

ІСНУВАННЯ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИСИПАТИВНИХ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ

А. ТКАЧУК

Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка

Розглядається система різницевих рівнянь

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$h > 0$ – крок різницевого рівняння, $x_k^h = x^h(t_0 + kh)$, $x^h(t_0) = x_0^h$.

Вектор-функція $X(t, x)$ визначена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{D}$ (\mathbb{D} -деяка область простору \mathbb{R}^n), $t_0 \in \mathbb{R}$. Дисипативність системи (1) будемо розуміти в сенсі наступних означень.

Означення 1. Систему (1) назвемо дисипативною при $k \geq 0$, якщо існує $R(h)$, що для довільного $r > 0$ можна вказати $T = T(t_0, r, h)$, що розв'язок системи (1) x_k^h при $kh \geq T$ знаходиться в кулі радіуса R : $x_k^h \in U_R$, якщо $x_0^h \in U_r$.

Означення 2. Систему (1) назвемо рівномірно дисипативною по $h \leq h_0$, якщо в означенні 1 R та T не залежать від h .

Теорема 1. Якщо система (1) для кроку $h > 0$ має невід'ємну функцію Ляпунова $V_h(t, x)$, визначену в області $t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n$, таку, що:

1. виконується умова

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}_+, |x| \geq R} V_h(t_0 + kh, x) = V_{h,R} \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2)$$

2. існують $C = C(h) > 0$ та $C_1 = C_1(h) > 0$ такі, що

$$V_h(t_0 + (k+1)h, x + hX(kh, x)) - V_h(t_0 + kh, x) \leq -C(h)V_h(t_0 + kh, x)h + C_1(h)h,$$

то система (1) дисипативна для даного $h > 0$, при умові $C(h)h < 2$.

Якщо ж в умовах теореми $V(t, x)$, C_1 та C не залежать від h і співвідношення (2) виконується рівномірно по $h \leq h_0$, то система (1) рівномірно дисипативна.

Припустимо, що $X(t, x)$ – ліпшицева по x з константою L .

Теорема 2. Якщо система (1) – дисипативна в сенсі означення 1, то для неї існує в області $t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n$ невід'ємна функція Ляпунова $V_h(t, x)$, що задовольняє по x локальну умову Ліпшиця і:

1. виконується умова: $\inf_{t \geq t_0; |x| \geq R} V_h(t, x) \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty,$

2. існує $C(h) > 0$ таке, що

$$V_h(t + h, x + hX(t, x)) - V_h(t, x) \leq -C(h)hV_h(t, x)$$

і $C(h)h < 2$, якщо $h \leq 2$. Причому, для $h < h_0$, де h_0 – розв'язок рівняння $\frac{1-e^{-h}}{h} = \frac{1}{2}$, сталу $C(h)$ можна взяти рівною $\frac{1}{2}$.

Якщо система (1) – рівномірно дисипативна по h , то функція Ляпунова $V(t, x)$ не залежить від h .