АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК

Основан в 1964 г.

ВЫПУСК
32

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1982

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 539.384:624.073

Н. Г. МЕДВЕДЕВ

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Методы Ритца — Галеркина находят широкое применение для приближенного решения задач теории оболочек, в частности задач о колебании оболочек. При этом собственные частоты и формы колебаний оболочки связываются соответственно с собственными значениями и функциями некоторой задачи на собственные значения. Поэтому представляет интерес исследование проблемы собственных значений и функций для операторов, связанных с произвольными оболочками, а также исследование сходимости приближенных решений, полученных методами Ритца — Галеркина. Ниже такие исследования проводятся для ортотропных оболочек вращения и некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины. Приближения для собственных значений и функций, полученные методами Ритца — Галеркина, строятся с использованием конечномерных подпространств бикубических сплайнов. Доказывается сходимость полученных приближений и приводятся асимптотические оценки погрешности.

Основные предположения. Пусть Ω — прямоугольная область в $R^2 : \Omega = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi,\ 0<z<L\}$; $\tilde{H} = \tilde{W}_2^1(\Omega) \times \tilde{W}_2^1(\Omega) \times \tilde{W}_2^2(\Omega)$ — прямое произведение пространств Соболева [1] периодических по φ с периодом 2π функций; $\tilde{H} = \{\omega \mid \omega = (u,\ v,\ w);\ u \in \tilde{W}_2^1(\Omega);\ v \in \tilde{W}_2^1(\Omega); w \in \tilde{W}_2^2(\Omega)\}$; $\tilde{W}_2^l(\Omega)$ является подпространством в пространстве $W_2^l(\Omega)$ с нормой пространства $W_2^l(\Omega)$. Обозначим через H замыкание в норме

$$\|\omega\|_H^2 = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|w\|^2_{W_2^2(\Omega)} \tag{1}$$

множества бесконечно дифференцируемых в полосе $0 < z < L$, $-\infty < \varphi < \infty$ периодических по φ функций, удовлетворяющих граничным условиям решаемой задачи [5, 8].

Определим на пространстве $H \times H$ билинейные симметричные формы

$$a(\omega',\ \omega'') = \int_\Omega \left\{\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}\left[\varepsilon'_{11}\varepsilon''_{11} + \nu_2(\varepsilon'_{11}\varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{11}\varepsilon'_{22}) + \frac{\nu_2}{\nu_1}\varepsilon'_{22}\varepsilon''_{22} + \right.\right.$$

$$+ \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1} G\varepsilon'_{12}\varepsilon''_{12}\Big] + \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}\Big[\gamma'_{11}\gamma''_{11} + \nu_2(\gamma'_{11}\gamma''_{22} + \gamma''_{11}\gamma'_{22}) +$$

$$+ \frac{\nu_2}{\nu_1}\gamma'_{22}\gamma''_{22} + 4\,\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1} G\gamma'_{12}\gamma''_{12}\Big]\Big\} A_1^2 A_2^2 d\Omega, \qquad (2)$$

$$b(\omega', \omega'') = \int\limits_{\Omega} \rho h (u'u'' + v'v'' + w'w'') A_1^2 A_2^2 d\Omega. \qquad (3)$$

Здесь ε'_{ik}, γ'_{ik}, ε''_{ik}, γ''_{ik} — компоненты деформации оболочки вращения или некруговой цилиндрической оболочки [3, 9], зависящие соответственно от радиусов кривизны образующей $r(z)$ и направляющей $R(\varphi)$ и порожденные смещениями ω', $\omega'' \in H$; $h(\varphi, z)$ — толщина оболочки; E_1, E_2, ν_1, ν_2, G — соответственно модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига; ρ — плотность материала, из которого изготовлена оболочка; L — длина оболочки; A_1^2, A_2^2 — параметры Ламе.

Предполагаем выполненными следующие допущения:

1) $h(\varphi, z)$ — измеримая по $d\Omega$ функция, удовлетворяющая почти всюду в Ω условию $0 < h_1 \leqslant h(\varphi, z) \leqslant h_2$, где h_1, h_2 — постоянные;

2) E_1, E_2, ν_1, ν_2, ρ, G — положительные постоянные, причем $0 < \nu_1 < 1$, $0 < \nu_2 < 1$, $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$;

3) $\forall \omega \in H$ из условия $a(\omega, \omega) = 0$ следует, что $\omega = 0$, а также допущение

4) $r(z) \in C^2[0, L]$, $\frac{d^3 r}{dz^3} \in L_\infty(0, L)$, $r(z) \geqslant c = \text{const} > 0$ в случае оболочки вращения или допущение

5) $R(\varphi) \in \tilde{W}_p^1(0, 2\pi)$, $p > 2$, $0 < R_1 \leqslant R(\varphi) \leqslant R_2$, где R_1, $R_2 = \text{const}$ в случае некруговой цилиндрической оболочки.

Можно показать [5, 8], что при выполнении допущений 1)—4), а также допущений 4) или 5) соответственно для оболочки вращения или некруговой цилиндрической оболочки форма $a(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму, эквивалентную норме (1), т. е. справедливы соотношения

$$\|\omega\|_{H'}^2 = a(\omega, \omega); \quad m\|\omega\|_H \leqslant \|\omega\|_{H'} \leqslant M\|\omega\|_H \ \forall \omega \in H; \ m, M = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Очевидно также, что при выполнении допущений 1), 2), 5) форма $b(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму эквивалентную норме пространства $(L_2(\Omega))^3$.

Задача о собственных частотах и формах колебания оболочки. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$a(\omega, h) = \lambda b(\omega, h) \quad \forall h \in H, \qquad (5)$$

где формы $a(\omega', \omega'')$, $b(\omega', \omega'')$ определяются соотношениями (2), (3). С учетом соотношений (4) и компактности вложения $W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times W_2^2(\Omega) \to (L_2(\Omega))^3$ из известных результатов [7] вытекает такая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены допущения 1)—3), а также допущение 4) или 5) соответственно для оболочки вращения или некруговой цилиндрической оболочки. Тогда спектральная задача (5) имеет последовательность ненулевых решений $\omega_k \in H$, отвечающих последовательности собственных значений λ_k таких, что

$$a(\omega_k, h) = \lambda_k b(\omega_k, h) \quad \forall h \in H, \ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$$

При этом

$$\lambda_k = \inf\left\{\frac{a(\omega, \omega)}{b(\omega, \omega)} \,\middle|\, \omega \in H, \ \omega \neq 0, \ b(\omega, \omega_i) = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant k-1\right\}.$$

Задача (5) связана с определением собственных частот и форм колебания ортотропных оболочек переменной толщины, удовлетворяющих некоторым условиям закрепления. При этом допущение 3) будет выполняться, если они такие, что оболочка не имеет жестких смещений. В случае оболочки вращения для этого, например, достаточно, чтобы оператор граничных условий был непрерывным отображением H в некоторое гильбертово пространство и обеспечивал закрепление оболочки в трех различных точках хотя бы на одном из торцов [5], а в случае некруговой цилиндрической оболочки — хотя бы в одной точке на каждом из торцов [8].

Методы Ритца — Галеркина. Пусть $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных подпространств в H, удовлетворяющих условию предельной плотности

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{v\in V_n}\|\omega-v\|_{H'}=0 \quad \forall\,\omega\in H. \tag{6}$$

Задачу (5) заменяем последовательностью конечномерных задач на собственные значения: найти $\omega_n\in V_n$ и $\lambda\in R$, для которых

$$a(\omega_n,\ h)=\lambda b(\omega_n,\ h) \quad \forall\, h\in V_n. \tag{7}$$

Обозначим через K_n размерность пространства V_n. Тогда для каждого n задача (7) имеет K_n собственных чисел $0<\lambda_1^{(n)}\leqslant\lambda_2^{(n)}\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{K_n}^{(n)}$, которые будут приближениями для первых собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^{K_n}$ задачи (5), и K_n собственных векторов $\{\omega_i^{(n)}\}_{i=1}^{K_n}$, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_i^{(n)}\}_{i=1}^{K_n}$. Аналогично тому, как это проделано в работах [4, 5], с использованием результатов работы [2] доказывается такое утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условие (6). Тогда последовательность $\{\lambda_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений задачи (7) сходится сверху к λ_i (собственному значению задачи (5)). Каждая предельная точка любой последовательности $\{\lambda_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений уравнения (7) является собственным значением уравнения (5). Из всякой последовательности $\{\omega_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ нормированных собственных элементов уравнения (7), соответствующих собственным значениям $\lambda_i^{(n)}\to\lambda_i$, можно извлечь сходящуюся в H подпоследовательность $\{\omega_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, имеющую своим пределом собственный элемент уравнения (5), соответствующий собственному значению λ_i. Теорема 2 является в некотором смысле обобщением работы [5] (теорема 4) с указанием на то, что последовательность $\{\lambda_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к λ_i сверху.

Рассмотрим вопросы, связанные с построением конечномерных подпространств U_n с помощью сплайн-функций. Обозначим через $\{\Delta_n^{(j)}=(\Delta_{1n}^{(j)},\ \Delta_{2n}^{(j)})\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность разбиений прямоугольника $\bar{\Omega}=[0,\ 2\pi]\times\times[0,\ L]$, где

$$\Delta_{1n}^{(j)}:0=a_1=\varphi_{0n}^{(j)}<\varphi_{1n}^{(j)}<\ \cdots\ <\varphi_{M_n^{(j)}n}^{(j)}=b_1=2\pi;$$

$$\Delta_{2n}^{(j)}:0=a_2=z_{0n}^{(j)}<z_{1n}^{(j)}<\ \cdots\ <z_{N_n^{(j)}n}^{(j)}=b_2=L;$$

$$\bar{\pi}_{1n}^{(j)}=\max_{1\leqslant i\leqslant M_n^{(j)}}(\varphi_{in}^{(j)}-\varphi_{i-1n}^{(j)}),\ \bar{\pi}_{2n}^{(j)}=\max_{1\leqslant i\leqslant N_n^{(j)}}(z_{in}^{(j)}-z_{i-1n}^{(j)}); \tag{8}$$

$$\bar{\pi}_n=\max_{i,j}\bar{\pi}_{in}^{(j)};\quad i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Предполагаем, что

$$\{\Delta_{1n}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}\subset P_{\sigma_j}([0,\ 2\pi]),\ \{\Delta_{2n}^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}\subset P_{\sigma_j}([0,\ L]),\quad j=1,\ 2,\ 3, \tag{9}$$

где для произвольного $\sigma\geqslant 1$ через $P_\sigma([a,\ b])$ обозначается множество всех разбиений $\Delta:a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b,\ -\infty<a<b<\infty$, для которых

$$\frac{\bar{\pi}}{\underline{\pi}}\leqslant\sigma,\ \bar{\pi}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}(x_i-x_{i-1}),\quad \underline{\pi}=\min_{1\leqslant i\leqslant N}(x_i-x_{i-1}).$$

Обозначим через $\mathrm{Sp}^{(2)}(\Delta_{in}^{(j)}, [a_i, b_i])$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots$) пространство кубических сплайнов [2] дефекта 1. Пусть $\hat{H}_n = H_n^{(1)} \times H_n^{(2)} \times H_n^{(3)}$ — прямое произведение пространств, определяемых соотношениями

$$H_n^{(p)} = \bigotimes_{i=1}^{2} \mathrm{Sp}^{(2)}(\Delta_{in}^{(p)}, [a_i, b_i]); \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

причем $p = 1, 2, 3$ соответственно для u, v, w; пространства $H_n^{(p)}$ получаются с помощью тензорного произведения пространств одномерных сплайнов.

В качестве конечномерных подпространств V_n, которые используются для получения приближений $(\lambda_i^{(n)}, \omega_i^{(n)})$ по Ритцу — Галеркину для собственных значений λ_i и соответствующих им собственных функций $\omega_i = (u_i, v_i, w_i)$ задачи (5), берутся соответствующие подпространства пространства V_n, состоящие из таких сплайнов, которые являются периодическими по φ и удовлетворяют граничным условиям решаемой задачи, связанным со способом закрепления оболочки, т. е. подпространства V_n можно представить в виде

$$V_n = (H_n^{(1)} \times H_n^{(2)} \times H_n^{(3)}) \cap H. \tag{11}$$

В работе [6] показано, что подпространства V_n, определяемые соотношениями (10), (11) для случаев, когда на торцах оболочки выполняется один из вариантов граничных условий

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

$$u = v = w = 0, \tag{13}$$

удовлетворяют условию полноты (6), т. е. методы Ритца — Галеркина для задачи (5) сходятся в смысле, указанном в теореме 2. Следующая теорема устанавливает скорость сходимости приближений $(\lambda_i^{(n)}, \omega_i^{(n)})$ к точному решению (λ_i, ω_i) задачи (5).

Теорема 3. Пусть при выполнении условий теоремы 1 первые K_n собственных векторов $\{\omega_i\}_{i=1}^{K_n}$ задачи (5) принадлежат пространству $(C^4(\overline{\Omega}))^3$ и

$$\frac{\partial^{k+l}\omega_i}{\partial\varphi^k \partial z^l}(0, z) = \frac{\partial^{k+l}\omega_i}{\partial\varphi^k \partial z^l}(2\pi, z) \quad \forall z \in [0, L]; \quad 0 \leqslant k + l \leqslant 4; \quad i = \overline{1, K_n},$$

соответствующие подпространства V_n построены на сплайнах, для граничных условий (12) или (13), определенных на разбиениях $\Delta_n^{(j)} = (\Delta_{1n}^{(j)}, \Delta_{2n}^{(j)})$, удовлетворяющих условию (9). Тогда существует постоянная $c_1 > 0$, для которой

$$\lambda_i \leqslant \lambda_i^{(n)} \leqslant \lambda_i + c_1 \overline{\pi}_n^4; \quad i = 1, \ldots, K_n. \tag{14}$$

Кроме того, если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{K_n}$, то для первых K_n приближенных собственных векторов $\omega_i^{(n)}$ справедливы оценки

$$\|\omega_i - \omega_i^{(n)}\|_H \leqslant c_2 \overline{\pi}_n^2; \quad i = 1, \ldots, K_n, \tag{15}$$

где c_2 — положительная постоянная, а $\overline{\pi}_n$ определяется соотношениями (8).

Приведем идею доказательства этой теоремы. Используя интерполяционные свойства бикубических сплайнов [6, 10], можно показать, что

$$\|\tilde{\omega}_i^{(n)} - \omega_i\|_{H'} \leqslant c_3 \overline{\pi}_n^2, \ c_3 = \mathrm{const} > 0, \ i = \overline{1, K_n}. \tag{16}$$

Здесь $\tilde{\omega}_i^{(n)}$ — проекция в норме H' собственного вектора ω_i задачи (5) на конечномерное подпространство V_n. Обобщая теперь результаты работы [2] на случай топологического произведения соболевых пространств $\tilde{W}_2^1(\Omega) \times$

$\times \tilde{W}_2^1(\Omega) \times \tilde{W}_2^2(\Omega)$ и учитывая соотношение (16), получаем оценки (14), (15).

Отметим, что методы Ритца — Галеркина с использованием бикубических сплайнов, обладая довольно высокой скоростью сходимости, имеют и другие преимущества по сравнению с тем, когда в качестве базисных функций выбираются, например, полиномы или тригонометрические функции. Одно из них состоит в том, что базисные функции в пространстве бикубических сплайнов имеют кусочный носитель. Это влечет за собой хорошую обусловленность соответствующих матриц в методах Ритца — Галеркина, что очень важно при численном счете на ЭВМ.

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М. : Наука, 1975.— 478 с.
2. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе.— М. : Мир, 1974.— 126 с.
3. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Расчет некруговых цилиндрических оболочек.— Киев : Наук. думка, 1977.— 102 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П.,* и др. Приближенное решение операторных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 455 с.
5. *Литвинов В. Г., Медведев Н. Г.* Некоторые вопросы устойчивости оболочек вращения.— Мат. физика, 1979, вып. 26, с. 101—109.
6. *Литвинов В. Г., Медведев Н. Г.* Сплайн-функции и оценка погрешности в задаче об устойчивости ортотропных оболочек вращения.— Числ. методы механики сплошной среды, 1978, 9, № 4, с. 82—93.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 510 с.
8. *Медведев Н. Г.* О разрешимости задач теории ортотропных некруговых цилиндрических оболочек.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 10, с. 907—910.
9. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.— Л. : Судпромгиз, 1951.— 344 с.
10. *Carlson R. E., Hall C. A.* Error bounds for bicubic spline interpolation.— J. Approxim. Theory, 1973, 7, N 1, p. 41—47.

Институт механики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.04.80