

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ РОБОЧОЇ СИЛИ ДЛЯ МАКСИМІЗАЦІЇ ВАЛОВОГО ДОХОДУ

О.І. Радзівська Н.В. Бортніченко

Анотація. Для однорідної виробничої функції, яка залежить від двох факторів: затрат труда і капіталу, розглянуто задачу розподілу робочої сили для максимізації валового доходу. На прикладі виробничої функції Коба-Дугласа встановлено зміст множника, який входить в цю функцію, при оптимальному розподілі ресурсів.

Ключові слова: виробнича функція, функція Кобба-Дугласа, основні фонди, затрати труда, капітал

Вступ. Якщо відома динамічна виробнича функція $Y(t)$, яка залежить від двох факторів: капіталу $K(t)$ і робочої сили $L(t)$, що має вартісний еквівалент, тобто задано рівняння

$$Y(t) = F(K(t), L(t)),$$

то виникає задача знаходження максимального валового доходу за період часу T , коли, наприклад, задано явний вигляд функції $K(t)$, а загальні витрати на робочу силу дорівнюють $L_0(T)$.

Математичну постановку цієї задачі можна сформулювати наступним чином: на множині функцій, які задовольняють обмеженням

$$\int_0^T L(t) dt = L_0(T)$$

знайти максимум функціонала

$$\int_0^T F(K(t), L(t)) dt.$$

В даній роботі ми отримаємо розв'язок цієї задачі і зробимо аналіз встановлених результатів для конкретних функцій F .

Методи дослідження. Розглянемо динамічну модель виробничої функції $Y(t)$, яка залежить від двох факторів:

$K(t)$ - основних фондів (капіталу) і $L(t)$ - затрати труда, де $t \in [0, T]$. Тоді $Y(t)$ має вигляд:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)). \quad (1)$$

З рівняння (1) випливає, що загальний дохід $Y(T)$ за період $[0, T]$ становить:

$$Y(T) = \int_0^T Y(t) d\tau = \int_0^T F(K(t), L(t)) dt \quad (2)$$

Розподіл робочої сили має бути підпорядкований задачі максимізації валового доходу $Y(T)$ і припускаючи, що виробнича функція (1) допускає перерозподіл робочої сили, розглянемо наступну задачу:

$$\int_0^T F(K(t), L(t)) dt \rightarrow \max_{L(t)}, \quad (3)$$

$$\int_0^T L(t) dt = L_0(T). \quad (4)$$

Будемо вважати функції $K(t)$ та $L(t)$ неперервними, тоді оптимізаційна задача (3)-(4) може бути розв'язана методами варіаційного числення. В такому випадку необхідна умова максимуму задачі (3)-(4) матиме вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \mu, \quad (5)$$

де μ - множник Лагранжа. Припускаємо, що виробнича функція є однорідною порядку p , тобто задовольняє умову:

$$F(tK, tL) = t^p F(K, L).$$

Тоді для неї виконується властивість:

$$\frac{\partial F}{\partial L} \cdot L + \frac{\partial F}{\partial K} \cdot K = pF(K, L).$$

Помножимо ліву і праву частину цієї рівності на $\frac{1}{L}$, маємо

$$\frac{\partial F}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{K}{L} = \frac{p}{L} \cdot F(K, L). \quad (6)$$

Позначимо через $k = \frac{K}{L}$.

Тоді враховуючі то, що $\frac{1}{L^p} F(K, L) = F(\frac{K}{L}, 1)$, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} + \frac{k}{L^{p-1}} \frac{\partial F}{\partial k} &= \frac{p}{L^{p-1}} F(k, 1), \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= \frac{1}{L^{1-p}} \left(pF(k, 1) - k \frac{\partial F}{\partial K} \right). \end{aligned}$$

Позначимо $v(k) = \left(pF(k, 1) - k \frac{\partial F}{\partial K} \right)$, тоді з (5) маємо

$$k^{1-p} v(k) = \mu K^{1-p}. \quad (7)$$

З рівняння (7) знаходимо $k^* = k^*(\mu, K, p)$.

Отже, оптимальний розподіл затрат труда буде визначатися наступним чином

$$L^*(t) = \frac{K(t)}{k^*(\mu, K, p)}, \quad (8)$$

де μ знаходиться з рівняння (4)

$$\int_0^T \frac{K(t)}{k^*(\mu, K, p)} dt = L_0(T). \quad (9)$$

Розглянемо застосування приведених вище міркувань для виробничої функції Кобба - Дугласа:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) = A(t)K^\alpha(t)L^\beta(t), \quad (10)$$

де параметри α та β постійні, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тоді $p = 1$ і

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial L} &= \frac{\partial F}{\partial L} = A(t)K^\alpha(t)\beta \cdot L^{\beta-1}(t) = A(t)K^\alpha\beta \cdot L^{-\alpha}(t) = \\ &= \beta \cdot A(t) \cdot \frac{K(t)^\alpha}{L(t)^\alpha} = \beta \cdot A(t) \cdot k^\alpha(t) \\ \mu(t) &= \beta \cdot A(t) \cdot k^\alpha, \end{aligned}$$

А розв'язок рівняння (7) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} (k^*(t))^\alpha &= \frac{\mu}{\beta \cdot A(t)}, \\ k^*(t) &= \left[\frac{\mu}{\beta \cdot A(t)} \right]^{1/\alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставивши (11) в рівняння (9), отримаємо:

$$\int_0^T \frac{K(t)\beta \cdot A^{1/\alpha}(t)}{\mu^{1/\alpha}} dt = L_0(T) \quad \text{і} \quad \mu^{1/\alpha} = \frac{1}{L_0(T)} \int_0^T \beta^{1/\alpha} K(t) A^{1/\alpha}(t) dt.$$

Отже,

$$k^*(t) = \frac{\int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt}{L_0(T) A^{1/\alpha}(t)},$$

Тепер знайдемо рівняння оптимального розподілу робочої сили, використовуючи формулу (8):

$$L^*(t) = \frac{L_0(T) A^{1/\alpha}(t) K(t)}{\int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt}.$$

Проаналізуємо величину валового доходу за період часу T з оптимального використання робочої сили.

Підставивши знайдений оптимальний розподіл робочої сили в рівняння (10), отримаємо:

$$\begin{aligned} Y(T) &= \int_0^T Y(t) dt = \int_0^T \frac{L_0^\beta K^{\alpha+\beta}(t) A^{1+\beta/\alpha}(t)}{\left(\int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt \right)^\beta} = \frac{L_0^\beta \int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt}{\left(\int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt \right)^\beta} = \\ &= L_0^\beta \left(\int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt \right)^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Позначимо $K(T) = \int_0^T K(t) A^{1/\alpha}(t) dt$.

Тоді вираз для валового доходу за період має вигляд

$$Y(T) = K^\alpha(T) L_0^\beta(T).$$

Тут $K(T)$ основні фонди в момент часу T

Результати та обговорення. Проаналізуємо зміст множника $A(t)$, що входить в функцію Кобба-Дугласа. Для цього припустимо, що основні фонди змінюються за законом $K(t) = e^{-0,5t}$, функція $A(t) = e^{0,01t}$, параметри $\alpha = \beta = 0,5$ і період $T = 1$. Знайдемо обсяг основних фондів в час T : а) якщо $K(T)$ не є частиною функції Кобба-Дугласа; б) $K(T)$ входить в функцію Кобба-Дугласа.

З формули (12) маємо:

$$\text{а) } K_1 = \int_0^1 e^{-0,5t} dt = 0,782,$$

$$\text{б) } K_2 = \int_0^1 e^{-0,5t} e^{0,02t} dt = 0,789.$$

Отже, функція $A(t)$ характеризує, як оптимальний розподіл трудових ресурсів впливає на переоцінку основних фондів.

Висновки.

1. Знайдено оптимальну функцію затрат труда, яка задовольняє нелокальні крайові умови.
2. Встановлено зміст множника, що входить у виробничу функцію Кобба-Дугласа.

Література:

1. О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.И. Черемных. Математические методы в экономике. Из-во «ДИС» Москва, 1998, 365с.
2. О.И. Саламанов. Математическая экономика с применением Mfthcad и Excel, СПб: Петербург, 2003, 464с.
3. Л.С. Тарасевич, В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев. 50 лекций по микроэкономике, Из-во «Экономическая школа», 2000, 465с.
4. Ю.В. Покорный. Краткий курс математической теории оптимальных задач, «Центрально-Черноземное книжное из-во», Воронеж, 2007, 137с.

Авторська довідка:

1. Бортніченко Наталія Вікторівна, студентка Національного університету харчових технологій факультету ЕІМ 3 курсу.

2. Радзівська Олена Іванівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій,
e-mail: radzl58@mail.ru