Романенко В.М. Апроксимація обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами / В.М. Романенко // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. – 2011. – Вип.4. – С. 103–106.

Апроксимація обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами

Отримані достатні умови наближення обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння в банаховому просторі з кількома необмеженими операторними коефіцієнтами розв'язками відповідних задач Коші. Оцінена швидкість наближення.

Ключові слова: лінійне різницеве рівняння, банахів простір, задача Коші.

Аппроксимация ограниченных решений линейных разностных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами

Получены достаточные условия приближения ограниченного решения линейного разностного уравнения в банаховом пространстве с несколькими неограниченными операторными коэффициентами решениями соответствующих задач Коши. Оценена скорость приближения.

Ключевые слова: линейное разностное уравнение, Банах пространство, задача Коши.

Approximation of bounded solutions of linear difference equations with unbounded operator coefficients

Sufficient conditions are obtained for approximation of bounded solution of linear difference equation in Banach space with unbounded operator coefficients by solutions of corresponding Cauchy problems. Rate of approximation is estimated.

Key words: linear difference equation, Banach space, Cauchy problem.

Вступ.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір з нульовим елементом $\vec{0}$, $L(B)$ – простір усіх лінійних неперервних операторів в B, I – одиничний оператор, $S := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

Нехай також $D \subset B$ – лінійна множина, $A_k : D \to B$ – замкнені оператори. Нехай виконується

Припущення 1. Оператори

$A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ попарно комутують, тобто $\forall k, l, 1 \leqslant k, l \leqslant m-1 \; \forall x \in D, A_k x \in D, A_l x \in D$: $A_k A_l x = A_l A_k x$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x(n+1) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k x(n-k) + y(n), n \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

де $y:=\{y(n): n\in \mathbf{Z}\}$ – відома обмежена послідовність елементів B, $x:=\{x(n): n\in \mathbf{Z}\}$ – шукана обмежена послідовність елементів B.

В роботі [1] розглянуте аналогічне рівняння першого порядку

$$x(n+1) = A_0 x(n) + y(n),\ n\in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

За умови, що спектр $\sigma(A_0)$ не перетинається з S, простір B розкладається в пряму суму підпросторів B_+ та B_-, що відповідають частинам спектра $\sigma(A_0)$, що лежать відповідно ззовні та всередині S.

Теорема 1 *[1] Нехай*

$$\sigma(A_0)\cap S = \varnothing,$$

$y=\{y(n): n\in \mathbf{Z}\}$ – фіксована обмежена послідовність елементів B, $x=\{x(n): n\in \mathbf{Z}\}$ – єдиний обмежений розв'язок різницевого рівняння (2), відповідний послідовності y. Тоді існують числа $q_\pm \in (0,1), N_\pm\in \mathbf{N}$ такі, що для всіх $\alpha_- \in B_-, \alpha_+ \in B_+$, а також для всіх натуральних чисел m,k, які задовольняють умови $m\geqslant \max\{N_+, N_-\},\ N_-\leqslant k\leqslant 2m-N_+$, справджується нерівність

$$\| x(-m+k) - u(-m+k) \| \leqslant q_-^k \| x_-(-m) - \alpha_- \| + q_+^{2m-k} \| x_+(m) - \alpha_+ \|,$$

де u – сума розв'язків двох задач Коші, що відповідають рівнянню (2) в інваріантних підпросторах, α_-, α_+ – відповідні початкові умови.

В роботі [3] цей результат узагальнюється на випадок рівняння (1) з одним необмеженим операторним коефіцієнтом.

В даній статті аналогічні результати отримані у випадку рівнянь з кількома необмеженими операторними коефіцієнтами. При цьому наявність кількох необмежених операторних коефіцієнтів вимагає ускладнення умов на оператори та на відому послідовність.

Апроксимація розв'язку.

Позначимо через B^m декартів добуток m екземплярів простору B; B^m – банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\| \vec{z} \|_m := \max_{1\leqslant k\leqslant m} \| z_k \|,\ \vec{z} = (z_1, ..., z_m)\in B^m,$$

I_m – одиничний оператор у цьому просторі.

Аналогічно міркуванням з роботи [3] рівняння (1) записується у вигляді еквівалентного рівняння в цьому просторі таким чином:

$$\vec{z}(n+1) = A\vec{z}(n) + \vec{y}(n),\ n\in \mathbf{Z}, \tag{3}$$

$$\vec{z}(n)=\begin{pmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \vdots \\ x(n-m+1) \end{pmatrix}, \vec{y}(n)=\begin{pmatrix} y(n) \\ \vec{0} \\ \vdots \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{m-1} \\ I & O & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & O \end{pmatrix},$$

причому на незаповнених місцях матриці A знаходяться нульові оператори. Матриця A визначає в просторі B^m оператор, який теж позначатимемо буквою A, з областю визначення D^m.

В роботі [1] рівняння (3) досліджувалося за умови, що спектр оператора A не перетинається з одиничним колом S. Якщо за допомогою алгебраїчних доповнень формально записати оператор, обернений до оператора $A-zI_m$ при $z\in S$, то компонентами отриманої матриці будуть скінченні суми доданків вигляду

$$A_k z^j(\Omega(z))^{-1}, 0\leqslant k\leqslant m, j\in \mathbf{N}\cup\{0\},$$

де

$$\Omega(z):=\sum_{k=0}^{m-1}A_k z^{m-1-k}-z^m.$$

У випадку необмежених операторних коефіцієнтів потрібні додаткові умови для надання сенсу таким виразам.

Теорема 2 *Нехай виконується припущення 1, існує оператор* $C\in L(B)$, *який комутує з операторами* $A_k, 0\leqslant k,l\leqslant m-1$ *та виконуються умови:*

1) при кожному $z\in S$ оператор $\Omega(z)$ має неперервний обернений;

2) при $0\leqslant k,l\leqslant m-1$ функції

$$f_k(z):=A_k(\Omega(z))^{-1}C,\ f_{kl}(z):=A_kA_l(\Omega(z))^{-1}C$$

є коректно визначеними функціями зі значеннями в $L(B)$, аналітичними в околі одиничного кола S, причому в цьому околі $f_{kl}=f_{lk}$;

3) при $0\leqslant k,l\leqslant m-1$ оператор A_k комутує з обмеженими операторами $(\Omega(z))^{-1}, z\in \mathbf{C}$;

4) $y(n)=Cv(n), n\in \mathbf{Z}$, де $\{v(n): n\in \mathbf{Z}\}$ – обмежена послідовність у просторі B.

Тоді рівняння (3) має обмежений розв'язок вигляду

$$\vec{z}(n)=\sum_{j\in \mathbf{Z}}G(n-j)\vec{y}(j), n\in \mathbf{Z}, \tag{4}$$

де

$$G(j)x:=-\frac{1}{2\pi i}\int_S z^{j-1}(A-zI_m)^{-1}x\,dz,\ j\in \mathbf{Z},$$

коло S пробігається проти годинникової стрілки, $(A-zI_m)^{-1}$ – формальний обернений до матричного оператора $(A-zI_m)$.

При цьому рівняння (1) має обмежений розв'язок вигляду $x(n) = (\vec{z}(n))_1, n \in \mathbf{Z}.$

Proof. З умови 2) випливає коректність означення оператора $G(j)$ для елементів $x \in B,$ які входять в область значень $R(C)$ оператора $C.$ Абсолютну збіжність ряду (4), а також рядів

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} A_k G(n-j)y(j)$$

при $0 \leqslant k \leqslant m-1$ забезпечує умова 2) та оцінки

$$\| G(j) \| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{S_\varepsilon} z^j A_k (A - zI_m)^{-1} C dz \right\| \leqslant (1+\varepsilon)^j \sup_{z\in S_\varepsilon} \| A_k (A - zI_m)^{-1} C \| \qquad (5)$$

при $j < 0,$ де $S_\varepsilon := \{ z \in \mathbf{C} : |z| = 1 + \varepsilon \},$

$$\| G(j) \| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{S_{-\varepsilon}} z^j A_k (A - zI_m)^{-1} C dz \right\| \leq (1-\varepsilon)^j \sup_{z\in S_{-\varepsilon}} \| A_k (A - zI_m)^{-1} C \| \qquad (6)$$

при $j \geqslant 0,$ де $S_{-\varepsilon} := \{ z \in \mathbf{C} : |z| = 1 - \varepsilon \}.$ При цьому $\varepsilon > 0$ обираємо відповідним околу з умови 2). Крім того,

$$AG(j)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_S z^{j-1} (I_m + z(A - zI_m)^{-1}) x dz = G(j+1)x, \ j \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad AG(0)x = G(1)x - x,$$

де $x \in R(C).$ Тому послідовність (4) є розв'язком рівняння (3).
З зображення (3) випливає, що перша координата розв'язку $\vec{z}$ є розв'язком рівняння (2).

Зауваження. 1. За умов теореми спектр оператора A не обов'язково не перетинається з одиничним колом (див. приклад нижче), тому ця теорема застосовна у випадках, що не описані в роботі [1]. З іншого боку, результати роботи [3] не є частинним випадком теореми 2, бо умови в цій теоремі суттєво враховують наявність кількох необмежених операторних коефіцієнтів.

2. Обмежений оператор $G(0),$ описаний в теоремі 1, у випадку $C = I$ є проектором на деякий підпростір $B_+^m,$ а оператор $I - G(0)$ – проектором на доповнюючий підпростір B_-^m (такий розклад описаний у роботі [4]). В цій ситуації у роботі [1] відповідні задачі Коші ставляться окремо в отриманих підпросторах.

В нашому випадку позначимо
$P_+ := G(1), P_- := I - G(1), \quad A_- := G(2), A_+ := G(0), \quad y_+(n) := P_+ y(n), y_-(n) := P_- y(n), n \in \mathbf{Z},$
та розглянемо при довільному $N \in \mathbf{N}$ такі задачі Коші:

$$\begin{cases} \vec{u}_-(-N+k) = A_- \vec{u}_-(-N+k-1) + \vec{y}_-(-N+k-1), k \geqslant 1, \\ \vec{u}_-(-N) = P_- \vec{\alpha}_-, \end{cases} \qquad (7)$$

та

$$\begin{cases}\vec{u}_+(N-k) = A_+\vec{u}_+(N-k+1) - A_+\vec{y}_+(N-k), k\geqslant 1, \\ \vec{u}_+(N) = P_+\vec{\alpha}_+, \end{cases} \tag{8}$$

де $\vec{\alpha}_-, \vec{\alpha}_+$ – фіксовані елементи з B^m.

Теорема 3 *Для довільної обмеженої послідовності* $\{y(n): n\in \mathbf{Z}\} \subset B$ *та будь-яких* $\vec{\alpha}_-, \vec{\alpha}_+ \in B$ *при виконанні умов теореми 2 задачі Коші (7) та (8) мають єдині обмежені розв'язки. При цьому для обмеженого розв'язку* x, *побудованого в теоремі 2, справджується оцінка*

$$\|x(n) - u_-(n) - u_+(n)\| \leqslant L((1+\varepsilon)^{n-N} + (1-\varepsilon)^{n+N}), \quad -N\leqslant n\leqslant N,$$

де стала L залежить лише від операторних коефіцієнтів.

Proof. Користуючись звичайними міркуваннями для дій над функціями від операторів (див. [5]), отримаємо

$$A_- G(j)x = \frac{1}{2\pi i}\int_S z(A - zI_m)^{-1} G(j)xdz = -\frac{1}{2\pi i}\int_S (-G(j) + A(A - zI_m)^{-1})G(j)xdz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_S (A - zI_m)^{-1} G(j+1)xdz = G(j+1),\ j<0, \quad A_- G(0)x = G(1)x - x,\ x\in R(C).$$

Тут враховано, що

$$G(j)P_- x = G(j)x,\ j<0,\ x\in R(C).$$

Тому легко перевірити, що розв'язком задачі Коші (7) буде послідовність

$$\vec{u}_-(n) = G(n+N+1)\vec{\alpha}_- + \sum_{j=-N+1}^{n} G(n-j)\vec{y}_-(j),\ n\geqslant -N. \tag{9}$$

Аналогічно з рівностей

$$A_+ G(j)x = G(j+1),\ j>0, \quad A_+ G(0)x = G(1)x - x,\ x\in R(C),$$

випливає, що розв'язком задачі Коші (8) буде послідовність

$$\vec{u}_+(n) = G(n-N+1)\vec{\alpha}_+ + \sum_{j=n}^{N-1} G(n-j)\vec{y}_+(j),\ n\leqslant N. \tag{10}$$

Також при $-N\leqslant n\leqslant N$ отримаємо

$$\|x(n)-u_-(n)-u_+(n)\| \leqslant \|G(n-N+1)\vec{\alpha}_+\| + \|G(n+N+1)\vec{\alpha}_-\| + \sum_{j=-N+1}^{n}\|G(n-j)C\|\cdot\|v\|_\infty +$$

$$+\sum_{j=n}^{N-1}\|G(n-j)C\|\cdot\|v\|_\infty.$$

Враховуючи оцінки (5),(6), отримаємо твердження теореми.

Наслідок. Нехай $m=2$, оператори A_0, A_1 обертовні, комутують та функція

$$(z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-1}$$

аналітична в околі одиничного кола. Тоді умови теореми задовольняє оператор $C = A_0^{-1}A_1^{-1}$.

Приклад. Нехай $m=2$,

$$B = \{\{x_n : n\in \mathbf{N}\} \mid x_n \in \mathbf{C}, \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < +\infty\}, \quad (A_0 x)_n := n x_n, (A_1 x)_n := 3n x_n, n\in \mathbf{N},$$

$$D := \{\{x_n : n\in \mathbf{N}\} \mid x_n \in \mathbf{C}, \sup_{n\in\mathbf{N}} |n x_n| < +\infty\}.$$

Тоді функція $f(z) := (z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-1}$ аналітична в околі одиничного кола, що легко перевірити, використовуючи рівності

$$((z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-1} x)_n := (z^2 - nz - 3n)^{-1} x_n, n\in\mathbf{N}, \quad f'(z) = (2z I_m - A_0)(z^2 I_m - A_0 z - A_1)^{-2}.$$

Отже, може бути застосований наслідок з теореми 3. З іншого боку, коефіцієнтом в рівнянні (3) є оператор

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Результати робіт [1, 3] незастосовні, бо $1 \in \sigma(A)$. Дійсно, покажемо, що рівняння

$$(A - I_m)\vec{z} = ((1,1,\ldots),(1,1,\ldots))$$

не має розв'язків. Дійсно, воно еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} A_0 z_1 - z_1 + A_1 z_2 = (1,1,\ldots), \\ \qquad z_1 - z_2 = (1,1,\ldots), \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \qquad\qquad z_1 = z_2 + (1,1,\ldots), \\ n(z_2(n)+1) - z_2(n) - 1 + 2n z_2(n) = 1, \ n\in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Отже, $z_2(n) = (2-n)/(3n-1), n \in \mathbf{N}$. Проте в такому разі вектор z_2 не належить до області визначення оператора A_1.

Висновки.

Знайдені достатні умови апроксимації обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння з кількома необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі розв'язками відповідних задач Коші. Отримана оцінка швидкості наближення.

References

[1] Романенко В.М. *Наближення обмежених розв'язків різницевих та диференціальних рівнянь розв'язками відповідних задач Коші* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – №2. – С. 142 – 147.

[2] Городній М.Ф., Романенко В.М. *Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач* // Укр. мат. журн. – 2000. – т.52. – №4. – С. 548 – 552.

[3] Романенко В.М. *Апроксимація обмежених розв'язків диференціальних рівнянь старших порядків* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 3. – С. 153–156.

[4] Дороговцев А.Я. *Периодические и стационарные режимы бесконечных детерминированых и стохастических динамических систем.* К.: Вища шк. – 1992. – 319с.

[5] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* – М.: Наука, 1970. – 536 с.