УДК 539.3

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ШТАМПА НА МНОГОСВЯЗНУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Е.А. Звездочкина, к.ф.-м.н.
Запорожский государственный университет

Для решения задач о давлении штампа в полуплоскость разработаны различные аналитические, численно-аналитические и численные методы, а также их комбинации [1-5]. Достаточно точные и простые решения получаются при использовании [6] модифицированного метода граничных элементов (МГЭ). Ниже на примере решения задачи для полуплоскости с одним отверстием при действии штампа исследован вопрос о достоверности получаемых при использовании последнего метода результатов.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную нижнюю полуплоскость с внутренним отверстием (рис. 1). На отрезке $[-b;b]$ прямолинейной границы приложен жестко сцепленный с границей абсолютно жесткий штамп, на который действует центральная вертикальная сила $\vec{P}(0;-P_0)$. Вне штампа граница полуплоскости свободна от загружений и не подкреплена. Напряжение и вращение на бесконечности отсутствуют.

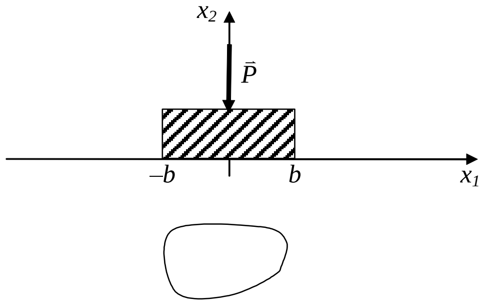

Рис. 1.

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой полуплоскости сводится к решению уравнения Ламе в перемещениях [7]

$$G\Delta u_j + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=0 \quad (j=1,2) \tag{1}$$

при заданных граничных условиях [8]:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = k = const \quad (|x_1| \le b,\ x_2 = 0);$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \ (|x_1| > b,\ x_2 = 0);$$

$$\int_{-b}^{b} \sigma_{22}(x_1,0)dx_1 = -P_0 , \tag{2}$$

где ν – коэффициент Пуассона; G – модуль упругости при сдвиге, k – неизвестная постоянная, σ_{ij} ($i, j = 1,2$) – напряжения, u_j ($j = 1,2$) – перемещения.

Методика решения задачи. Для решения краевой задачи (1)-(2) используем гранично-интегральное представление для многосвязных полубесконечных областей [6]. Полученное в работе интегральное уравнение аналогичное классическому [7], но с другими весовыми функциями $\hat{p}^*_{ijj}(\xi,x)$ и $\hat{u}^*_{ijj}(\xi,x)$, а именно:

$$c_{ij}(\xi)\Theta(\xi,\Gamma-\Gamma_5)u_j(\xi)+\int_\Gamma \hat{p}^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)=\int_\Gamma \hat{u}^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x)+\hat{b}_i(\xi) . \tag{3}$$

Здесь

$$\hat{p}^*_{ij}(\xi,x)=\Theta(\xi,\Gamma-\Gamma_5)\,p^*_{ij}(\xi,x),$$

$$\hat{u}^*_{ij}(\xi,x)=\left(u^*_{ij}(\xi,x)-\delta_{j2}\Theta(\xi,\Gamma_1\cup\Gamma_2)\left(\int\limits_{\Gamma_5}p^*_{ij}(\xi,y)F_j(y,x)d\Gamma(y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+c_{ij}(\xi)\Theta(\xi,\Gamma_5)F_j(\xi,x)\right)\right),$$

$$\hat{b}_i(\xi)=-\int\limits_{\Gamma_3}\left(\int\limits_{\Gamma_5}p^*_{ij}(\xi,y)F_j(y,x)d\Gamma(y)+c_{ij}(\xi)\Theta(\xi,\Gamma_5)F_j(\xi,x)\right)p_2(x)d\Gamma(x); \tag{4}$$

$$F_1(\xi,x)=\frac{1}{2\pi G}\left\{(1-2\nu)\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\xi_1-x_1}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\xi_1\xi_2}{(\xi_1-x_1)^2+\xi_2^2}\right\}; \tag{5}$$

$$F_2(\xi,x)=\frac{1}{2\pi G}\left\{-2(1-\nu)\left[\ln\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+\xi_2^2}-\ln|L-x_1|\right]+\frac{\xi_2^2}{(\xi_1-x_1)^2+\xi_2^2}\right\}; \tag{6}$$

$$\Theta(\zeta,S)=\begin{cases}1, & \text{если } \zeta\in \mathrm{S},\\ 0, & \text{если } \zeta\notin \mathrm{S},\end{cases}$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $u^*_{ij}(\xi,x)$ – фундаментальное решение Кельвина; $p^*_{ij}(\xi,x)$ – фундаментальные напряжения; $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5$ – граница многосвязной области (рис. 2): Γ_1 – граница под штампом; Γ_2 – участок границы полуплоскости $[-d;-b]\cup[b;d]$; Γ_3 – оставшаяся часть границы полуплоскости; Γ_4 – граница отверстия; Γ_5 – граница нового ограничивающего контура.

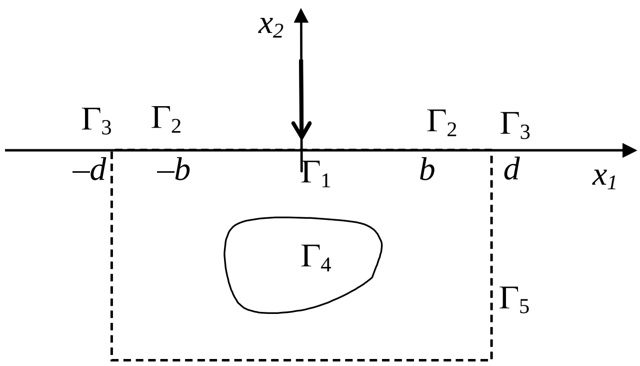

Рис. 2.

Данное интегральное уравнение (3) позволяет учитывать нагрузку, заданную на всей бесконечной границе полуплоскости $\Gamma_2\cup\Gamma_3$ следующим образом. Поскольку при решении смешанных краевых задач теории упругости для многосвязных полубесконечных областей не всегда возможно использовать в качестве фундаментального решение для полуплоскости, то обычно вводится искусственный контур, на границу которого переносятся условия на бесконечности. Подобное ограничение приводит к приближенным решениям и в некоторых случаях к итерационному процессу уточнения искомого решения. Как следствие, растут вычислительные затраты и накапливаются ошибки. В данном случае, чтобы избежать часть возникающих проблем при решении таких задач для полубесконечнх областей, предложено на границе искусственного контура Γ_5 часть неизвестных выражать с помощью решения задачи Фламана (4)-(5) о распределенной нагрузке на границе однородной полуплоскости [9]. Таким образом, одно уравнение (3) связывает все неизвестные в заданной области и нагрузку, которая может задаваться в любой точке границы полуплоскости. Данная методика не ограничивает число отверстий в полуплоскости, на границе которых могут задаваться различного вида краевые условия. При построении решения используется классическая схема метода граничных элементов и в этом случае геометрия границ заданных отверстий может быть любой. Для узловых точек каждого граничного элемента записывается дискретная форма уравнения (3), при этом граница Γ аппроксимируется отрезками, в середине которых неизвестные величины перемещений и граничных усилий считаются постоянными. Интегралы, входящие в уравнение (3) считались численно с помощью квадратурной формулы Гаусса [7]. Полученные неизвестные величины перемещений и напряжений после решения системы линейных алгебраических уравнений подставлялись в уравнение (3) для нахождения решения на границе заданной области. Для получения решения внутри области использовалось решение Сомильяни [7].

Анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования распределения напряжений в полуплоскости с круговым отверстием единичного радиуса, когда на границе полуплоскости действует симметричный относительно отверстия штамп единичной полуширины b.

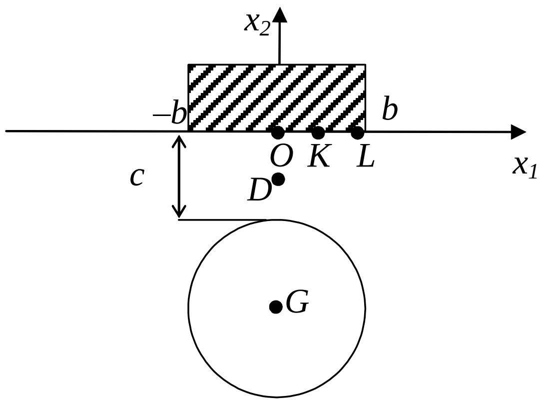

Рис. 3.

Некоторые из полученных результатов приведены ниже в таблице, где с точностью до множителя $p = P_0 / 2b$ даны значения напряжений σ_{22} в некоторых характерных точках рассматриваемой полуплоскости (рис. 3) для различных значений расстояния c между контуром отверстия и границей полуплоскости. Пи этом в качестве характерных выбирались точки $D(0;-c/2)$, $O(0;0)$, $K(0;b/2)$; $L(0{,}99b;0)$. В таблице даны также значения, полученные в работе [6, 10] при решении этой же задачи методом комплексных потенциалов. Как видно из таблицы, результаты полученные обоими способами имеют хорошую согласованность между собой, за исключением точки L, поскольку эта точка расположена очень близко к краю штампа, где теоретически напряжения стремятся к бесконечности. Во всех других точках наблюдается такое же перераспределение напряжений, которое возникает в результате приближения или удаления кругового концентратора напряжений.

C	*D*		*O*		*K*		*L*	
	ММГЭ	МКП	ММГЭ	МКП	ММГЭ	МКП	ММГЭ	МКП
	Случай неподкрепленного отверстия							
0,1	–0,006	–0,006	–0,016	–0,015	–0,210	–0,228	–7,685	–8,571
0,5	–0,001	–0,001	–0,096	–0,093	–0,487	–0,531	–5,961	–6,795
1,0	–0,148	–0,141	–0,347	–0,348	–0,643	–0,657	–5,476	–5,460
2,0	–0,410	–0,406	–0,571	–0,600	–0,718	–0,744	–4,356	–4,335
	Случай жесткого ядра							
0,1	–1,736	–1,734	–1,717	–1,713	–0,719	–0,765	–1,609	–1,680
0,5	–1,045	–1,043	–0,992	–0,993	–0,834	–0,858	–2,776	–2,778
1,0	–0,864	–0,860	–0,803	–0,813	–0,809	–0,822	–3,533	–3,399
2,0	–0,692	–0,694	–0,702	–0,708	–0,800	–0,786	–4,203	–3,846

Следовательно**,** что установлена достоверность решений, полученных предложенной методикой [6] путем сравнения существующих решений, полученных методом комплексных потенциалов [5, 10] в случае действия сцепленных штампов с прямолинейной границей многосвязной полубесконечной области с круговым отверстием при задании различных граничных условий.

РЕЗЮМЕ

УДК 539.3

ДО ПИТАННЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ДІЮ ШТАМПА НА БАГАТОЗВ’ЯЗНУ ПІВПЛОЩИНУ МЕТОДОМ КРАЙОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

О.А.Звьоздочкіна, к.ф.-м.н.

В роботі за допомогою модифікованого методу крайових елементів представлений розв’язок задачі про дію жорстко зчепленого штампа з межею півплощини з круговим отвором. Межа заданого отвору вільна від зусиль або жорстко підкріплена. Запропонована методика побудована на синтезі класичному методу крайових елементів та аналітичного розв’язку задачі про розподілену силу на межу півп-

лощини. Проведений порівняльний аналіз отриманих розв’язків поставленої задачі наведеним методикою та методом комплексних потенціалів.

SUMMARY

УДК 539.3

ON THE SOLUTION OF A PROBLEM ABOUT THE EFFECT OF A STAMP ON A MULTIPLY CONNECTED HALF-PLANE WITH APPLICATION OF BEM

Ye.A.Zvyozdochkina

In the paper the problem about the effect of a stamp on a multiply connected half-plane with a circular hole is considered. Stamp is assumed to be linhed to a boundary of the half-plane and the boundary of a hole is assumed to be clamped or free from forces. Analysis of the solutions obtained with the modified BEM and method of complex potentials is performed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Александров В.М. Об одном методе решения интегрального уравнения плоских контактных задач для полуограниченных тел // Прикладная математика и механика.– 2002.– Т.66, №5.– С. 874-879.
2. Механика контактных взаимодействий / Отв. ред. И.И. Ворович, В.И. Александров.– М.: Физматгиз, 2001.– 672 с.
3. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости.– СПб.: Наука, 1999.– 382 с.
4. Солдатенков И.А. Постановка и решение задачи о вдавливании со сцеплением штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела.– 2000.– №4.– С. 39-52.
5. Калоеров С.А., Вакуленко С.В. Смешанная задача теории упругости для изотропной полуплоскости с круговыми отверстиями // Прикладная механика.– 2000.– 36, №12.– С. 99-107.
6. Звьоздочкіна О.А., Толок В.О. Про один метод розв’язування задачі статики для пружної неоднорідної півплощини // Вісн. ун-ту “Львівська політехніка”. Сер. Прикладна математика.– 1998.– №337.– С. 172-175.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов.– М.: Мир, 1987.– 524 с.
8. Лурье А.И. Теория упругости.– М.: Наука, 1970.– 940 с.
9. Крауч С., Старфилд А. Метод граничных элементов в механике твердого тела.– М.: Мир, 1987.– 328 с.
10. Вакуленко С.В. Основные задачи теории упругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами: Дис... канд. физ.-мат. наук.– Донецк, 2002.– 240 с.