lambda_n r_2)-\frac{I_0(\lambda_n r_1)+I_2(\lambda_n r_1)}{K_0(\lambda_n r_1)+K_2(\lambda_n r_1)}\big(K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)\big)\right],$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{d_1}.$$

Введемо позначення

$$B_{1n} = \frac{\lambda_n}{2}\left(I_0(\lambda_n r_2)+I_2(\lambda_n r_2)-\frac{I_0(\lambda_n r_1)+I_2(\lambda_n r_1)}{K_0(\lambda_n r_1)+K_2(\lambda_n r_1)}\big(K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)\big)\right),\ \lambda_n = \frac{\pi n}{d_1};$$

$$B_{2n} = \frac{\lambda_n}{2}\left(I_0(\lambda_n r_2)+I_2(\lambda_n r_2)-\frac{K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)}{K_0(\lambda_n r_3)+K_2(\lambda_n r_3)}\big(I_0(\lambda_n r_3)+I_2(\lambda_n r_3)\big)\right),$$

$$D_n = \frac{\lambda_n}{2}\left(C_{3n}(r_2)\left(\big(I_0(\lambda_n r_2)+I_2(\lambda_n r_2)-\frac{K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)}{K_0(\lambda_n r_3)+K_2(\lambda_n r_3)}\big(I_0(\lambda_n r_3)+I_2(\lambda_n r_3)\big)\right)+\right.$$

$$\left.+(C_{4n}(r_3)-C_{4n}(r_2))\big(K_0(\lambda_n r_2)+K_2(\lambda_n r_2)\big)\big)\right),\ \lambda_n = \frac{\pi n}{h}.$$

Тоді, виконуючи умову (19) на межі розділу областей, отримаємо таке рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}B_{1n}\cos\frac{\pi n}{d_1}z = \sum_{n=1}^{\infty}(C_{3n}B_{2n}+D_n)\cos\frac{\pi n}{h}z \qquad (20)$$

В цьому рівнянні коефіцієнти B_{1n}, B_{2n} та D_n знаходяться із співвідношень приведених вище, а сталі C_{1n} та C_{3n} можна виразити з (20) одна через одну, зменшивши таким чином кількість сталих.

Розкладемо функцію, що стоїть в лівій частині (20) в ряд Фур'є по $\cos\dfrac{\pi n}{h}z$.

Коефіцієнти Фур'є будуть мати вигляд

$$a_{kn} = (-1)^k \frac{2nd_1 h}{\pi((nh)^2 - (kd_1)^2)} \sin\frac{\pi nh}{d_1} \ .$$

Підставивши в (20) гармонічні складові розкладу в ряд, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} B_{1k} a_{kn} \cos\frac{\pi nz}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{3n} B_{2n} + D_n) \cos\frac{\pi nz}{h} \ . \qquad (21)$$

Поміняємо місцями знаки суми в лівій частині рівняння і переприсвоїмо значення $n \to k$ в правій частині, тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} B_{1n} a_{kn} \cos\frac{\pi kz}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} (C_{3k} B_{2k} + D_k) \cos\frac{\pi kz}{h}$$

або

$$C_{3k} B_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} B_{1n} a_{kn} - D_k \ . \qquad (22)$$

Ми прийшли до системи рівнянь, які можна розв’язати обчислювальними методами, знайти сталі і отримати таким чином вираз для векторного потенціалу магнітного поля в даній області дископодібного електродинамометра.

Нульова складова розподілу густини струму в просторі дає додаткову складову векторного магнітного потенціалу, яку необхідно додати до гармонічних складових розподілу. Для нульової складової рівняння для магнітного потенціалу буде мати такий вигляд

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A = -\mu\delta a_0 \quad , \qquad (23)$$

так як в цьому випадку A залежить тільки від r . Розглянемо спочатку це рівняння без правої частини

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A = 0 \qquad (24)$$

Його можна розглядати, як звичайне диференціальне рівняння (A є функцією тільки r), і це є рівняння Ейлера, розв’язками якого є функція

$$A = C_1 \frac{1}{r} + C_2 r \qquad (25)$$

де C_1 і C_2 невідомі сталі.

Виходячи з того, що права частина рівняння (23) не залежить від r, є сталою, то частинний розв'язок рівняння (23) також стала величина. Тому, остаточно, загальний розв'язок (23) має вигляд

$$A = C_1 \frac{1}{r} + C_2 r + C_3 \qquad (26)$$

Невідомі сталі можна знайти з наступних граничних умов. При $r=r_3$ $H_z=0$ або $\frac{\partial A}{\partial r} = 0$ при $r=r_3$. Звідки $C_2 = \frac{C_1}{r_3^2}$.При $r=r_1$ H_z – обмежена і є заданою величиною. Позначимо її через K. Тоді $\frac{\partial A}{\partial r} = Kr$ при $r=r_1$. Звідки $C_1 = K\frac{r_1^3 r_3^2}{r_1^2 - r_3^2}$. Для визначення сталої C_3 будемо вважати, що $A=0$ при $r=r_3$ (зовнішнє поле відсутнє для постійної складової).

Тоді $C_3 = -\frac{2C_1}{r_3} = -2K\frac{r_1^3 r_3}{(r_1^2 - r_3^2)}$ і вигляд нульової складової магнітного потенціалу повністю визначається.

Таким чином, додавши постійну складову потенціалу (26) до загального вигляду (17), отримаємо вираз для векторного потенціалу магнітного поля в даній області дископодібного електродинамометра.

Література

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарський. Уравнения математической физики. Изд. „Наука”. Главн. ред. физ.-мат. лит. М., 1966.- 724с.

2. Л. Р. Слободян, В.І. Шеховцов. Електромагнітні поля електротехнологічних установок. К. „Либідь”, 1994.-173с.
3. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Изд. „Наука”. Главн. ред. физ.-мат. лит. М., 1968-342с.
4. В.В.Домбровский. Справочное пособие по расчету электромагнитного поля в электрических машинах.- Л.: Энергоатомиздат, Ленинградское отд-ние, 1983-256с.