

*Початку третього тисячоліття
присвячується
Началу третього тисячоліття
посвящується
To the Beginning of the Third Millennium*

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикла

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И КРАТКОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail stochac@imech.kiev.ua*

Abstract. The studies on the theory of deformation and short-time damageability of physically nonlinear homogeneous and composite materials are systemized. The single microdamage is modeled by the formation of the empty quasi-spherical pore instead the microvolume, which is damaged owing to the Huber-Mises criterion. The equation of porosity balance is formulated, which together with the equations of link between macrostresses and macrostrains forms the closed system. A dependence of damageability on macrostrains and the diagram of macrodeformation of homogeneous and composite materials is investigated.

Key words: composite material, stochastic structure, physical nonlinearity, short-time damageability, porosity, effective deformative characteristics.

Введение.

Многие однородные и композитные материалы при увеличении нагрузки проявляют нелинейный характер зависимостей между макронапряжениями и макродеформациями. Это может быть обусловлено физической нелинейностью деформирования компонентов [14], а также образованием рассеянных микроповреждений [33], проявляющихся в виде возникновения микротрещин или микропор в местах разрушенных микрообъемов [55, 56, 66]. Первый вид нелинейности является типичным для композитов на основе пластической металлической матрицы, а также на основе полимеров при повышенных температурах. Второй вид нелинейности характерен для материалов с хрупкими компонентами, таких как полимерные композиты при низких температурах, композиты с углеродным связующим, керамические композиты и т.п. В действительности оба вида нелинейности проявляются одновременно, поэтому представляет интерес исследование связанных процессов физически нелинейного деформирования и повреждаемости однородных и композитных материалов.

Прогнозирование эффективных деформативных свойств композитных материалов, компоненты которых следуют закону нелинейной связи между напряжениями и деформациями, связано с решением физически нелинейной задачи упругости для микронеоднородного тела, трудности которого существенно возрастают по сравнению с линейной задачей, особенно для регулярных структур [6]. В случае стохастической структуры использование свойства эргодичности [36, 37, 49] позволяет заменить усреднение окончательного решения по макрообъему предварительным статистическим усреднением в одной точке, что существенно упрощает постановку задачи и ее решение. Сингулярное [49] или одноточечное [36] приближение позволяют исследовать нелинейную задачу только для композитных материалов с квазисферическими структурными элементами или армированных однонаправленными бесконечными волокнами. Применение метода условных моментов [37] дает возможность привести

задачу об эффективных свойствах физически нелинейных композитных материалов с произвольной формой структурных элементов к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций. Это позволило исследовать нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов [43] на основе мягкой металлической или полимерной матрицы и твердых частиц квазисферической формы.

Повреждаемость материала, проявляющаяся в виде образования рассеянных стохастически расположенных микроразрушений, может быть кратковременной [55, 56], происходящей мгновенно при нагружении, а также длительной [57], происходящей как накопление микроразрушений в течение некоторого времени. Реальная повреждаемость материала в общем случае является комбинированной, т.е. кратковременная повреждаемость дополняется длительной с течением времени.

Известные математические модели повреждаемости материала можно разделить на три направления. Первое направление исходит из микронеоднородности деформативно-прочностных свойств материала, что приводит при нагружении к образованию рассеянных микроразрушений, моделируемых системой микротрещин или микропор [3, 7, 13, 17, 19, 20, 27 – 34, 40 – 46, 50, 51, 55 – 87]. Уравнения повреждаемости здесь строятся на основе теории деформирования структурно-неоднородных сред и определенных критериев разрушения микрообъемов материала. В основе второго направления лежит формальное представление о параметре поврежденности, как некоторой меры нарушения сплошности материала без указания ее физического смысла, и постулирование для него эволюционного уравнения в виде зависимости скорости образования повреждений от действующих напряжений [1, 8 – 10, 15, 16, 25, 26]. Третье направление предполагает, что поврежденность описывается не структурными параметрами, а термодинамическими, дающими свой вклад, наряду с напряжениями и деформациями, в законы термодинамики. На этой основе формально записываются зависимости между напряжениями, деформациями и параметрами поврежденности [2, 5, 18, 23, 24, 52, 53].

Очевидно, что неформальное первое направление является наиболее адекватным моделированием реальных процессов повреждаемости материала. Исходя из стохастической неоднородности микропрочности, свойственной реальным материалам и описываемой вероятностными распределениями, можно объяснить процесс и построить модель как кратковременной (мгновенной) повреждаемости [55, 56], проявляющейся в момент приложения нагрузки, так и длительной, представляющей собой процесс накопления микроразрушений во времени после приложения нагрузки [57].

Математическая теория связанных процессов деформирования и кратковременной повреждаемости материала основана на моделировании разрушенных микрообъемов системой микропор (пустых или заполненных частицами разрушенного материала) и описании микродеформирования и эффективных упругих свойств пористого материала методами стохастических уравнений теории упругости. Разрушение микрообъема определяется критерием Губера – Мизеса или Шлейхера – Надаи, где предел микропрочности является случайной функцией координат с определенным законом статистически однородного одноточечного распределения, удовлетворяющего свойству эргодичности. Это позволяет сформулировать уравнение баланса микроповреждений, моделируемых пористостью, которое совместно с уравнениями состояния и эффективных модулей описывают связанные процессы деформирования и повреждаемости как при линейном, так и при физически нелинейном законе упругости.

Настоящая работа посвящена систематизации исследований по теории деформирования и кратковременной повреждаемости физически нелинейных композитных материалов стохастической структуры. В основу положены работы, выполненные в Институте механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины на протяжении 1998 – 2006 годов.

§1. Однородный материал.

Рассмотрим физически нелинейное деформирование изотропного материала, описываемое зависимостью модуля сдвига μ от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью в процессе нагружения. Микроповреждаемость материала будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности.

Зависимости между макронапряжениями и макродеформациями описываются формулой

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (K^* - 2/3 \mu^*) \langle \varepsilon_{pp} \rangle \delta_{ij} + 2 \mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (1.1)$$

где эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористости p и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости пористого физически нелинейного материала сводится к итерационному алгоритму [39]. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются формулами

$$K^{*(n)} = \frac{4K\mu(J_{(n)}^1)(1-p)^2}{3Kp + 4\mu(J_{(n)}^1)(1-p)}; \quad \mu^{*(n)} = \frac{[9K + 8\mu(J_{(n)}^1)]\mu(J_{(n)}^1)(1-p)^2}{3K(3-p) + 4\mu(J_{(n)}^1)(2+p)}, \quad (1.2)$$

где $J_{(n)}^1 = [(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle)^{(n)} (\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle')^{(n)}]^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних деформаций по неповрежденной части материала в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}$.

В $(n+1)$ -ом приближении эти деформации определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p)} \left[\frac{K^{*(n)}}{K} V_{ij\alpha\beta} + \frac{\mu^{*(n)}}{\mu(J_{(n)}^1)} D_{ij\alpha\beta} \right] \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad (1.3)$$

здесь $V_{ij\alpha\beta}$, $D_{ij\alpha\beta}$ – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора $I_{ij\alpha\beta}$, т.е.

$$I_{ij\alpha\beta} = V_{ij\alpha\beta} + D_{ij\alpha\beta}; \quad V_{ij\alpha\beta} = 1/3 \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}; \quad D_{ij\alpha\beta} = 1/2 (\delta_{\alpha j} \delta_{i\beta} + \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} - 2/3 \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}). \quad (1.4)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяются как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (1.5)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала примем критерий прочности Губера – Мизеса [15]

$$I_\sigma^1 = k, \quad (1.6)$$

где $I_\sigma^1 = (\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' \langle \sigma_{ij}^1 \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ по неповрежденной части материала; k – предел микропрочности, являющийся случайной функцией координат.

Так как средние по неповрежденной части материала напряжения $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle'$ связаны с макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ зависимостями [33]

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle' = \frac{1}{1-p} \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad (1.7)$$

то из (1.6) получаем критерий прочности в пространстве макронапряжений

$$\frac{1}{1-p} I_\sigma = k, \quad (1.8)$$

где $I_\sigma = (\langle \sigma_{ij} \rangle' \langle \sigma_{ij} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора макронапряжений.

Если заданы макродеформации, то, согласно (1.1), (1.8), критерий прочности в пространстве макродеформаций принимает вид

$$\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1-p} I_\varepsilon = k, \quad (1.9)$$

где $I_\varepsilon = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора макродеформаций.

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F(k)$ предела микропрочности k неповрежденной части материала является степенной закон на некотором отрезке

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left(\frac{k-k_0}{k_1-k_0} \right)^n, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k > k_1, \end{cases} \quad (1.10)$$

а также распределение Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp[-m(k-k_0)^n], & k \geq k_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

где k_0 – минимальное значение предела микропрочности; k_1, m, n – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности k является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k и распределение микронапряжений в материале при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F(k)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij} \rangle'$ функция $F(I_\sigma^1)$ согласно (1.6), (1.10), (1.11) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость p_0 , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [55]

$$p = p_0 + (1-p_0)F(I_\sigma^1). \quad (1.12)$$

Если заданы однородные макронапряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle'$, то, согласно (1.8), уравнение баланса пористости (1.12) имеет вид

$$p = p_0 + (1-p_0)F\left(\frac{1}{1-p}I_\sigma\right). \quad (1.13)$$

При заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle'$ приходим, согласно (1.9), к уравнению

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1 - p}I_\varepsilon\right). \quad (1.14)$$

Таким образом, при заданных макронапряжениях микроповреждаемость материала, как следует из (1.13), не зависит от упругих свойств материала, включая и физическую нелинейность. При заданных макродеформациях микроповрежденность определяется более сложным уравнением (1.14), которое содержит эффективный модуль сдвига μ^* , зависящий от пористости и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Уравнения (1.1), (1.14) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости материала. Физическая нелинейность влияет на образование пористости материала при деформировании, изменение пористости в процессе деформирования влияет на кривую деформирования. Поэтому результирующая диаграмма деформирования обусловлена физической нелинейностью материала и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости материала при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости пористого материала, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.2) – (1.4), и определению пористости из уравнения (1.14), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (1.14) для n -го шага итерационного процесса (1.2) – (1.4) в виде

$$f^{(n)}(p) \equiv p - p_0 - (1 - p_0)F\left(\frac{2\mu^{*(n)}(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1 - p}I_\varepsilon\right) = 0. \quad (1.15)$$

Тогда определение корня p уравнения (1.15) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p^{(m,n)} = Af^{(n)}(p^{(m-1)}), \quad (1.16)$$

где A – определенный оператор, действующий на функцию $f^{(n)}(p)$. Искомый корень определяется как предельное значение

$$p = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p^{(m,n)}. \quad (1.17)$$

Соотношения (1.1), (1.5), (1.17) дают решение поставленной задачи, т.е. для заданного физически нелинейного материала они определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности (зависимости p от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости материала, объемные деформации которого являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме имеют место соотношения

$$\sigma_{rr} = K\varepsilon_{rr}; \quad \sigma'_{ij} = 2\mu(J)\varepsilon'_{ij}. \quad (1.18)$$

Здесь модуль объемного сжатия K не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu(J)$ описывается функцией

$$\mu(J) = \begin{cases} \mu_0, & T \leq k; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{T_0}{2J}, & T \geq k, \end{cases} \quad (1.19)$$

причем

$$J = (\varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij})^{1/2}; T = (\sigma'_{ij} \sigma'_{ij})^{1/2}; k = \sigma_{2T} \sqrt{2/3}, \quad (1.20)$$

где $\varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}$ – девиаторы соответственно тензоров деформаций и напряжений; σ_{2T} – предел текучести на растяжение, который принимаем независимым от координат; μ_0, μ' – постоянные материала.

Алгоритм определения корня p уравнения (1.15) будем строить на основе метода секущих [4]. Так как корень p находится в интервале $[p_0, 1]$, что следует из неравенств

$$f^{(n)}(p_0) \leq 0; f^{(n)}(1) \geq 0, \quad (1.21)$$

то, согласно методу секущих, нулевое приближение корня $p^{(0,n)}$ определяется формулой

$$p^{(0,n)} = \frac{a^{(0)} f^{(n)}(b^{(0)}) - b^{(0)} f^{(n)}(a^{(0)})}{f^{(n)}(b^{(0)}) - f^{(n)}(a^{(0)})}, \quad (1.22)$$

где $a^{(0)} = p_0, b^{(0)} = 1$.

Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p^{(m,n)} = Af^{(n)}(p^{(m-1,n)})(p^{(m-1,n)}) \equiv \frac{a^{(m)} f^{(n)}(b^{(m)}) - b^{(m)} f^{(n)}(a^{(m)})}{f^{(n)}(b^{(m)}) - f^{(n)}(a^{(m)})}; \quad (1.23)$$

$$a^{(m)} = a^{(m-1)}, b^{(m)} = p^{(m-1,n)} \quad \text{при} \quad f^{(n)}(a^{(m-1)}) f^{(n)}(p^{(m-1,n)}) \leq 0;$$

$$a^{(m)} = p^{(m-1,n)}, b^{(m)} = b^{(m-1)} \quad \text{при} \quad f^{(n)}(a^{(m-1)}) f^{(n)}(p^{(m-1,n)}) \geq 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$|f^{(n)}(p^{(m,n)})| < \delta, \quad (1.24)$$

где δ – точность вычисления корня.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости однородного материала, имеющего диаграмму линейного упрочнения (1.18), (1.19) с постоянными [12]

$$K = 3,33 \text{ ГПа}, \mu_0 = 1,11 \text{ ГПа}, \mu' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (1.25)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности $\sigma_p = k_0 \sqrt{3/2}$ на растяжение

$$\sigma_0 = 0,003 \text{ ГПа}; \sigma_p = 0,011 \text{ ГПа}; \quad (1.26)$$

$$\sigma_0 = \sigma_p = 0,007 \text{ ГПа}; \quad (1.27)$$

$$\sigma_0 = 0,015 \text{ ГПа}; \sigma_p = 0,003 \text{ ГПа} \quad (1.28)$$

при заданных макропараметрах

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0. \quad (1.29)$$

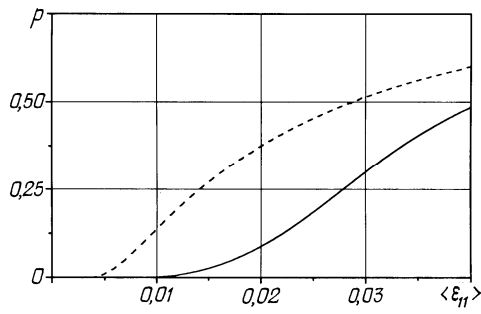


Рис. 1.1

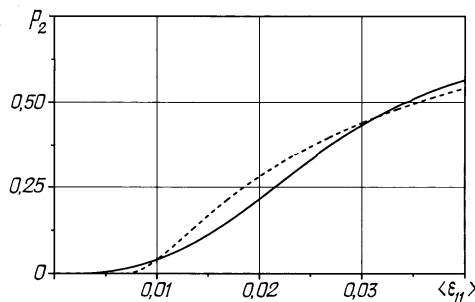


Рис. 1.2

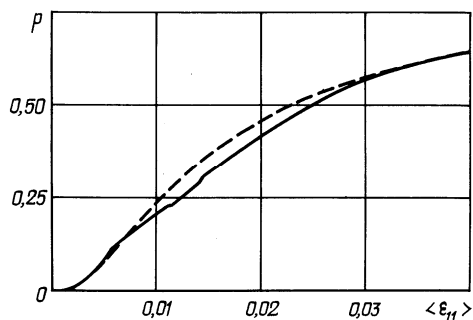


Рис. 1.3

На рис. 1.1 – 1.3 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (1.26) – (1.28) сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости материала p от макродеформации $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для линейно упрочняющегося материала. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p от $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для линейного материала. Как видим, физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние на его микроразрушение, особенно при $\sigma_p > \sigma_0$, т.е. когда предел пропорциональности меньше предела минимальной микропрочности. Графики показывают, что для линейно упрочняющегося материала при $\sigma_p > \sigma_0$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для линейного. При $\sigma_p < \sigma_0$ микроразрушения в физически нелинейном и линейном материалах начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в линейном материале в пределах $0,006 < \langle \epsilon_{11} \rangle < 0,034$ микроразрушения происходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

На рис. 1.4 – 1.6 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (1.26) – (1.28) сплошными линиями изображены кривые зависимостей макро-

пряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu$ от макродеформации $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для линейно упрочняющегося материала при микроразрушениях. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu$ от $\langle \epsilon_{11} \rangle$ при микроразрушениях для

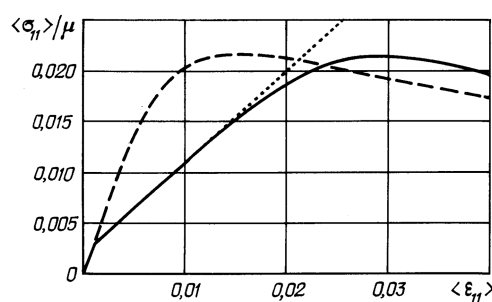


Рис. 1.4

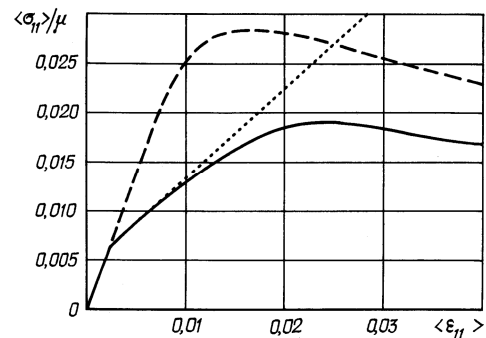


Рис. 1.5

линейного материала (штриховые линии) и линейно упрочняющегося материала без микроразрушений (линии, состоящие из коротких штрихов). Как видим, физическая нелинейность материала оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования, особенно при $\sigma_p > \sigma_0$. Для линейного материала при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании линейно упрочняющегося материала без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для линейно упрочняющегося материала при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для линейного и нелинейного материалов, подверженных микроразрушениям, показывает, что для линейно упрочняющегося материала в пределах $0,006 < \varepsilon_{11} < 0,018$ заданным значениям макродеформаций будут соответствовать меньшие значения макронапряжений по сравнению с линейным материалом.

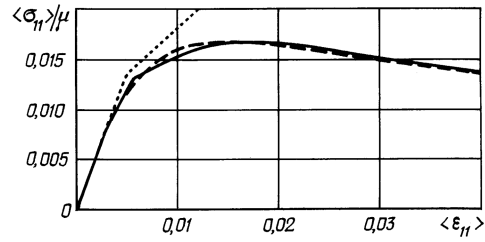


Рис. 1.6

§2. Зернистый материал.

Рассмотрим физически нелинейное деформирование зернистого композита, описываемое зависимостью модуля сдвига μ_v ($v = 1, 2$) компонентов от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью компонентов в процессе нагружения. Микроповреждаемость компонентов будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Пусть включения и матрица материала имеют пористость соответственно p_1 и p_2 . Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материалов каркасов включений и матрицы соответственно K_1, μ_1 и K_2, μ_2 , а объемные содержания пористых включений и пористой матрицы соответственно c_1, c_2 . Тогда зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде (1.1), причем эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористостей компонентов p_1, p_2 и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного зернистого композита с пористыми компонентами сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются через соответствующие модули включений $K_{1p}^{(n)}, \mu_{1p}^{(n)}$ и матрицы $K_{2p}^{(n)}, \mu_{2p}^{(n)}$ в n -ом приближении формулами [11, 36, 37, 39]

$$K^{*(n)} = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p} - c_1 c_2 \frac{(K_{1p} - K_{2p})^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_{1p} + n_c^{(n)}};$$

$$\mu^{*(n)} = c_1 \mu_{1p}^{(n)} + c_2 \mu_{2p}^{(n)} - c_1 c_2 \frac{(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})^2}{c_1 \mu_{2p}^{(n)} + c_2 \mu_{1p}^{(n)} + m_c^{(n)}}, \quad (2.1)$$

где

$$n_c^{(n)} = \frac{4}{3} \mu_c^{(n)}; \quad m_c^{(n)} = \frac{\mu_c^{(n)} (9K_c + 8\mu_c^{(n)})}{6(K_c + 2\mu_c^{(n)})}, \quad (2.2)$$

причем

$$K_c = c_1 K_{1p} + c_2 K_{2p}; \quad \mu_c^{(n)} = c_1 \mu_{1p}^{(n)} + c_2 \mu_{2p}^{(n)}, \quad (2.3)$$

если жесткость пористой матрицы больше жесткости пористых включений, и

$$K_c = \frac{K_{1p}K_{2p}}{c_1K_{2p} + c_2K_{1p}}; \quad \mu_c^{(n)} = \frac{\mu_{1p}^{(n)}\mu_{2p}^{(n)}}{c_1\mu_{2p}^{(n)} + c_2\mu_{1p}^{(n)}} \quad (2.4)$$

– в противном случае. Эффективные модули пористых включений $K_{1p}^{(n)}$, $\mu_{1p}^{(n)}$ и матрицы $K_{2p}^{(n)}$, $\mu_{2p}^{(n)}$ в n -ом приближении согласно [38, 39] определяются формулами

$$K_{vp}^{(n)} = \frac{4K_v\mu_v(J_{v(n)}^1)(1-p_v)^2}{3K_v p_v + 4\mu_v(J_{v(n)}^1)(1-p_v)};$$

$$\mu_{vp}^{(n)} = \frac{[9K_v + 8\mu_v(J_{v(n)}^1)]\mu_v(J_{v(n)}^1)(1-p_v)^2}{3K_v(3-p_v) + 4\mu_v(J_{v(n)}^1)(2+p_v)} \quad (v=1, 2), \quad (2.5)$$

где $J_{v(n)}^1$ – второй инвариант девиатора тензора средних деформаций по неповрежденной части материала включения или матрицы в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^{1v} \rangle^{(n)}$. В $(n+1)$ -ом приближении эти деформации связаны со средними по компонентам деформациями в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ зависимостями

$$\langle \varepsilon_{ij}^{1v} \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p_v)} \left\{ \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v(J_{v(n)}^1)} \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} + \frac{1}{3} \left[\frac{K_{vp}^{(n)}}{K_v} - \frac{\mu_{vp}^{(n)}}{\mu_v(J_{v(n)}^1)} \right] \langle \varepsilon_{rr}^v \rangle^{(n)} \delta_{ij} \right\}$$

$$(v=1, 2). \quad (2.6)$$

Средние по компонентам деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам [11, 36, 37, 39]

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = (-1)^{v+1} \left[\frac{\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)}}{c_v(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu^{*(n)}(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})(K^{*(n)} - K_{(3-v)p}^{(n)}) - 3K^{*(n)}(K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})(\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)})}{6c_v\mu^{*(n)}(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})(K_{1p}^{(n)} - K_{2p}^{(n)})} \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} \right]. \quad (2.7)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяются как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (2.8)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий прочности Губера – Мизеса [15]

$$I_\sigma^{1v} = k_v \quad (v=1, 2), \quad (2.9)$$

где $I_\sigma^{1v} = (\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle'$ по неповрежденной части материала k -компонента; k_v – предел микропрочности компонента, являющийся случайной функцией координат.

Так как инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала компонента I_σ^{1v} связан с инвариантом девиаторов средних деформаций в компонентах $I_\varepsilon^k = (\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle')^{1/2}$ зависимостями

$$I_\sigma^{1v} = \frac{2\mu_{vp}}{1-p_v} I_\varepsilon^v, \quad (2.10)$$

а инварианты девиаторов средних деформаций в компонентах I_ε^v определяются через инвариант $I_\varepsilon = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}$ для всего композита соотношениями

$$I_\varepsilon^v = (-1)^{v+1} \frac{\mu^* - \mu_{(3-v)p}}{c_v(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_\varepsilon, \quad (2.11)$$

то с учетом соотношений (2.10), (2.11) критерий прочности (2.9) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_\varepsilon = k_v \quad (v=1, 2). \quad (2.12)$$

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_v(k_v)$ предела микропрочности k_v неповрежденной части материала компонента является степенной закон на некотором отрезке

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ \left(\frac{k_v - k_{v0}}{k_{v1} - k_{v0}} \right)^{n_v}, & k_{v0} \leq k_v \leq k_{v1}; \\ 1, & k_v > k_{v1}, \end{cases} \quad (2.13)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_v(k_v) = \begin{cases} 0, & k_v < k_{v0}; \\ 1 - \exp[-m_v(k_v - k_{v0})^{n_v}], & k_v \geq k_{v0}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где k_{v0} – минимальное значение предела микропрочности компонента; k_{v1}, m_v, n_v – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности компонента k_v является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микровреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_v и распределение микронапряжений в материале компонента при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_v(k_v)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_v . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle$ функция $F_v(I_\sigma^{1v})$, согласно (2.9), (2.13), (2.14), определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета компонента.

Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость компонента p_{v0} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов компонента или его пористости [55, 58, 62]

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v(I_\sigma^{lv}). \quad (2.15)$$

С учетом соотношений (2.11), (2.12) уравнение баланса пористости компонента (2.9) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_v = p_{v0} + (1 - p_{v0})F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}(\mu^* - \mu_{(3-v)p})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p} - \mu_{2p})} I_\varepsilon \right], \quad (2.16)$$

где эффективный модуль сдвига μ^* и модули сдвига компонентов μ_{1p}, μ_{2p} определяются формулами (2.1) – (2.5).

Уравнения (1.1), (2.1) – (2.7), (2.13) (или (2.14)), (2.16) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости зернистого композита. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования зернистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости зернистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.1) – (2.7), и определению пористости из уравнения (2.16), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (2.16) для n -го шага итерационного процесса (2.1) – (2.7) в виде

$$f_v^{(n)} \equiv p_v - p_{v0} - (1 - p_{v0})F_v \left[(-1)^{v+1} \frac{2\mu_{vp}^{(n)}(\mu^{*(n)} - \mu_{(3-v)p}^{(n)})}{c_v(1-p_v)(\mu_{1p}^{(n)} - \mu_{2p}^{(n)})} I_\varepsilon \right]. \quad (2.17)$$

Тогда определение корня p_v уравнения (2.17) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_v^{(m,n)} = A_v f_v^{(n)}(p_v^{(m-1)}), \quad (2.18)$$

где A_v – определенный оператор, действующий на функцию $f_v^{(n)}(p_v)$.

Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_v = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p_v^{(m,n)}. \quad (2.19)$$

Соотношения (1.1), (2.1) – (2.8), (2.13) (или (2.14)), (2.17), (2.19) дают решение поставленной задачи, т.е. для заданного зернистого композита с физически нелинейными компонентами они определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности компонентов (зависимости p_v от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем нелинейное деформирование зернистого композита с линейно упругими включениями без повреждаемости и нелинейно деформирующейся матрицей с учетом ее повреждаемости, причем объемные деформации матрицы являются линейными, т.е. модуль объемного сжатия $K_2 = \lambda_2 + 2/3 \mu_2$ не зависит от деформаций, а девиаторные составляющие деформации описываются диа-

граммой линейного упрочнения, т.е. девиатор напряжений $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ и деформаций $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$ связаны нелинейным законом. Таким образом, имеют место соотношения

$$\sigma_{rr}^2 = K_2 \varepsilon_{rr}^2; \quad \sigma_{ij}^2 = 2\mu_2(J_2) \varepsilon_{ij}^2. \quad (2.20)$$

Здесь модуль сдвига $\mu_2(J_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(J_2) = \begin{cases} \mu_2, & T_2 \leq k_2; \\ \mu_2' + (1 - \mu_2'/\mu_2^2)k/(2J_2), & T_2 \geq k_2, \end{cases} \quad (2.21)$$

где

$$J_2 = [\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle']^{1/2}; \quad T_2 = [\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle']^{1/2}; \quad k_2 = \sigma_{2T} \sqrt{2/3}; \quad (2.22)$$

$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$, $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$ — соответственно девиаторы средних в матрице напряжений и деформаций; σ_{2T} — предел текучести матрицы.

Алгоритм определения корня p_2 уравнения (2.17) построим на основе метода секущих [4]. Так как корень p_2 находится в интервале $[p_{20}, 1]$, что следует из неравенств

$$f_2^{(n)}(p_{20}) \leq 0; \quad f_2^{(n)}(1) \geq 0, \quad (2.23)$$

то, согласно методу секущих, нулевое приближение корня $p_2^{(0,n)}$ определяется формулой

$$p_2^{(0,n)} = \frac{a_2^{(0)} f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - b_2^{(0)} f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}, \quad (2.24)$$

где $a_2^{(0)} = p_{20}$, $b_2^{(0)} = 1$. Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \equiv \frac{a_2^{(m)} f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - b_2^{(m)} f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}, \quad (2.25)$$

$$a_2^{(m)} = a_2^{(m-1)}, \quad b_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \leq 0;$$

$$a_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)}, \quad b_2^{(m)} = b_2^{(m-1)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \geq 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$|f_2^{(n)}(p_2^{(m,n)})| < \delta, \quad (2.26)$$

где δ — точность вычисления корня.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости зернистого композита при микроразрушениях в матрице для распределения Вейбулла в случае заданных макропараметров (1.29). В этом случае согласно (1.1) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{3K^* \mu^*}{K^* + 1/3 \mu^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.27)$$

При этом в уравнении баланса пористости (2.16) принимается

$$I_\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3K^* \langle \varepsilon_{11} \rangle}{2(K^* + 1/3 \mu^*)}, \quad (2.28)$$

что эквивалентно выполнению условий (1.29).

В качестве включений и матрицы были приняты соответственно линейно упругие зерна с характеристиками

$$K_1 = 38,89 \text{ ГПа}; \quad \mu_1 = 29,17 \text{ ГПа} \quad (2.29)$$

и матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (2.20) – (2.22) с постоянными

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{20} = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu_2' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (2.30)$$

и пределами текучести и минимальной микропрочности $\sigma_{2p} = k_{20} \sqrt{3/2}$ на растяжение

$$\sigma_{20} = 0,003 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа}; \quad (2.31)$$

$$\sigma_{20} = \sigma_{2p} = 0,007 \text{ ГПа}; \quad (2.32)$$

$$\sigma_{20} = 0,015 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,003 \text{ ГПа}. \quad (2.33)$$

На рис. 2.1 – 2.3 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.31) – (2.33) сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита с линейно упрочняющейся матрицей. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита с линейной матрицей. Как видим, физическая нелинейность деформирования матрицы композитного материала оказывает существенное влияние на ее поврежденность, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$, т.е. когда предел пропорциональности меньше предела минимальной микропрочности. Графики показывают, что при всех значениях объемного содержания включений c_1 для зернистого материала с

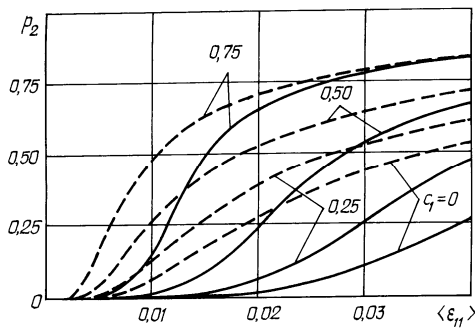


Рис. 2.1

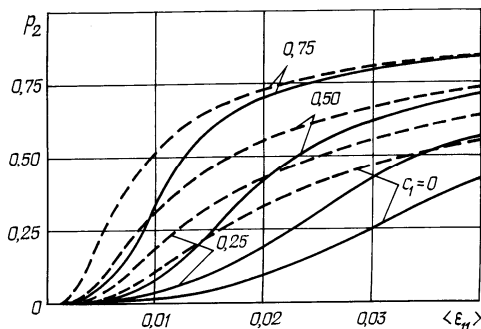


Рис. 2.2

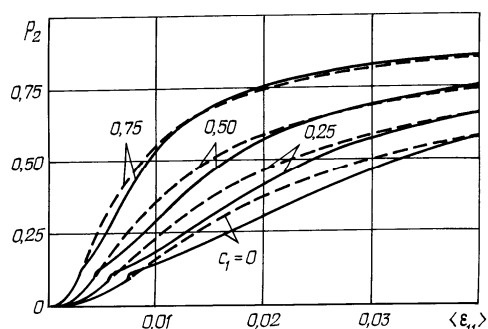


Рис. 2.3

линейно упрочняющейся матрицей при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для материала с линейной матрицей. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ для всех значений объемного содержания включений c_1 микроразрушения в материалах с физически нелинейной и линейной матрицами начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в материале с линейной матрицей на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно, особенно при не очень больших значениях объемного содержания включений ($c_1 < 0,5$) (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

На рис. 2.4 – 2.6 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.31) – (2.33) сплошными линиями изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для зернистого композита с линейно упрочняющейся матрицей при микроразрушениях. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от $\langle \epsilon_{11} \rangle$ при микроразрушениях для зернистых материалов с линейной матрицей (штриховые линии) и с линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений (линии, состоящие из коротких штрихов).

Как видим, физическая нелинейность матрицы материала оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания включений c_1 , особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$. Для материала с линейной матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании материала с линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для материала с линейно упрочняющейся матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для материалов с линейной и нелинейной матрицами, подверженными микроразрушениям, показывает, что для материала с

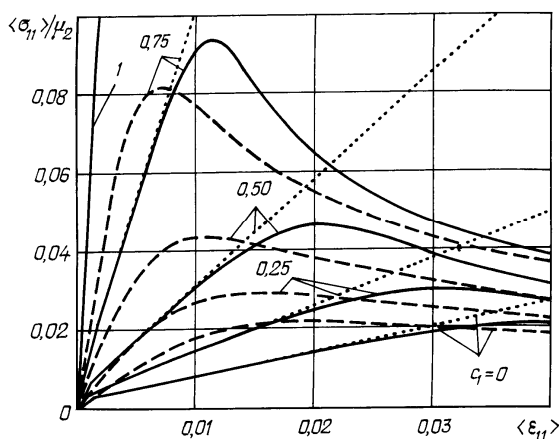


Рис. 2.4

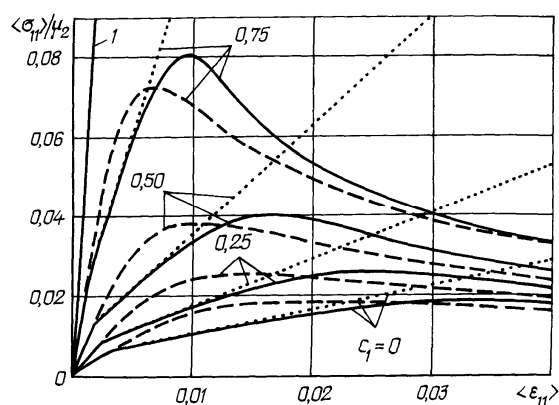


Рис. 2.5

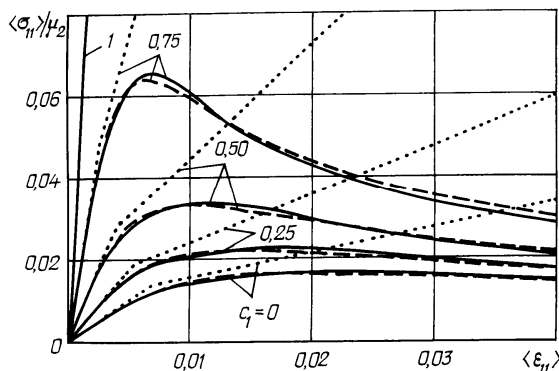


Рис. 2.6

линейно упрочняющейся матрицей в материале достигается более высокий уровень макронапряжений по сравнению с материалом, имеющим линейную матрицу, особенно при значительном объемном содержании включений ($c_1 \geq 0,5$).

§3. Слоистый материал.

Рассмотрим физически нелинейное деформирование слоистого материала с изотропными компонентами, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K_ν и сдвига μ_ν ($\nu = 1, 2$) компонентов от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью компонентов в процессе нагружения. Микроповреждаемость компонентов будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Обозначим модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса ν -компонента K_ν, μ_ν , его пористость p_ν , а объемное содержание пористого ν -компонента c_ν . Тогда зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

причем эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ будут функциями пористостей компонентов p_ν ($\nu = 1, 2$) и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного слоистого композита с пористыми компонентами сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули упругости композита в n -ом приближении $\lambda_{11}^{*(n)}, \lambda_{12}^{*(n)}, \lambda_{13}^{*(n)}, \lambda_{33}^{*(n)}, \lambda_{44}^{*(n)}$ определяются через соответствующие модули пористых компонентов в n -ом приближении $\lambda_{\nu p}^{(n)}, \mu_{\nu p}^{(n)}$ ($\nu = 1, 2$) формулами [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu_p^{(n)} (\lambda_p^{(n)} + \mu_p^{(n)})}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)} \mu_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle; \quad \lambda_{44}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1}; \\ \lambda_{13}^{*(n)} &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^{*(n)} = \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где для произвольной функции φ имеет место равенство

$$\langle \varphi_p^{(n)} \rangle = c_1 \varphi_{1p}^{(n)} + c_2 \varphi_{2p}^{(n)}. \quad (3.3)$$

Эффективные модули пористого ν -компонента в n -ом приближении $K_{\nu p}^{(n)}, \mu_{\nu p}^{(n)}$, $\lambda_{\nu p}^{(n)}$ ($\lambda_{\nu p}^{(n)} = K_{\nu p}^{(n)} - 2/3 \mu_{\nu p}^{(n)}$) определяются формулами (2.5), где $\langle \varepsilon_{ij}^{1\nu} \rangle^{(n)}$ – средние деформации по неповрежденной части ν -компонента в n -ом приближении. Они связаны со средними по компонентам деформациями $\langle \varepsilon_{ij}^\nu \rangle^{(n)}$ в n -ом приближении зависимостями (2.6). Средние по компонентам деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^\nu \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} &= \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle^{(n)} = \frac{1}{\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\
\langle \varepsilon_{33}^v \rangle^{(n)} &= \\
&= \frac{1}{\lambda_{vp}^{(n)} + 2\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left[\left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle - \lambda_{vp}^{(n)} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \\
&\quad (i, v = 1, 2). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяются как предельные значения итерационного процесса

$$\lambda_{lm}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{lm}^{*(n)}. \tag{3.5}$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий прочности Губера – Мизеса (2.9). Одноточечную функцию распределения $F_v(k_v)$ предела микропрочности k_v неповрежденной части материала v -компонента можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке (2.13) или распределения Вейбулла (2.14).

Исходя из тех же соображений, что и в § 2, можем записать уравнение баланса поврежденных микрообъемов матрицы или ее пористости [55, 59, 63] в виде (2.15), где средние в неразрушенной части v -компонента напряжения $\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями [11, 36, 37, 39]

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij}^{lv} \rangle &= \frac{1}{1 - p_v} \times \\
&\times \left[2\mu_{vp} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda_{vp}}{\lambda_{vp} + 2\mu_{vp}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{vp} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_{vp}}{\lambda_{vp} + 2\mu_{vp}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij} \right]; \\
\langle \sigma_{33}^{lv} \rangle &= \frac{1}{1 - p_v} \left[\left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \right]; \\
\langle \sigma_{i3}^{lv} \rangle &= \frac{2}{1 - p_v} \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, v = 1, 2), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

а эффективные модули v -компонента λ_{vp}, μ_{vp} определяются формулами (2.5).

Уравнения (3.1), (2.5), (3.2) – (3.4), (2.13) (или (2.14)), (2.15), (3.6) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости слоистого материала. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования слоистого композита обусловлена физической нелинейностью мате-

риала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости слоистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости слоистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.5), (3.2) – (3.4), и определению пористости из уравнения (2.13) (или (2.14)), (2.15), (3.6), что осуществляется также определенным итерационным методом. На основе соотношений (3.1), (2.5), (3.2) – (3.4), (2.13) (или (2.14)), (2.15), (3.6), представим уравнение (2.15) для n -го шага итерационного алгоритма (2.5), (3.2) – (3.4), в виде

$$f_k^{(n)} \equiv p_k - p_{k0} - (1 - p_{k0}) F_k(I_\sigma^{1k(n)}), \quad (3.7)$$

где [11, 36, 37, 39]

$$I_\sigma^{1k(n)} = (\langle \sigma_{ij}^{1k(n)} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{1k(n)} \rangle')^{1/2}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^{1v(n)} \rangle &= \frac{1}{1 - p_v} \times \\ &\times \left[2\mu_{vp}^{(n)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda_{vp}^{(n)}}{\lambda_{vp}^{(n)} + 2\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle + 2\mu_{vp}^{(n)} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \frac{\lambda_{vp}^{(n)}}{\lambda_{vp}^{(n)} + 2\mu_{vp}^{(n)}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij} \right]; \\ \langle \sigma_{33}^{1v(n)} \rangle &= \frac{1}{1 - p_v} \left[\left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p^{(n)}}{\lambda_p^{(n)} + 2\mu_p^{(n)}} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right) \right]; \\ \langle \sigma_{i3}^{1v(n)} \rangle &= \frac{1}{1 - p_v} \left\langle \frac{1}{\mu_p^{(n)}} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r, v = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

При помощи метода секущих [4] построен итерационный алгоритм (2.23) – (2.26) для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и деформативных характеристик композита, т.е. для заданного слоистого композита с физически нелинейными компонентами соотношения (3.1), (2.5), (3.2) – (3.4), (2.13) (или (2.14)), (2.15), (3.6) определяют диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповрежденности компонентов (зависимости p_v от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости слоистого композита, когда микроразрушения происходят в линейно упрочняющемся компоненте композита, а другой его компонент деформируется линейно-упруго без микроразрушений. Предположим, что объемные деформации линейно упрочняющегося компонента являются линейными, а девиаторные составляющие деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в его микрообъеме имеют место соотношения (2.20) – (2.22).

Исходя из изложенной теории, исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости слоистого композита при микроразрушениях в связующем в случае распределения Вейбулла для различных случаев нагружения. В качестве компонентов приняты алюмоборосиликатное стекло с характеристиками (2.29) и эпоксидное связующее, которое описывается законом линейного упрочнения (2.20) – (2.22) с постоянными (2.30) и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности $\sigma_{2p} = \sqrt{3/2}k_{20}$ на растяжение (2.31) – (2.33).

В случае задания макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (3.10)$$

согласно (3.1) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (3.11)$$

При этом в уравнении баланса пористости (2.16) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (3.12)$$

В случае задания макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (3.13)$$

согласно (3.1) макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (3.14)$$

При этом в уравнении баланса пористости (2.16) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (3.15)$$

На рис. 3.1, 3.2 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микрочности на растяжение (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.10) сплошными линиями показаны кривые зависимостей пористости связующего p_2 от макродеформации

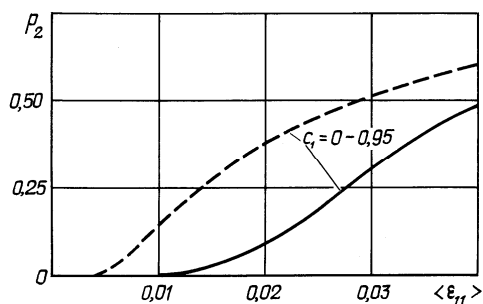


Рис. 3.1

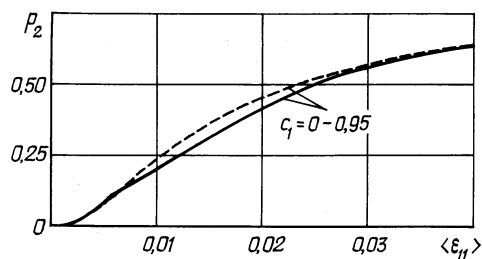


Рис. 3.2

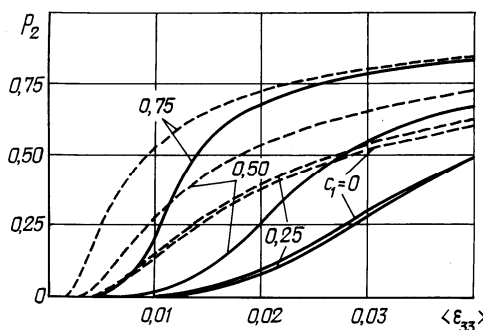


Рис. 3.3

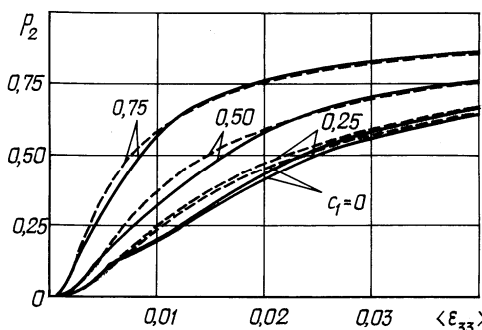


Рис. 3.4

$\langle \varepsilon_{11} \rangle$, а на рис. 3.3, 3.4 соответственно при пределах (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.13) сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости связующего p_2 от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для слоистого композита с линейно упрочняющимся связующим. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ для слоистого композита с линейным связующим. Как видим, при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$ физическая нелинейность деформирования связующего композитного материала оказывает существенное влияние на его микроповреждаемость. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ влияние нелинейности заметно, но не так существенно. Графики показывают, что при всех значениях объемного содержания наполнителя c_1 для слоистого материала с линейно упрочняющимся связующим при $\sigma_{2p} \geq \sigma_{20}$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для материала с линейным связующим. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ для всех значений объемного содержания компонентов микроразрушения в материалах с физически нелинейным и линейным связующим начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в материале с линейным связующим на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

На рис. 3.5, 3.6 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.10) сплошными линиями изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$, а на рис. 3.7, 3.8 соответственно при пределах (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.13) сплошными линиями показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для слоистого композита с линейно упрочняющимся связующим при микроразрушениях. На этих же графиках для сравнения приведены зависимости $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ и $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от

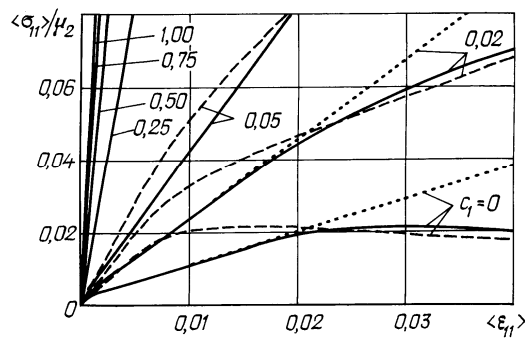


Рис. 3.5

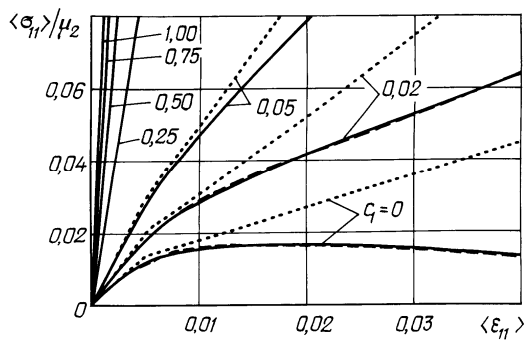


Рис. 3.6

$\langle \varepsilon_{33} \rangle$ при микроразрушениях для слоистых материалов с линейным связующим (штриховые линии) и с линейно упрочняющимся связующим без микроразрушений (линии, состоящие из коротких штрихов). Графики показывают, что физическая нелинейность связующего композита оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания компонентов, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$.

Для материала с линейным связующим при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании материала с линейно упрочняющимся связующим без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для материала с линейно упрочняющимся связующим при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для материалов

с линейным и нелинейным связующими, подверженными микроразрушениям, показывает, что для материала с линейно упрочняющимся связующим достигается более высокий уровень макронапряжений по сравнению с материалом, имеющим линейное связующее, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$.

§4. Волокнистый материал.

Рассмотрим физически нелинейное деформирование однонаправленного волокнистого материала с трансверсально-изотропными волокнами и изотропной матрицей, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия K_2 и сдвига μ_2 матрицы от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью матрицы в процессе нагружения. Микроповреждаемость матрицы будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Волокна считаем трансверсально-изотропными, направленными по нормали к

плоскости изотропии x_1x_2 . Обозначим модули упругости волокон $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$, модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса матрицы K_2, μ_2 , ее пористость p_2 , а объемные содержания волокон и пористой матрицы соответственно c_1 и c_2 . Тогда зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ можно представить в виде (3.1), причем эффективные модули упругости композита λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* будут функциями пористости матрицы p_2 и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости физически нелинейного волокнистого композита с пористой матрицей сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули упругости композита в n -ом приближении $\lambda_{11}^{*(n)}, \lambda_{12}^{*(n)}, \lambda_{13}^{*(n)}, \lambda_{33}^{*(n)}, \lambda_{44}^{*(n)}$ определяются через соответствующие модули волокон $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ и пористой матрицы $\lambda_{2p}^{(n)}, \mu_{2p}^{(n)}$ ($\lambda_{2p}^{(n)} = K_{2p}^{(n)} - 2/3 \mu_{2p}^{(n)}$) в n -ом приближении формулами [11, 36, 37, 39]

$$\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) - \frac{c_1c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})^2}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

$$\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}^{(n)} - \frac{c_1c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)})^2}{2c_1\mu_{2p}^{(n)} + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + \frac{2m^{(n)}n^{(n)}}{n^{(n)} + 2m^{(n)}}};$$

$$\lambda_{13}^{*(n)} = c_1\lambda_{13}^1 + c_2\lambda_{2p}^{(n)} - \frac{c_1c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})}{2c_1(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

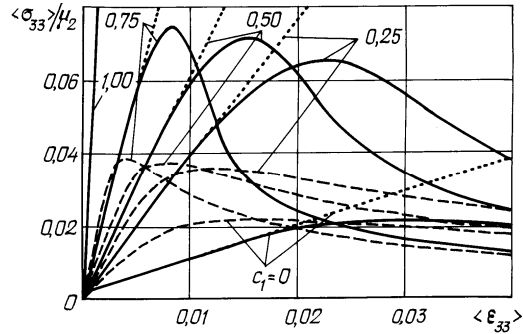


Рис. 3.7

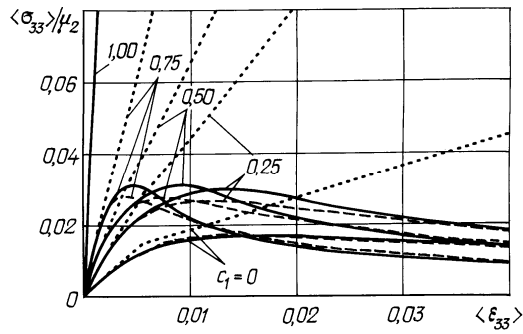


Рис. 3.8

$$\lambda_{33}^{*(n)} = c_1 \lambda_{33}^1 + c_2 (\lambda_{2p}^{(n)} + 2\mu_{2p}^{(n)}) - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2}{2c_1 (\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)}) + c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m^{(n)}};$$

$$\lambda_{44}^{*(n)} = c_1 \lambda_{44}^1 + c_2 \mu_{2p}^{(n)} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{44}^1 - \mu_{2p}^{(n)})^2}{c_1 \mu_{2p}^{(n)} + c_2 \lambda_{44}^1 + s^{(n)}}, \quad (4.1)$$

где

$$2m^{(n)} = c_1 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2 \mu_{2p}^{(n)}; \quad 2n^{(n)} = c_1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2 (\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)});$$

$$s^{(n)} = c_1 \lambda_{44}^1 + c_2 \mu_{2p}^{(n)}, \quad (4.2)$$

если жесткость связующего больше жесткости волокон, и

$$2m^{(n)} = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}^{(n)}} \right)^{-1}; \quad 2n^{(n)} = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_{2p}^{(n)} + \mu_{2p}^{(n)})} \right)^{-1};$$

$$s^{(n)} = \left(\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{\mu_{2p}^{(n)}} \right)^{-1}, \quad (4.3)$$

если жесткость волокон больше жесткости связующего.

Эффективные модули пористой матрицы в n -ом приближении $K_{2p}^{(n)}, \lambda_{2p}^{(n)}, \mu_{2p}^{(n)}$ определяются формулами (2.5) ($\nu = 2$), где $\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle^{(n)}$ – средние деформации по неповрежденной части матрицы в n -ом приближении. Они связаны со средними по матрице деформациями $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)}$ в n -ом приближении зависимостями (2.6). Средние по матрице деформации в n -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)}$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам [11, 36, 37, 39]

$$\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} = \frac{\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2 (2\mu_{2p}^{(n)} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle -$$

$$- \frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \left\{ [(\lambda_{11}^{*(n)} - \lambda_{11}^1) a_1^{(n)} - (\lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{12}^1) a_2^{(n)} - (\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \right.$$

$$\left. + [(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) (a_1^{(n)} - a_2^{(n)}) - (\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{33} \rangle \right\} \delta_{ij};$$

$$\langle \varepsilon_{33}^2 \rangle^{(n)} = - \frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \left\{ [(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_4^{(n)} - (\lambda_{11}^{*(n)} + \lambda_{12}^{*(n)} - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \right.$$

$$\left. + [(\lambda_{33}^{*(n)} - \lambda_{33}^1) a_4^{(n)} - 2(\lambda_{13}^{*(n)} - \lambda_{13}^1) a_3^{(n)}] \langle \varepsilon_{33} \rangle \right\};$$

$$\langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle^{(n)} = \frac{\lambda_{44}^{*(n)} - \lambda_{44}^1}{c_2 (\mu_{2p}^{(n)} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_2^{(n)} &= c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)})[(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}) - 2(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2]; \\
a_1^{(n)} &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2 - (\lambda_{12}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}); \\
a_2^{(n)} &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})^2 - (\lambda_{11}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)}); \\
a_3^{(n)} &= (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p}^{(n)})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)}); \\
a_4^{(n)} &= (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p}^{(n)} - 2\mu_{2p}^{(n)})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}^{(n)}), \tag{4.5}
\end{aligned}$$

а эффективные коэффициенты пористой матрицы в n -ом приближении $K_{2p}^{(n)}$, $\lambda_{2p}^{(n)}$, $\mu_{2p}^{(n)}$ определяются формулами (2.5).

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ определяются как предельные значения итерационного процесса

$$\lambda_{im}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{im}^{*(n)}. \tag{4.6}$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала матрицы примем критерий прочности Губера – Мизеса (2.9) ($\nu = 2$). Одноточечную функцию распределения $F_2(k_2)$ предела микропрочности k_2 неповрежденной части материала матрицы можно принять в виде степенного закона на некотором отрезке (2.13) или распределения Вейбулла (2.14).

Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости (2.15) ($k = 2$), где средние в неразрушенной части матрицы напряжения в n -ом приближении $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle^{(n)}$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями (2.6), (4.4), (4.5) и

$$\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle^{(n)} = \frac{1}{1 - p_2} \left[\left(K_{2p}^{(n)} - \frac{2}{3} \mu_{2p}^{(n)} \right) \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle^{(n)} \delta_{ij} + 2\mu_{2p}^{(n)} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle^{(n)} \right]. \tag{4.7}$$

Уравнения (3.1), (2.5), (4.1) – (4.3), (2.13) (или (2.14)), (2.15), (4.4), (4.5) (4.7) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и повреждаемости волокнистого материала. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования волокнистого композита обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физическом нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и повреждаемости волокнистого композита при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости слоистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (2.5), (4.1) – (4.3), и определению пористости из уравнения (2.13) (или (2.14)), (2.15), (4.4), (4.5) (4.7), что осуществляется также определенным итерационным методом. На основе соотношений (3.1), (2.5), (4.1) – (4.3), (2.13) (или (2.14)), (2.15), (4.4), (4.5) (4.7) представим уравнение (2.15) для n -го шага итерационного (2.5), (4.1) – (4.3), в виде (3.7), (3.8). При помощи метода секущих [4] построен итерационный алгоритм (2.23) – (2.26) для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и деформативных характеристик композита, т.е. для заданного слоистого композита с физически нелинейными компонентами соотношения

(3.1), (2.5), (4.1) – (4.3), (2.13) (или (2.14)), (2.15), (4.4), (4.5) (4.7) определяют законы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$) и микроповреждаемости компонентов (зависимости p_v от $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$).

В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости волокнистого композита, когда матрица композита деформируется по линейно упрочняющемуся закону. Предположим, что объемные деформации линейно упрочняющейся матрицы являются линейными, а девиаторные составляющие деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения (2.20) – (2.22).

Исходя из изложенной теории, исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости волокнистого композита при микроразрушениях в связующем в случае распределения Вейбулла для различных случаев нагружения. В качестве компонентов приняты соответственно высокомодульные углеродные волокна с характеристиками [22]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; E_3^1 = 226 \text{ ГПа}; \nu_{12}^1 = 0,3; \nu_{13}^1 = 0,2; G_{13}^1 = 60 \text{ ГПа}; \quad (4.8)$$

объемным содержанием $c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0$ и эпоксидная матрица, которая имеет закон линейного упрочнения, описываемый соотношениями (2.20) – (2.22) с постоянными (2.30), пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение $\sigma_p = \sqrt{3/2}k_{02}$ (2.31) – (2.33), где E_1^1 и E_3^1 , ν_{12}^1 и ν_{13}^1 , G_{12}^1 и G_{13}^1 – соответственно поперечный и продольный модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига волокон, которые связаны с $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \quad (4.9)$$

В случае задания макропараметров (3.10) согласно (3.1) макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением (3.11). При этом в уравнении баланса пористости (2.16) имеют место равенства (3.12). В случае задания макропараметров (3.13) согласно (3.1) макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связаны с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением (3.14). При этом в уравнении баланса пористости (2.16) имеют место равенства (3.15).

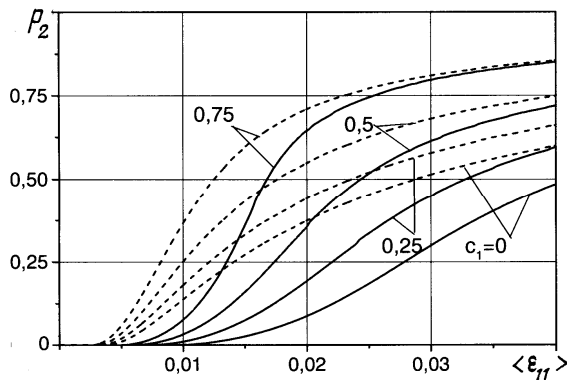


Рис. 4.1

На рис. 4.1, 4.2 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.10) сплошными линиями показаны кривые зависимости пористости связующего p_2 от макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$, а на рис. 4.3, 4.4 соответственно при пределах растяжения (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.13) сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от макродеформации $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ для

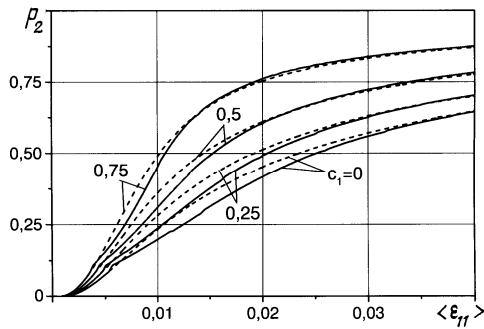


Рис. 4.2

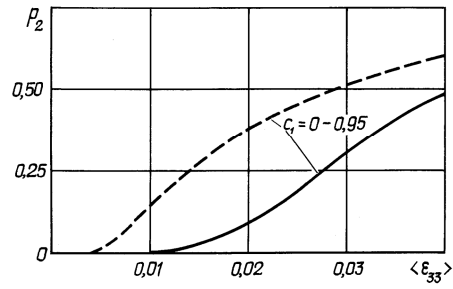


Рис. 4.3

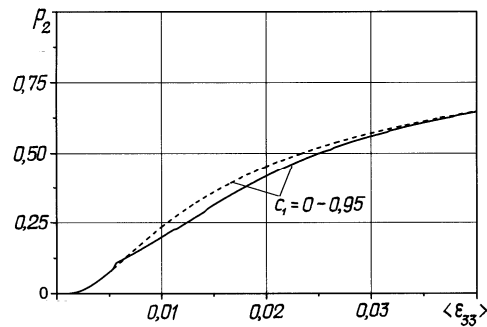


Рис. 4.4

волокнистого композита с линейно упрочняющейся матрицей. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от $\langle \epsilon_{11} \rangle$ для волокнистого композита с линейной матрицей. Как видим, физическая нелинейность деформирования матрицы композитного материала оказывает существенное влияние на его микроповреждаемость. Графики показывают, что при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$, т.е. когда предел пропорциональности меньше предела минимальной микропрочности, влияние нелинейности деформирования матрицы на микроразрушение материала усиливается. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ влияние нелинейности заметно, хоть и не так существенно. Графики показывают, что при всех значениях объемного содержания волокон c_1 для волокнистого материала с линейно упрочняющейся матрицей при $\sigma_{2p} \geq \sigma_{20}$ микроразрушения начинаются при более высоких макродеформациях, чем для материала с линейной матрицей. При $\sigma_{2p} < \sigma_{20}$ для всех значений объемного содержания волокон c_1 микроразрушения в материалах с физически нелинейной и линейной матрицами начинаются при одинаковых макродеформациях, однако в материале с линейной матрицей на начальном этапе микроразрушения происходят более интенсивно (фиксированным значениям макродеформации соответствуют более высокие значения пористости).

На рис. 4.5, 4.6 соответственно при пределах пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.10) сплошными линиями изображены кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \epsilon_{11} \rangle$, а на рис. 4.7, 4.8 при соответствующих пределах на растяжение (2.31), (2.33) и макропараметрах (3.13) сплошными линиями показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от макродеформации $\langle \epsilon_{33} \rangle$ для волокнистого композита с линейно упрочняющимся связующим при микроразрушениях. На этих же графиках для

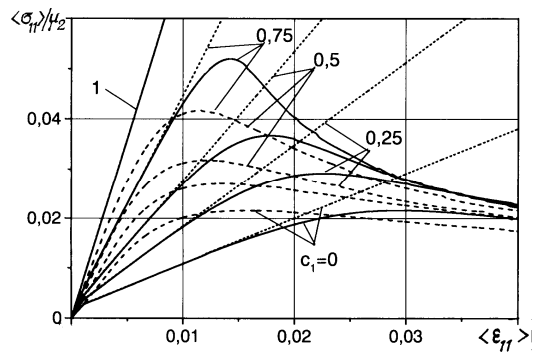


Рис. 4.5

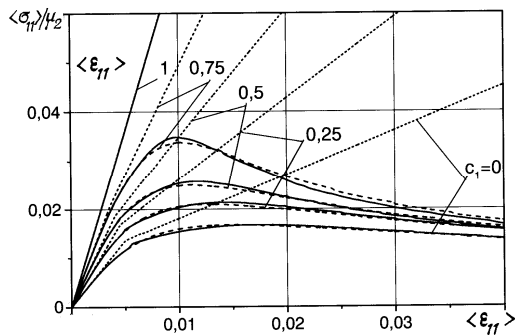


Рис. 4.6

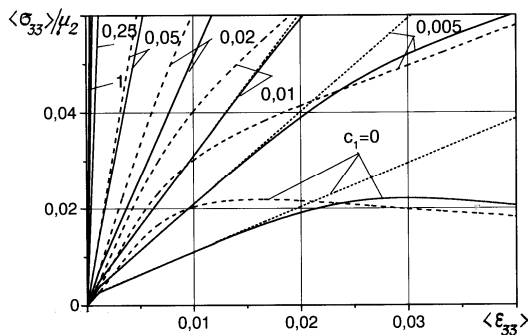


Рис. 4.7

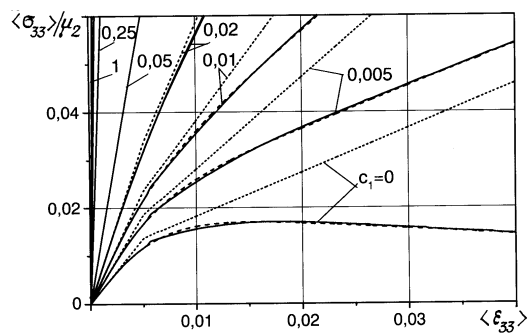


Рис. 4.8

сравнения штриховыми линиями приведены зависимости макронапряжения от макродеформации при микроразрушениях для волокнистых материалов с линейной матрицей (штриховые линии) и с линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений (линии, состоящие из коротких штрихов). Графики показывают, что физическая нелинейность матрицы композита оказывает существенное влияние на характер диаграмм деформирования для всех значений объемного содержания волокон c_1 , особенно при $\sigma_{2p} \geq \sigma_{20}$. Для материала с линейной матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из двух участков – линейного и нелинейного. При деформировании материала с линейно упрочняющейся матрицей без микроразрушений диаграмма состоит из двух линейных участков. Для материала с линейно упрочняющейся матрицей при микроразрушениях диаграмма деформирования состоит из трех участков – двух линейных и нелинейного. Сравнение результатов для материалов с линейной и нелинейной матрицами, подверженными микроразрушениям, показывает, что для материала с линейно упрочняющейся матрицей в материале достигается более высокий уровень макронапряжений по сравнению с материалом, имеющим линейную матрицу, особенно при $\sigma_{2p} > \sigma_{20}$.

РЕЗЮМЕ. Систематизовано дослідження по теорії деформування і короткочасної пошкоджуваності фізично нелінійних однорідних і композитних матеріалів. Одиначне мікропошкодження моделюється утворенням порожньої квазисферичної пори на місці мікрооб'єму, що руйнується за критерієм Губера – Мізеса. Границя мікроміцності приймається випадковою функцією координат. Сформульовано рівняння балансу пористості, що сумісно з рівняннями зв'язку макронапружень і макродеформацій утворить замкнуту систему. Досліджено залежність пошкоджуваності від макродеформацій і діаграми макродеформування однорідних і композитних матеріалів.

1. Алексеев Л.А., Светашков А.А. К теории деформирования наполненных эластомеров, учитывающей микроструктурные повреждения // Механика деформируемого твердого тела / НИИ прикл. математики и механики. – Томск, 1990. – С. 10 – 20.
2. Антуков В.Н., Белоусов В.Л. Модель анизотропной поврежденности тел. Сообщ. 1. Общие соотношения // Пробл. прочности. – 1994. – № 2. – С. 28 – 34.

3. *Афанасьев Н.Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – К.: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
4. *Березикович Я.С.* Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
5. *Вакуленко А.А., Качанов Л.М.* Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 4. – С. 159 – 166.
6. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наук. думка, 1985. – 302 с.
7. *Волков С.Д.* Статистическая теория прочности. – М.; Свердловск: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроит. лит-ры, 1960. – 176 с.
8. *Голуб В.П.* Нелинейная механика поврежденности и ее приложения // Трещиностойкость материалов и элементов конструкций. – К., 1980. – С. 19 – 20.
9. *Голуб В.П.* Нелинейные модели накопления повреждений в условиях ползучести // Пробл. машиностроения и автоматизации. – 1992. – № 1. – С. 51 – 58.
10. *Голуб В.П.* Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 10. – С. 37 – 49.
11. *Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др.* Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
12. *Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шкула Е.Н.* Прикладные исследования. – К: «А.С.К.», 2003. – 398 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 12).
13. *Давиденков Н.Н.* Усталость металлов. – К.: Изд-во АН УССР, 1947. – 212 с.
14. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
15. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
16. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
17. *Когаев В.П.* Соппротивление усталости в связи с концентрацией напряжений и абсолютными размерами // Некоторые вопросы усталостной прочности. – М.: Машгиз, 1955. – 244 с.
18. *Кондауров В.И.* О моделировании процессов накопления поврежденности и динамическом разрушении твердых тел размерами // Исследование свойств вещества в экстремальных условиях. – М., 1990. – С. 145 – 152.
19. *Конторова Т.А., Тимошенко О.А.* Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородного напряженного состояния // Журнал техн. физики. – 1949. – **19**, № 3. – С. 23 – 32.
20. *Конторова Т.А., Френкель Я.И.* Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // Журнал техн. физики. – 1941. – **11**, № 3. – С. 173.
21. *Копьев И.М., Овчинский А.С.* Разрушение металлов, армированных волокнами. – М.: Наука, 1977. – 240 с.
22. *Креггерс А.Ф.* Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
23. *Лурье С.А.* Об одной энтропийной модели накопления повреждений в композите // Механика неоднород. структур: Тез. докл. 3 Всесоюз. конф. Львов, 17 – 19 сент., 1991. – Ч. 2. – Львов, 1991. – С. 198.
24. *Лурье С.А., Криволицкая И.И., Введенский А.Р.* Об одной микромеханической энтропийной модели накопления рассеянных повреждений в композиционных материалах // Технология. Сер. Конструкции из композиц. материалов. – 1995. – № 1. – С. 5 – 12.
25. *Переверзев Е.С.* Модели накопления повреждений в задачах долговечности. – К.: Наук. думка, 1995. – 358 с.
26. *Работнов Ю.М.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
27. *Ржанецин А.Р.* Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
28. *Салганик Р.Д.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
29. *Седракян Л.Г.* К статистической теории прочности. – Ереван: Изд-во Арм. ин-та стройматериалов и сооружений, 1958. – 256 с.
30. *Серенсен С.В.* Усталость металлов. – М.: Изд-во ВНИИТМАШ, 1949. – 464 с.
31. *Снитко Н.К.* О теории прочности металлов с учетом структуры // Журнал техн. физики. – 1948. – **18**, № 6. – С. 857.
32. *Тамуж В.П.* Расчет констант материала с повреждениями // Механика полимеров. – 1977. – № 5. – С. 838 – 845.

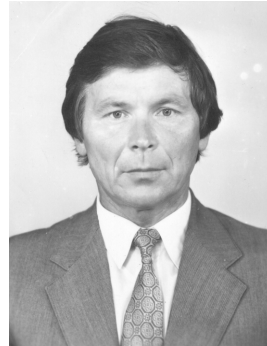
33. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
34. Фридман Я.Б. Единая теория прочности металлов. – М.: Оборонгиз, 1952. – 353 с.
35. Хорошун Л.П. К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 12. – С. 35 – 41.
36. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3 – 17.
37. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100 – 108.
38. Хорошун Л.П. К теории термомеханики пористых насыщенных сред // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 4. – С. 3 – 13.
39. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикла Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук.думка, 1993. – 389 с. – (Механика композитов: в 12-ти т.; Т.3).
40. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Деформирование зернистых композитов при микроразрушениях // Mechanical systems: Thesis of conference Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation» reports. – May, 25 – 29, 1999. – Kyiv, 1999. – P. 79.
41. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Влияние температуры на микроповреждаемость зернистого материала // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2001. – № 5. – С. 382 – 387.
42. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Кратковременная микроповреждаемость зернистых композитов при температурных воздействиях // Modeling and investigation in mechanics: Thesis of conference Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation» reports. – May, 22 – 25, 2001. – Kyiv, 2001. – P. 335.
43. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композитных материалов. – 2002. – **38**, № 4. – С. 473 – 486.
44. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Влияние температуры на кратковременную микроповреждаемость слоистых материалов // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – № 37. – С. 50 – 58.
45. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Связанные процессы деформирования и микроповреждаемости физически нелинейных материалов // Modeling and investigation in mechanics: Thesis of conference Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation» reports. – May, 27 – 30, 2003. – Kyiv, 2003. – P. 370.
46. Хорошун Л.П., Шикла Е.Н. Структурная теория кратковременной микроповреждаемости физически нелинейных композитных материалов // Modeling and investigation of mechanical systems: Thesis of conference Int. Conf. «Dynamics systems modeling and stability investigation» reports. – May, 23 – 25, 2005. – Kyiv, 2005. – P. 346.
47. Чечулин Б.Б. К статистической теории хрупкой прочности структуры // Журнал техн. физики. – 1954. – **24**, № 2. – С. 13 – 20.
48. Шевадин Е.М., Разов И.А., Решетникова Р.Е., Серпеников Б.Н. О природе масштабного эффекта при разрушении металлов // Докл. АН СССР. – 1957. – **113**, № 5. – С. 1057.
49. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
50. Шикла Е.Н. Влияние закона распределения прочности компонентов на деформирование зернистого композита при микроразрушениях // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 88 – 93.
51. Шикла Е.Н. Зависимость деформативных свойств слоистого композита от закона распределения прочности компонентов // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 70 – 74.
52. Baste S., Audoin B. On Internal Variables in Anisotropic Damage // Eur. J. Mech. A. – 1991. – **10**, N 6. – P. 587 – 606.
53. Chandrakanth S., Pandey P.C. An Isotropic Damage Model for Ductile Material // Eng. Fract. Mater. – 1995. – **50**, N 4. – P. 457 – 465.
54. Guz A.N. On One Two-Level Model in the Mesomechanics of Cracked Composites // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 3. – P. 274 – 285.
55. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
56. Khoroshun L.P. Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 9. – P. 1158 – 1165.
57. Khoroshun L.P. Principles of Micromechanics of the Damageability of Materials. 2. Long-Term Damageability // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
58. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Effect of the Strength Scatter of the Components on the Deformation of a Particulate Composites with Microcracks // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 8. – P. 626 – 631.

59. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Effect of the Spread of the Strength of the Components on the Deformation of a Laminar Composite with Microfailures // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 9. – P. 679 – 684.
60. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Effect of the Random Character of the Microscopic Strength of the Binder on the Deformation of a Fiber Composite // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 10. – P. 788 – 793.
61. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Effect of the Spread of Strength Characteristics of the Binder on the Deformation of Laminar-Fibrous Materials // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 1. – C. 39 – 45.
62. Khoroshun L.P., Shikula E.N. The Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composite Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 8. – P. 1060 – 1066.
63. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Simulation of the Short-Term Microdamageability of Laminated Composites // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 9. – P. 1181 – 1186.
64. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of Fibrous Composite Materials with Transversally Isotropic Fibers under Microfailures in a Binder // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 12. – P. 1605 – 1611.
65. Khoroshun L.P., Shikula E.N. The Micromechanics of Short-Term Damageability of Fibrolaminar Composites // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **36**, N 5. – P. 638 – 646.
66. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Note on the Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composites under Thermal Actions // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 1. – P. 60 – 67.
67. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Laminated Materials under Thermal Actions // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 4. – P. 432 – 439.
68. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Fibrous Materials with Transversely Isotropic Fibers under Thermal Actions // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 6. – P. 701 – 709.
69. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Damage Micromechanics of Laminated Fibrous Composites under Thermal Actions // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 9. – P. 1083 – 1093.
70. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Theory of Short-Term Microdamage for a Homogeneous Material under Physically Nonlinear Deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 4. – P. 338 – 395.
71. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Granular Material under Physically Nonlinear Deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 6. – P. 656 – 663.
72. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of Laminar Material // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 8. – P. 878 – 885.
73. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of a Fibrous Material // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 10. – P. 1137 – 1144.
74. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of Particulate Composite with Physically Nonlinear Inclusions and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 2. – P. 111 – 117.
75. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of the Physical Nonlinearity of Matrix on the Deformation of a Particulate Composite with Microdamageable Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 345 – 351.
76. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of a Laminated Composite with a Physically Nonlinear Reinforcement and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1246 – 1253.
77. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of a Laminated Material with Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1331 – 1338.
78. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of Fibrous Composite with Physically Nonlinear Fibers and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 1. – P. 32 – 39.
79. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of a Fibrous Composite with Physically Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 127 – 135.
80. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of a Physically Nonlinear Particular Material under a Combination of Normal and Tangential Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 12. – P. 1356 – 1363.
81. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of a Physically Nonlinear Fibrous Material under Simultaneous Normal and Tangential Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 282 – 290.
82. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of a Physically Nonlinear Laminate under Simultaneous Normal and Tangential Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 4. – P. 409 – 417.
83. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 591 – 620.
84. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation of Physically Nonlinear Stochastic Composites // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 12. – P. 1204 – 1212.
85. Shikula E.N. Dependence of the Strain Properties of Fibrous Composite Laminates on the Fiber-Strength Distribution Law // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 2. – P. 129 – 135.
86. Shikula E.N. Dependence of the Strain Properties of a Fiber Composite on the Binder Strength Distribution // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 3. – P. 250 – 256.
87. Weibull W.A. A Statistical Theory of the Strength of Materials // *Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.* – 1939. – N 151. – P. 5 – 45.

ЛЕОНИД ПЕТРОВИЧ ХОРОШУН

Доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Украины, заведующий отделом механики стохастически неоднородных сред Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Родился 25 апреля 1937 г. в поселке Любеч Репкинского района Черниговской области. Окончил в 1959 г. механико-математический факультет Киевского государственного университета им. Т.Г.Шевченко. В 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1970 г. – докторскую. В Институте механики НАН Украины работает с 1963 г. в должностях: инженера, младшего, старшего научного сотрудника и с 1973 г. – заведующего отделом. Звание профессора по специальности «Механика деформируемого твердого тела» присвоено в 1979 г. В 2000 г. Л.П.Хорошун избран членом-корреспондентом НАН Украины.



Основными направлениями исследований являются: механика композитных материалов (прогнозирование эффективных физико-механических свойств и теория многофазных сред), механика разрушения (теория трещин и накопления повреждений в однородных и композитных материалах), теория слоистых пластин и оболочек, термодинамические основы реологии, концентрация напряжений возле отверстий, статистическая механика.

Автор (соавтор) более 290 научных работ, в том числе 10 монографий, подготовил 23 кандидата и 5 докторов наук.

В 1988 г. удостоен Государственной премии Украины в области науки и техники и именной премии НАН Украины в 2007 г.

Член Национального комитета Украины по теоретической и прикладной механике, член редколлегии международного научного журнала «Прикладная механика».

ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА ШИКУЛА

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела стохастически неоднородных сред Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

Родилась 10 августа 1958 г. в г. Харьков. Окончила в 1980 г. механико-математический факультет Киевского государственного университета им. Т.Г. Шевченко. В 1985 г. защитила кандидатскую диссертацию, в 1998 г. – докторскую. Звание старшего научного сотрудника по специальности «Механика деформируемого твердого тела» присвоено в 1993 г. С 1998 г. – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Украины. Основными направлениями научных исследований являются: механика композитных материалов и газонасыщенных пористых сред (прогнозирование эффективных физико-механических свойств и напряженно-деформированного состояния линейных и нелинейных материалов), механика разрушения (теория накопления микрповреждений в однородных и композитных материалах).



Автор (соавтор) более 100 научных работ, в том числе 2 монографий.

Поступила 21.01.2009

Утверждена в печать 19.03.2009