

## ДИНАМІКА ПІНОУТВОРЕННЯ З В'ЯЗКОЇ РІДИНИ З БУЛЬБАШКАМИ A DYNAMICS OF FOAM-FORMATION IS FROM VISCID LIQUID WITH BUBBLES

*Розглянуто процес розширення великої кількості газових бульбашок у нестисливій в'язкій рідині. Для достатньо малих швидкостей визначається форма вільних границь. Досліджується формування рідких плівок при наближенні двох газових бульбашок. У моделі правильної упаковки бульбашок розрахований процес їх деформації і утворення плівок.*

**Ключові слова:** піна, газові бульбашки, піноутворення, рідинні плівки, розвинена піна.

*The process of expansion of plenty of blubs is considered in a incompressible viscid liquid. For small enough speeds the form of free frontier is determined. Forming of liquid tapes is probed at approaching of two blubs. The process of their deformation and formation of tapes is expected in the model of the correct packing of bubbles.*

**Keywords:** suds, blubs, foam-formation, liquid tapes, developed suds

*Рассмотрено процесс расширения большого числа газовых пузырьков в несжимаемой вязкой жидкости. Для достаточно малых скоростей определяется форма свободных границ. Исследуется формирование жидких пленок при сближении двух газовых пузырьков. В модели правильной упаковки пузырей рассчитан процесс их деформации и образования пленок.*

**Ключевые слова:** пена, газовые пузырьки, пенообразование, жидкие пленки, развитая пена.

**1. Постановка задачі.** Вважаємо, що у нестисливій в'язкій рідині знаходиться велика кількість газових бульбашок однакового об'єму  $V$ , які ростуть у часі із-за розширення газу чи за рахунок виділення газу з рідини. Вважаємо функцію  $V(t)$  відомою. Задача зводиться до визначення форми вільних границь залежно від часу. Необхідно визначити, як утворюються рідкі плівки, яка їх форма і товщина.

Можна побудувати наближену модель задачі у випадку досить малих швидкостей зміни об'єму бульбашок, коли малі числа капілярності і Вебера:

$$\frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \ll 1; \quad \frac{\rho R_v}{\sigma} \left( \frac{dR_v}{dt} \right)^2 \ll 1, \quad (1)$$

де  $R_v$  – радіус сфери об'єму  $V$ . У цьому випадку на початковій стадії росту бульбашок, доки відстань між їх границями значна у порівнянні з радіусами, їх форма мало відрізняється від сфери. Умови (1) виражають малість динамічних напруг у порівнянні з капілярними силами. При малих значеннях чисел Рейнольдса  $(dR/dt)R/\nu$  достатньо прийняти одну першу умову (1).

Якщо відстань між поверхнями значно менша радіусів  $h \ll R$ , то в області найбільшого зближення границь можна застосувати наближення тонкого шару. Довжина плівки, симетричної між площинами  $x_1, x_2$ , становить:

$$\rho h \frac{dv_i}{dt} = hF_i + h\nabla_i \left( \frac{1}{2} \sigma \Delta h + \Pi \right) + 2\nabla_j P_{ij}^{(S)} + \nabla_j \left[ h\mu (2\delta_{ij} \operatorname{div} v + \nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \right], \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

$$\delta\mu_i = -h\nabla_j P_{ij}^{(S)}; \quad P_{ij}^{(S)} = \sigma\delta_{ij} + \lambda_s \operatorname{div} v \delta_{ij} + \mu_s (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i); \quad \operatorname{div}(h\bar{u} + h\bar{v}) = -\frac{\partial h}{\partial t},$$

де  $v$  – швидкість поверхні;  $u$  – середня в перерізі плівки швидкість рідини відносно поверхні;  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу;  $\Pi$  – тиск розклинення [2];  $\mu_s$  і  $\lambda_s$  – коефіцієнти в'язкості

поверхневого шару. Рівняння (2) дійсні за умов, що товщина шару повільно змінюється вздовж координат,  $h \ll \ell$ , де  $\ell$  – характерний масштаб зміни  $h$  і параметрів течії; приведене число Рейнольдса при цьому  $h^2 u / (\nu \ell) \ll 1$ , а характерний час  $\tau \gg h^2 / \nu$ . Сила тяжіння діє вздовж плівки, тому що протяжність плівки досить мала  $r \ll \sigma / (R\rho g)$  і викривлення її середньої поверхні не суттєве.

Рівняння замикаються додатковими співвідношеннями для визначення значень поверхневого натягу  $\sigma$ , змінних з причини впливу поверхнево-активних речовин. Цей вплив вважаємо значним і тому зміни елемента площі поверхні плівки не залежить від її динаміки. Цьому випадку відповідає постійна вздовж поверхні швидкість розширення поверхні,  $\text{div } \mathbf{v} = \text{const}$ , і тому перше рівняння системи (2) буде аналогічним рівнянню Нав'є-Стокса, а рівняння нерозривності служить для визначення товщини  $h$ . У порівнянні з плоскою задачею для рівняння Нав'є-Стокса для визначення руху у нашому випадку на границі необхідно задати дві додаткові скалярні умови, тому що рівняння має четвертий порядок по  $h$ . Наприклад, вздовж деякої лінії  $\Gamma$  можна задати чотири значення  $v_1, v_2, h, \Delta h$ .

Граничні умови для рівнянь (2) у розглядуваній задачі раніше невідомі. Їх необхідно визначити з умови зрощування рішення з рішенням рівнянь в області великих відстаней між поверхнями бульбашок.

Форма вільної поверхні на достатній відстані від поверхні сусідньої бульбашки (зовнішня область) за умов (1) описується рівнянням рівноваги

$$\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_\sigma = p_g - p_f^{(0)} + \rho(U - U_{(0)}), \quad (3)$$

де  $p_\sigma$  – різниця тиску в газі  $p_g$  і рідині  $p_f$ ;  $U$  – потенціал зовнішніх масових сил; індекс (0) відповідає деякій точці поверхні;  $R_1$  і  $R_2$  – головні радіуси кривизни.

Рівняння (3) може бути порушеним в області малих відстаней між поверхнями бульбашок, де необхідно розглядати (2). Нехай плівка між бульбашками має відстань  $r$ , яка значно перевищує її товщину, а також величину  $(Rh)^{0.5}$ . Тоді можна ввести границю плівки  $\Gamma$  – плоский контур, вздовж якого відстань між поверхнями бульбашок перетворюється в нуль по відношенню до великого характерного значення цієї відстані  $R$  в зовнішній області.

Якщо поверхня бульбашки підходить до краю плівки під достатньо малим кутом  $\alpha$ , то наближення тонкого шару придатне не тільки всередині контуру  $\Gamma$ , але і в певній області поза ним. На границі зовнішньої області  $\Gamma$  для рівняння (3) необхідно задати умови:

$$h|_\Gamma = 0; \quad \left. \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial n} \right|_\Gamma = \text{tg} \alpha. \quad (4)$$

Для визначення руху плівки необхідно виконати такі умови, щоб поза  $\Gamma$  в межах  $h/h_0 \rightarrow \infty$  величина  $h$  прямувала до розв'язку наступного рівняння з граничними умовами на  $\Gamma$ :

$$\frac{1}{2} \sigma \Delta h = p_\sigma, \quad h|_\Gamma = 0. \quad (5)$$

Це співвідношення відповідає двом граничним умовам для вирішення (2). Ще дві умови можна отримати з умови зрощування швидкості  $v$  зі значеннями в зовнішній області.

**2. Стрибок капілярного тиску.** Введемо безрозмірні позначення у граничні умови (5)

$$h = h_0 h'; \quad x = \ell x'; \quad \ell = \sqrt{\frac{h_0 \sigma}{2 p_\sigma}}, \quad (6)$$

де  $h_0$  – мала товщина плівки всередині контуру  $\Gamma$ , відповідає малому масштабу  $\ell \sim \sqrt{Rh}$ . Величина  $\ell \ll r$ , тому що плівка існує тільки за цієї умови [1, 3]. Перехід від зовнішньої області до плівки (внутрішня область) відбувається у вузькій області, де має місце стрибок.

Аналізуючи перше рівняння (2) у змінних малого масштабу (6) і випускаючи малі величини порядку числа Вебера,  $h^2/\ell^2$ ,  $\ell/r$  і  $\ell/R$ , отримаємо:

$$h \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \Pi \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} P_{xx}^{(s)} = 0, \quad P_{xx}^{(s)} = \sigma + (\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial v_n}{\partial x}. \quad (7)$$

Зміна поверхневого натягу вздовж плівки незначна,  $\Delta\sigma \ll \sigma$ . Тому в умові для нормальної напруги на поверхні коефіцієнт  $\sigma = \text{const}$ .

Інтегруючи (7) за цих умов, матимемо:

$$2\sigma + \frac{\sigma h}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \int h \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh + 2(\lambda_s + 2\mu_s) \frac{\partial v_n}{\partial x} = \text{const}. \quad (8)$$

Дотична до контуру  $\Gamma$  швидкість на стрибку завжди безперервна  $v_\tau = \text{const}$ , як це можна бачити з теореми збереження імпульсів в інтегральній формі.

Для рівняння нерозривності (2) на стрибку, як і в (7), достатньо одомірної апроксимації. Розраховуючи значення  $u$ , знайдемо ( $x$  – відстань по нормалі до  $\Gamma$ ):

$$\frac{\partial h}{\partial t} - w_n \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (h v_n) - \frac{\sigma}{24\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3 \partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Рівняння записане у системі, яка рухається по нормалі до  $\Gamma$  разом з точкою  $x=0$  контуру  $\Gamma$ ; величина  $w_n$  – нормальна швидкість точки контуру  $\Gamma$ . Для замикання системи (7), (8) необхідно навести чи рівняння, які зв'язують  $\sigma$  з параметрами руху, і вважати  $v_n$  змінною, чи розглянути випадок нестисливої поверхні. В останньому випадку замикаюче співвідношення:  $v_n = \text{const}$  по координаті.

Умова зрощення рішення з рішенням задачі у внутрішній області

$$h \rightarrow h_0, \quad x/\ell \rightarrow -\infty. \quad (10)$$

Умова переходу до зовнішнього розв'язку записується на основі (5)

$$h \rightarrow h^{(e)}, \quad x/\ell \rightarrow \infty. \quad (11)$$

За таких умов і у відповідності з рівнянням (5) і визначенням поняття лінії  $\Gamma$  зовнішнє рішення становить:

$$h^{(e)} = \begin{cases} (p_\sigma / \sigma) x^2 + h_{\min}^{(e)}, & h_{\min}^{(e)} > 0; \\ (p_\sigma / \sigma) x^2 + 2\text{tg}\alpha x, & h_{\min}^{(e)} > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Лінія  $\Gamma$  визначається як лінія рівності нулю товщини  $h^{(e)}$  чи як лінія мінімуму цієї товщини  $[h_{\min}^{(e)} = O(h_0)]$ .

Зміну  $\sigma$  вздовж стрибка і повну зміну  $\sigma$  на стрибку запишемо на підставі (8), (10) і (11) не ураховуючи при цьому поверхневу в'язкість

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_{(e)} + \frac{\sigma}{4} h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{8} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \int_h^\infty \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh &= \Delta; \\ \sigma_{(i)} - \sigma_{(e)} &= \Delta + \frac{1}{2} \int_{h_0}^\infty \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} h_{\min}^{(e)} p_\sigma, \quad \Delta > 0; \quad \Delta = -\frac{1}{2} \sigma \text{tg}^2 \alpha, \quad \Delta < 0.$$

Під час утворення плівки, коли контур  $\Gamma$  розширюється ( $w_n > 0$ ) чи коли контур  $\Gamma$  нерухомий і відбувається потоншення плівки [3], поверхня плівки всередині контуру  $\Gamma$  зазвичай більш розтягнута, ніж із зовні, тому величина  $\sigma_{(i)} > \sigma_{(e)}$ . При цьому, як видно з (12) і (13) для випадку  $\Pi \approx 0$ , зовнішня поверхня прямує до дотичної до плівки при масштабі  $R$ , величина кута  $\alpha \equiv 0$  у граничній умові (4).

Кут  $\alpha \neq 0$  можливий тільки при  $\Delta < 0$ , коли  $\sigma_{(i)} < \sigma_{(e)}$ . При  $\Pi \approx 0$  (плівка макроскопічної товщини) це зазвичай можливе при стисненні поверхні всередині  $\Gamma$ . Але навіть у тому випадку, коли кут  $\alpha$  можна визначити з рівнянь стрибка ( $\sigma_{(i)} < \sigma_{(e)}$ ), його значення залишається

дуже малим для постановки задачі рівноваги (3), якщо справедливе наближення тонкого шару.

Важливо, що в разі виконання (13) малим значенням товщини плівки  $h_0$  і малим кутам  $\alpha$  завжди відповідають малі значення зміни поверхневого натягу на стрибкі:  $\Delta \sim h_0 p_\sigma$  чи  $\Delta \sim \sigma \alpha^2$ .

Якщо перейти до безрозмірних позначень (6) і часу  $t' = t/\tau$ , де  $\tau$  – часовий масштаб зміни контуру  $\Gamma$  і капілярного тиску  $p_\sigma$ , знайдемо умову справедливості квазістаціонарного наближення:  $\tau |v_n - w_n| \gg \ell$ . Характерні час  $\tau$ , масштаб  $s$  і швидкість  $w_n$  переміщення контуру  $\Gamma$  зв'язані між собою наступним чином  $s \sim v_n \tau$ , виходячи з цього остання умова еквівалентна нерівності:

$$\frac{\ell}{s} \ll \frac{w_n - v_n}{w_n}, \quad (14)$$

яка виконується, коли швидкість руху контуру  $\Gamma$  змінюється на великій відстані  $s \gg \ell$  і якщо відносна швидкість не дуже мала в порівнянні з  $w_n$ . При утворенні плівки її розмір  $r \gg \ell$  і умова (14) виконується ( $s \sim r$ ).

Нехтуючи явною залежністю від часу (9), отримаємо з урахуванням (10)

$$w_n (h - h_0) = v_n h - v_{n0} h_0 + \frac{\sigma}{24\mu} h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \Pi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (15)$$

де  $v_{n0}$  – значення  $v_n$  на границі внутрішньої області при  $x/\ell \rightarrow -\infty$ ,  $v_n$  – у загальному випадку змінна величина.

Розглянемо граничний випадок нестисливої поверхні,  $v_n = \text{const}$ . Обмежимося також макроскопічною товщиною плівки  $\Pi = 0$  (для  $\Pi \neq 0$  аналогічні задачі розглянуті в [6]). Заміна змінних (6) в (15), (10), (12) так, щоб

$$\ell = \sqrt{\frac{\sigma h_0}{2p_\sigma}} = \frac{h_0}{\sqrt{c}} \left[ \frac{\sigma}{24\mu(w_n - v_n)} \right]^{1/3}, \quad (16)$$

де для визначення невідомої величини  $c$  необхідно розв'язати наступну задачу:

$$y^3 y''' - y + 1 = 0, \quad y|_{-\infty} = 1, \quad y''|_{+\infty} = c.$$

Числовий розрахунок дозволяє отримати величину  $c = 0,6429$ , тоді з (16) слідує

$$h_0 = 2,675 \frac{\sigma}{p_\sigma} \left[ \frac{\mu(w_n - v_n)}{\sigma} \right]^{2/3}, \quad w_n - v_n > 0. \quad (17)$$

Якщо виконується остання нерівність, то товщина плівки визначається однозначно, у протилежному випадку виникає один довільний параметр у розв'язку, який призводить до того, що значення  $h_0$  у внутрішній області не визначається, а задається.

**3. Рівняння поза стрибком.** Розглянемо область всередині і поза контуром  $\Gamma$ . Розмір внутрішньої області набагато більший масштабу  $r \gg \ell$ . Масштаб зміни функції за координатою у внутрішній області становить  $r$ , за часом  $\sim r/w$ , характерне значення товщини  $\sim h_0$ . Порівняння, з урахуванням сказаного, рівняння (2) у внутрішній області з рівнянням на стрибкі (7) показує, що з точністю до малих  $\sim (\ell/r)^2$  можна випустити внесок  $\Delta h$  в (2). Випускаючи також малі величини порядку числа Вебера, отримаємо:

$$hF_i + h\nabla_i \Pi + 2\nabla_j P_{ij}^{(s)} = 0. \quad (18)$$

У разі малих масових сил ( $\rho g r R \ll 2\sigma$ ) і поверхневої в'язкої напружки, рівняння (18) інтегрується

$$2\sigma + \int h \frac{\partial \Pi}{\partial h} dh = \text{const}. \quad (19)$$

Для макроскопічних плівок інтегралом (19) варто знехтувати, тому що поверхневий натяг у внутрішній області приблизно стала величина. Зміна натягу  $\Delta\sigma_{(i)}$  асимптотичне мале в порівнянні зі зміною натягу на стрибкі  $\Delta$ , тоді

$$\Delta\sigma_{(i)} = O\left(\frac{\ell^2}{r^2}\Delta\right), \Delta = \left[\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)}\right]_{\Gamma}. \quad (20)$$

Зауважимо, що рівняння (20) може порушуватися на певних ділянках внутрішньої області, де  $h \gg h_0$ .

Рівняння збереження маси

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\sigma}{24\mu} \operatorname{div}(h^3 \operatorname{grad}\Delta h) - \operatorname{div}(vh) \quad (21)$$

спрощується при наявності малого параметра:

$$\Omega = \frac{h_0^3}{s^4} \frac{\sigma\tau}{24\mu} \ll 1 \quad (22)$$

У цьому рівнянні  $s$  – масштаб зміни параметрів руху контуру плівки  $\Gamma$ ,  $\tau$  – відповідний час зміни ( $\tau \sim r/w_n$ ). В області масштабу  $s$  рівняння (21) в першому наближенні за малим параметром  $\Omega$  набуває виду:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{div}(vh). \quad (23)$$

Рівняння (23) визначає товщину плівки у внутрішній області, де  $s \sim r$ . Умову (22) можна подати у більш зручній формі, якщо урахувати (16):

$$\Omega \sim \frac{\ell^3}{s^3} \frac{w_n - v_n}{w_n} \ll 1. \quad (24)$$

Тому що  $|w_n - v_n| \leq |w_n|$ , то умова (24) виконана, якщо справедлива умова квазістаціонарності стрибка (14).

У зовнішній до контуру  $\Gamma$  області, де відстань між вільними границями велика, рух визначається рівнянням Нав'є-Стокса в області з границею, яка задається рівняннями рівноваги (3). Враховуючи, що масштаб зміни функції має порядок розміру області  $R$ , оцінимо максимальну величину зміни поверхневого натягу  $\sigma$  під дією дотичної напруги

$$\Delta\sigma_{(e)} \sim \mu\nu \sim \sqrt{h/R} \left[\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)}\right]_{\Gamma} \ll \left[\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)}\right]_{\Gamma}. \quad (25)$$

Із залежності (25) слідує, що для тонких плівок натяг внутрішньої області постійний  $\sigma_{(e)} = \text{const}$ . Таким чином, основна зміна поверхневого натягу має місце в області стрибка. При цьому, виходячи з (20) величина  $\sigma_{(i)} - \sigma_{(e)}$  вздовж  $\Gamma$  постійна. Ця додаткова умова, яка накладається на стрибок, приводить до сталості основних параметрів вздовж границі плівки, якщо  $w_n - v_n > 0$ :

$$(w_n - v_n)|_{\Gamma} = \text{const}, h_0|_{\Gamma} = \text{const}. \quad (26)$$

У цьому випадку величина  $h_0|_{\Gamma}$  визначається, якщо відома величина  $w_n - v_n$ . У випадку, якщо для області  $\Gamma$  величина  $w_n - v_n < 0$ , розв'язок на стрибкі включає додатковий параметр і величина  $h_0$  може змінюватися вздовж  $\Gamma$  і може вважатися величиною, що задається.

Рух рідини у зовнішній області викликається зміною форми вільної поверхні, яка описується квазістатичним рівнянням (3) зі змінними параметрами. Рух залежить від значень нормальної швидкості  $v_n^{(e)}$  на лінії повернення вільної поверхні  $\Gamma$ . Дотична швидкість на  $\Gamma$  повинна бути обмеженою, вона визначається з розв'язку задачі, якщо поверхнева в'язкість дорівнює нулю. Якщо поверхнева в'язкість відмінна від нуля, то дотичну швидкість на  $\Gamma$  необхідно задавати.

**4. Замикаючі співвідношення.** У загальному випадку необхідно розглядати рівняння переносу поверхнево-активних речовин (ПАР) з залученням ізотерми адсорбції і

поверхневого натягу. Але в окремих граничних випадках можна обійтися без цих рівнянь. Якщо вплив ПАР великий і поверхня нестислива по відношенню до дії в'язких напруг, при цьому властивості поверхні півки по відношенню до зміни її площі не відрізняються від властивості поверхні рідини безмежної глибини, то швидкість зміни елементів площі поверхні будуть скрізь однаковою і відповідною швидкості зміни площі поверхні бульбашки  $S$ . Так, для області півки

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dt}. \quad (27)$$

В іншому випадку поверхневий натяг в області півки при її малій товщині може набагато сильніше залежати від зміни елементу площі, ніж у випадку поверхні рідини безмежної глибини. Тоді елементи площі поверхні півки не будуть змінюватися

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (28)$$

Формули (3), (4) з  $\alpha = 0$ , (15) чи у випадку нестисливої поверхні (17), (23) і (26), а також (27) чи (28) дають замкнений опис у випадку одномірної задачі. У не одномірній задачі ці формули дозволяють визначити повну кількість рідини у півці і товщину вздовж її краю у залежності від часу в процесі її формування.

**5. Форма поверхні в зовнішній області.** У системі зі щільно упакованими бульбашками малій деформації сферичного утворення відповідає малий радіус контуру  $\Gamma$  площі контакту. При цьому півка має малий розмір, що спостерігається на початку утворення любої півки.

Використовуючи малість деформацій, розглянемо лінійну задачу про стискання бульбашки фіксованого об'єму  $V$  силами  $F_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 2N$ ) спрямованими вздовж радіуса, які є рівнодіючими однорідного додаткового тиску  $p_\sigma$ , прикладеного на малих плоских поверхнях з радіусом  $r$

$$|F_\alpha| = \pi r^2 p_\sigma, \quad F_\alpha = -F_{\alpha+N}, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

Нормальне переміщення поверхні бульбашки

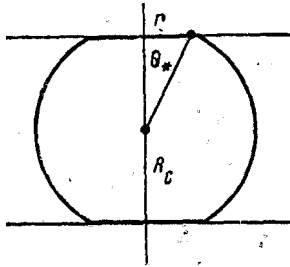


Рис.1. Деформація бульбашки між двома плоскими поверхнями

$$U = \sum_{\alpha=1}^N U_\alpha, \quad (29)$$

де  $U_\alpha$  – переміщення, викликане стисканням бульбашки між двома площинами (рис.1) силами  $F_\alpha, F_{\alpha+N}$ .

Розглянемо достатньо малі бульбашки, для яких можна не враховувати подразнення їх форми силою тяжіння ( $\rho g R^2 \ll 2\sigma$ ).

Задача про деформацію бульбашки між двома пластинами носить симетричний відносно осі характер, виходячи з цього в полярних координатах  $R, \theta$  в області  $\theta \in (\theta_*, \pi - \theta_*)$  рівняння (3) набуває виду:

$$\frac{R^2 + 2R_0'^2 - RR_\theta'^2}{(R^2 + R_\theta'^2)^{3/2}} + \frac{1 - \operatorname{ctg}\theta (R_\theta' / R)}{(R^2 + R_\theta'^2)^{1/2}} = \frac{p_\sigma}{\sigma} = \operatorname{const}. \quad (30)$$

Функція  $R(\theta)$  повинна бути симетричною відносно  $\pi/2$ ,  $R(\theta - \pi/2) = R(\theta + \pi/2)$ , а при  $\theta = \theta_*$  нахил дотичної дорівнює нулю. Отже

$$\operatorname{ctg}\theta R_\theta' = R, \quad \theta = \theta_*, \quad R(\theta_*) \cos\theta_* = R_c, \quad (31)$$

де  $R_c$  – половина відстані між площинами.

Величина об'єму бульбашки задається рівнянням:

$$\frac{2\pi}{3} \int_{\theta_*}^{\pi-\theta_*} \sin\theta d\theta = V.$$

Для малих деформацій бульбашки  $R_0/R \ll 1$  і величині  $R$  близькій до  $R_0$ :

$$R = R_0 + \delta, \quad |\delta| \ll R_0, \quad R_0 = \frac{2\sigma}{p_\sigma}.$$

Рівняння (30) у лінійному наближенні

$$\delta_\theta'^2 + \delta_\theta' \operatorname{ctg} \theta + 2\delta = 0$$

має розв'язок, симетричний відносно  $\pi/2$ :

$$\delta = a \left( \frac{\cos \theta}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - 1 \right).$$

З урахуванням (31)

$$R_0 = R_c \left( 1 + \theta_*^2 \ln \frac{2}{\theta_*} - \frac{1}{2} \theta_*^2 \right).$$

У наведених формулах враховуються тільки асимптотично-головні члени при  $\theta_* \rightarrow 0$ . Величини  $R_0$  і  $R_c$  виражаються через радіус сфери еквівалентного об'єму  $R_v = [3V/(4\pi)]^{1/3}$ :

$$R_0 = \left( 1 - \frac{1}{3} \theta_*^2 \right) R_v, \quad R_c = \left( 1 - \theta_*^2 \ln \frac{2}{\theta_*} + \frac{1}{6} \theta_*^2 \right) R_v. \quad (32)$$

Нормальне переміщення площі контакту становить:

$$U_\alpha = R_c - R_v = \left( \frac{1}{6} \theta_*^2 - \theta_*^2 \ln \frac{2}{\theta_*} \right) R_v, \quad (\theta < \theta_*), \quad (33)$$

а нормальне переміщення поверхні на віддалі від площі контакту буде

$$U_\alpha = - \left( \frac{\cos \theta}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{2}{3} \right) \theta_*^2 R_v, \quad (\theta \gg \theta_*). \quad (34)$$

Лінійне рівняння відрізняється від точного (30) на малу при  $\theta_* \rightarrow 0$  величину порядку  $\theta_*^2 \ln(1/\theta_*)$ .

**6. Утворення плівок при правильній упаковці бульбашок.** Нехай центри бульбашок розташовані у вузлах правильної решітки, окрема комірка з бульбашкою є дванадцятигранник. При розширенні газових бульбашок система рідина – бульбашки розширюється однорідно. При симетричному розміщенні бульбашок, при малих числах Рейнольдса в'язкі сили будуть діяти симетрично, з нульовою результуючою силою і не викличуть відносних переміщень бульбашок.

У ромбододекаедрі (всі грані – ромби) нормаль до грані утворює кут  $60^\circ$  з лініями нормальними до чотирьох пар протилежних граней і кут  $90^\circ$  з одною такою лінією. Виходячи з цього із формул (29), (33) і (34) переміщення контакту дорівнює:

$$U = R_c - R_v = - \left( \ln \frac{6R_v}{r} - \frac{7}{2} \right) \frac{r^2}{R_v}. \quad (35)$$

Ураховуючи, що об'єм комірки ( $32^{0.5} R_c^3$ ) дорівнює  $V + V_*$ , де  $V_*$  – об'єм рідини, знайдемо з (35)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{R_v \left( 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \right)}{2r \left( \ln \frac{6R_v}{r} - 4 \right)} \frac{dR_v}{dt}. \quad (36)$$

Для малих значень  $r$  швидкість  $v_n$  на контурі  $\Gamma$ , яка визначається розширенням поверхні бульбашки, має малий порядок  $r$ , тому

$$(w_n - v_n)|_\Gamma = \frac{dr}{dt} + O \left( r \frac{R_v'}{R_v} \right). \quad (37)$$

З (36), (37) і (17) можна отримати формулу для товщини утвореної плівки у залежності від відстані до її центру:

$$h_0 = 0,685R_v \left( \frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \right)^{2/3} \left( \frac{R_v/r}{\ln(6R_v/r) - 4} \right)^{2/3}. \quad (38)$$

З рівняння (38) виходить, що товщина плівки суттєво змінюється вздовж радіуса, у центрі плівка сильно потовщена. Максимальна товщина визначається умовою, коли з'являється стрибок,  $\sqrt{h_0 R_0} \sim r$ . Звідси ж знаходиться характерний мінімальний розмір  $r$ , з якого розпочинається утворення плівки. Ці величини мають наступний порядок:

$$\max h_0 \sim R_v \left( \frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \right)^{1/2}, \quad \min r \sim R_v \left( \frac{\mu}{\sigma} \frac{dR_v}{dt} \right)^{1/4}.$$

З (38) виходить також, що для отримання товстих плівок необхідно досягнути великої швидкості зближення поверхонь бульбашок у момент їх зштовхування. Чим більша швидкість виділення газу, тим більша товщина отриманих плівок. Аналогічним чином впливає в'язкість рідини  $\mu$ .

**7. Формування плівок у розвиненій піні.** У граничному випадку сильно деформованих бульбашок рідина скупчується у вузьких нитках (канали Плато-Гіббса) вздовж ребер багатогранника. За винятком вершин, скрізь один радіус кривизни набагато менший за другий,  $R_1 \ll R_2$ . З урахуванням (3) для  $\rho g R_1^2 \ll \sigma$  і (4) з кутом  $\alpha = 0$  з (п. 2) виходить, що у перерізі поверхня каналів представляє собою три до кола одного радіуса  $R_1$ , як це спостерігається у статичній задачі.

Величини об'ємів рідини, які входять в комірку  $V_*$  і бульбашку  $V$  зручно представити через початкове значення  $n_0$  (коли  $V = 0$ ) чи поточне значення  $n$  кількості бульбашок в одиниці об'єму, а також через об'ємну частку рідини  $\gamma$ :

$$n_0 V_* = 1, \quad n(V + V_*) = 1, \quad \gamma = \frac{V_*}{V + V_*}, \quad n = \gamma n_0. \quad (39)$$

Розглянемо піну з комірками у вигляді правильних багатогранників. При  $R_1 \ll R_v$  для половини відстані між протилежними плівками у комірці  $R_c$  і об'єму рідини у комірці наближено маємо:

$$R_c = \left( \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \right)^{1/3} R_v + O\left( \frac{R_1^2}{R_v} \right), \quad V_* = 6\sqrt{2} \left( 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) R_1^2 R_c.$$

Для випадку, коли розширення поверхні плівки відбувається зі швидкістю розширення поверхні газової бульбашки (п. 4), розрахунки дають:

$$(w_n - v_n)|_{\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R_1}{R_v} \frac{dR_v}{dt}, \quad R_v = \left( \frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3}. \quad (40)$$

Для випадку плівки, яка не розтягується (п. 4)

$$(w_n - v_n)|_{\Gamma} = \left[ \frac{(\pi/3\sqrt{2})^{1/3}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{R_1}{R_v} \right] \frac{dR_v}{dt}. \quad (41)$$

Формули (40) чи (41) і (17) дають вираз для товщини формування плівки, відрізняються від (38) тим, що змінність товщини пов'язана тепер тільки зі зміною в часі  $R_1/R_v$  і  $R_v$ . У випадку (40) зміна товщини відбувається також за рахунок одночасного розширення плівки.

**Висновки:** 1.3 рівняння (41) видно, що у випадку вертикальної поверхні плівки її товщина буде значно більшою, ніж у випадку рівномірного розширення плівки в усі сторони

2. Формування плівки закінчується, коли швидкість  $R'_v$  зменшується настільки, що умова (14) перестає виконуватися, і тоді необхідно розв'язувати задачу про потоншення плівки.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. *Воинов О.В.* Уравнение движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утоньшения. – Доклады АН СССР, 1974, т. 216, № 2. – С. 285–288.
2. *Воинов О.В.* К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости. – ПМТФ, 1974, № 3. – С. 67–71.
3. *Воинов О.В.* Процесс образования пены из вязкой жидкости. Прикладная математика и механика, 1981, т. 45, вып.4. – С.686–695.