

УДК 62-50

Н.І. Вовкодав, к.ф.-м.н., доц.
 Національний університет харчових технологій

І.Ф. Киричок, д.ф.-м.н., с.н.с.
 Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України
 В.В. Михайленко, д.ф.-м.н., проф.
 Житомирський державний технологічний університет

ДЕМПФІРУВАННЯ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАСТИНКИ П'ЕЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ АКТУАТОРАМИ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

Досліджується вплив деформації зсуву на ефективність демпфірування вимушених коливань круглої в'язкопружної пластинки за допомогою п'єзокерамічних накладок-актуаторів, до яких підводиться різниця електричних потенціалів.

Вступ. В сучасній техніці для обмеження амплітуд вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій ефективно застосовуються активні способи, коли в структуру елемента вводяться п'єзоелектричні включення (актуатори), до яких з частотою механічного збудження підводиться різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази для демпфірування найбільш енергоємних мод коливань [1, 2, 3]. Ефективність демпфірування тонкостінних елементів залежить від умов механічного закріплення, форми і геометричних розмірів актуатора, властивостей пасивних і п'єзоелектричних матеріалів, їх температурної чутливості при вимушених коливальних процесах. Більшість робіт цього наукового напрямку виконано для тонкостінних елементів конструкцій в рамках стандартних гіпотез Кірхгофа-Лява, що узагальнюються на випадок електромеханіки та плоского напруженого стану. Ряд результатів досліджень з цієї проблематики одержано в [4, 5, 6] та ін.

Метою даної роботи є дослідження впливу деформації зсуву на ефективність демпфірування вимушених осесиметричних коливань круглої пластинки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів.

Постановка задачі. Розглядається суцільна кругла пластинка товщиною h і радіусом R , яка віднесена до радіальної системи координат з початком $z = 0$, $r = 0$ в центрі середньої площини. Зовнішні площини $z = \pm h/2$ пластинки жорстко скріплені з п'єзокерамічними накладками-актуаторами однакової товщини δ та радіуса r_0 . Актуатори мають взаємно протилежний напрямок товщинної поляризації п'єзокераміки. Далі приймається, що поляризація в напрямку $z > 0$ характеризується п'єзомодулем d_{31} , а при $z < 0$ – ($-d_{31}$). На зовнішні площини актуаторів, а також між актуаторами і пасивним шаром нанесені нескінченно тонкі електроди. Пластинка навантажена рівномірно розподіленим поверхневим тиском, який змінюється в часі t за гармонічним законом $P = P_0 \cos \omega t$ з круговою частотою ω , близькою до резонансної. Крім того, до зовнішніх електродів актуаторів підводиться різниця електричних потенціалів $\psi(h/2 + \delta) - \psi(-h/2 - \delta) = Re(2Ve^{i\omega t})$ з тією ж частотою, що і механічне навантаження. Внутрішні електроди підтримуються при нульовому потенціалі. В силу конструктивної симетрії пластинки, способу поляризації актуаторів та характеру навантаження в пластинці виникають чисто згинні осесиметричні коливання.

Моделювання електромеханічної поведінки такої пластинки ґрунтується на гіпотезі прямої лінії для механічних величин по всьому пакету шарів [7]. Відносно електричних змінних приймаємо, що складова вектора електричної індукції D_z в напрямку поляризації п'єзоактуатора не залежить від товщинної координати, а складовими D_x , D_y , перпендикулярними до напрямку поляризації, можна знехтувати [8, 9]. При цьому рівняння електростатики [9] задовольняються тотожно, а складові вектора електричної напруженості E_x , E_y знаходяться з визначальних рівнянь.

В результаті застосування цих припущень до тривимірних визначальних рівнянь електров'язкопружності [10] та переходу від напружень до статично еквівалентних їм за щільною пакета зусиль і моментів електромеханічна поведінка пластинки описується системою диференціальних рівнянь вимушених гармонічних коливань згину (множник $e^{i\omega t}$ опускається):

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{1}{r}Q_r + \rho \overline{h\omega^2} w + P_0 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}(M_r - M_0) - Q_r + \frac{\rho h}{12} \overline{\omega^2} \psi_r = 0;$$

співвідношеннями електров'язкопружності:

$$M_r = D_{11}\chi_r + D_{12}\chi_0 + M_E; \quad M_0 = D_{12}\chi_r + D_{11}\chi_0 + M_E; \tag{2}$$

$$Q_r = k_y c_{xy} \epsilon_{rz} = k_x c_{xy} (\psi_r - \theta);$$

залежностями між деформаціями та переміщеннями:

$$\chi_r = \frac{d\psi_r}{dr}, \quad \chi_0 = \frac{\psi_r}{r}, \quad \theta = -\frac{dw}{dr} \tag{3}$$

і електростатичними виразами:

$$E_z = -\frac{V}{\delta} + \frac{b_{31}}{b_{33}} \left(\frac{h+\delta}{2} \pm z \right) \chi \left(-\frac{h}{2} - \delta \leq z \leq -\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + \delta \right); \tag{4}$$

$$D_z = -b_{33} \frac{V}{\delta} + b_{31} \frac{h+\delta}{2} \chi; \quad \chi = \chi_r + \chi_0.$$

Механічні граничні умови приймаються такими:

$$w = 0, \quad \theta = 0 \quad (r = R). \tag{5}$$

В рівняннях (1)–(5) прийнято такі позначення:

$$D_{11} = \frac{1}{12} (c_{12} h^3 + 2c_{11}^c \delta^3 + 2\gamma_{11} \delta^3); \quad D_{12} = \frac{1}{2} (c_{12} h^3 + 2c_{12}^c \delta^3 + 2\gamma_{11} \delta^3);$$

$$c_{33} = 2c_{33}^c \delta + Gh; \quad \delta^3 = 4\delta^3 + 6\delta^2 h + 3\delta h^2; \quad \rho h = \rho h + 2\rho \delta;$$

$$\epsilon_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad c_{11}^c = \frac{1}{S_{11}^c (1-\nu^2)}; \quad \nu_E = -\frac{S_{12}^c}{S_{11}^c}; \quad c_{12} = \nu \quad c_{11}; \quad c_{33}^c = \nu_E c_{11}^c;$$

$$\gamma_{11} = \frac{b_{31}^c}{b_{33}}; \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^c (1-\nu_E)}; \quad b_{33} = \epsilon_{33}^c (1-K_r^2); \quad c_{33}^c = \frac{1}{S_{33}^c (1-K_{15}^2)}; \tag{6}$$

$$K_r^2 = \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^c \epsilon_{33}^c (1-\nu_E)}; \quad K_{15}^2 = \frac{d_{15}^2}{S_{33}^c \epsilon_{15}^c}; \quad M_E = b_{31} (h+\delta) V; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

$$\rho h = \rho h^3 + 2\rho \delta^3; \quad E = E' + iE''; \quad S_{\mu}^c = S_{\mu}^c (1-i\delta_{\mu}^c);$$

$$d_{\mu} = d_{\mu}^c (1-i\delta_{\mu}^c); \quad \epsilon_{\mu}^c = \epsilon_{\mu}^c (1-i\delta_{\mu}^c);$$

$w = w' + iw''$ і $\psi_r = \psi_r' + i\psi_r''$ – комплексні амплітуди переміщення згину і кута повороту в площині rz ; Q_r, M_r, M_0 – аналогічні величини перерізуючої сили, радіального і кутового моментів; E, ν – модулі Юнга і коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу; $S_{\mu}^c, d_{\mu}^c, \epsilon_{\mu}^c$ – відповідно податливості, пієзокоefficient і діелектричні проникливості пієзокераміки; ρ, ρ_c – відповідно густина пасивного і пієзоактивного матеріалів; k_x – коефіцієнт зсуву, визначення якого можна провести на основі уточнених теорій шаруватих пружних пластин і оболонки [7]. Тут і далі приймаються стандартні позначення комплексних електромеханічних величин і параметрів: $a = a' + ia''$; $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$.

Метод розв'язування задачі. Для розв'язання поставленої задачі співвідношення електромеханіки (1)–(3) записуються у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду:

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = [A]\bar{Y} + B \tag{7}$$

з граничними умовами

$$B_1 \bar{Y} = 0 \quad (r=0); \quad B_2 \bar{Y} = 0 \quad (r=R), \tag{8}$$

де $\bar{Y}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{Q_r, \psi_r, w, M_r\}$ – шукана комплекснозначна вектор-функція; $[A]$ – комплекснозначна квадратна матриця, відмінними від нуля елементами якої є:

$$a_{11} = \frac{1}{r}; a_{11} = -\rho h \omega^2; a_{20} = \frac{1}{r} v_{12}'; a_{24} = \frac{1}{D_{11}}; a_{32} = -1; v_{12}' = -\frac{D_{11}}{D_{11}};$$

$$a_{12} = \frac{1}{k_s c_{33}}; a_{21} = -1; a_{22} = \frac{1}{r^2} D_{11} (1 - v_{12}') - \frac{\rho h}{12} \omega^2; a_{24} = -\frac{1 + v_{12}'}{r};$$

$\vec{W} = \left\{ U; \frac{M_x}{D_{11}}; 0; \frac{1}{r} (1 + v_{12}') M_r \right\}$ – комплекснозначний вектор-стовпчик; B_1, B_2 – комплекснозначні прямокутні матриці, ненульові елементи яких визначаються граничними умовами (5).

Крайова задача (7), (8) розв'язується методом дискретної ортогоналізації [11] з використанням безрозмірної просторової координати $x = r/R$. При цьому в процесі чисельного розв'язання задачі використовується підхід [11], згідно з яким в особливій точці $x=0$ виконуються умови регулярності $Q_z = 0, \vartheta = 0$ та розв'язується спрощена система рівнянь (7).

Залежність оптимального значення електричного потенціалу V_A від поверхневого механічного тиску P_0 приймається у вигляді:

$$V_A = -k_A P_0, \quad (9)$$

де k_A – комплексний коефіцієнт керування.

Коефіцієнт k_A на основі підходу [5] обчислюється за формулою:

$$k_A = + \frac{R}{b_{31}(h + \delta)} \int_0^1 \int_0^1 dx \int_0^1 (\chi_r + \chi_\theta) \sin \chi \left(x_0 = \frac{r_0}{R} \right), \quad (10)$$

як справедливий на резонансних частотах вимушених коливань пластинки. Знаком «мінус» у (9) враховується протифазне підведення електричного потенціалу V_A для компенсації впливу механічного гармонічного навантаження.

Результати розрахунків. Розрахунки проводились для пластинки з радіусом $R = 0,2$ м, виготовленої із полімеру [12] з механічними в'язкопружними характеристиками $G' = 794,2$ [МПа], $G'' = 73,1$ [МПа], $\nu = \nu' = 0,3636$ ($\nu' = 0$), $\rho = 929$ кг/м³. Актуатори виготовлено з пізлокераміки ЦТС-БС-2 [13] з такими значеннями параметрів для комплексних модулів (6):

$$\begin{aligned} S_{11}^* &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м/Н}^2; S_{33}^* = 39,7 \cdot 10^{-12} \text{ м/Н}^2; d_{31}^* = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; d_{15}^* = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \\ \varepsilon_{11}^* &= 21 \cdot 10^{-2} \varepsilon_0; \varepsilon_{33}^* = 18,5 \cdot 10^{-2} \varepsilon_0; \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \delta_{11}^* = 0,16 \cdot 10^{-2}; \delta_{33}^* = 0,14 \cdot 10^{-2}; \\ \delta_{15}^* &= 0,4 \cdot 10^{-2}; \delta_{13}^* = 0,35 \cdot 10^{-2}; \delta_{31}^* = 0,35 \cdot 10^{-2}; \delta_{11}^* = 0,5 \cdot 10^{-2}; \nu_k = \nu_k' = 0,37 \text{ } (\nu_k' = 0); \\ \rho &= 7520 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

При врахуванні деформації зсуву приймається, що $k_S = 5/6$ [7].

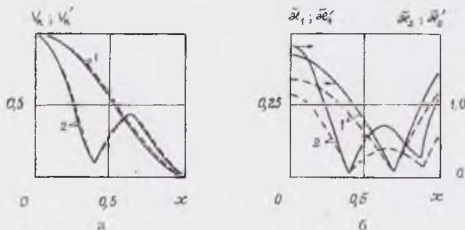


Рис. 1

На рис. 1, а і б для пластинки товщиною $h = 0,04$ м з актуаторами товщиною $\Delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м та радіусом $x_0 = 0,8$ м, яка навантажена гармонічним тиском інтенсивності $P_0 = 1$ Па, показано відповідно радіальний розподіл нормованих модулів амплітуди прогибів $\| |W| \cdot 10^{-2} / (A_n \cdot A_n')$ і сумарних кривизн $(\bar{\chi}_n; \bar{\chi}_n') = | \chi | \cdot 10^{-2} / (A_n \cdot A_n')$, $n = 1, 2$. Розрахунки

проводилися на резонансних частотах ω_p згідно з теорією Кірхгофа-Лява (суцільні лінії) та з врахуванням деформації зсуву (штрихові лінії). При цьому криві 1 ($n = 1$) відповідають першій моді коливань та значенням $\omega_p = 0,532 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $A_1 = 0,2045 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ (суцільні лінії) і $\omega'_p = 0,473 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $A'_1 = 0,2501 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ (штрихові лінії), а криві 2 ($n = 2$) – другій моді коливань при $\omega_p = 0,219 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, $A_2 = 0,1016 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ (суцільні лінії) і $\omega'_p = 0,156 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, $A'_2 = 0,1749 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ (штрихові лінії).

З наведених результатів випливає, що деформація зсуву (штрихові лінії) призводить до зміщення резонансних частот вліво ($\omega'_p < \omega_p$), збільшення параметра максимального прогину ($A'_{1,2} > A_{1,2}$) і практично не змінює форму коливань (рис. 1, а). В більшій мірі деформація зсуву проявляється в перерозподілі вздовж радіуса пластинки нормованої сумарної кривизни (рис. 1, б) як першої, так і, особливо, другої моди коливань. Цей фактор, зокрема, є визначальним при обчисленні коефіцієнта керування k_A за формулою (10).

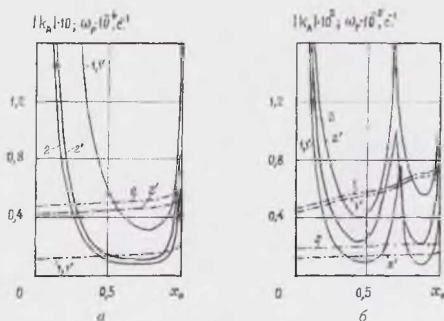


Рис. 2

Відмітимо, що проведені чисельні розрахунки для тонких пластинок ($h/R \leq 1/20$) показали, що деформація зсуву не вносить помітного вкладу в характеристики коливань першої моди і проявляється при коливаннях пластинки на більш високих резонансних частотах, починаючи з другої.

На рис. 2, а, б в залежності від безрозмірного радіуса актуатора $x_0 = r_0/R$ ($\delta = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$) наведено криві розподілу резонансних частот ω_p (втрих-пунктирні лінії) і модуля коефіцієнта керування $|k_A|$ (суцільні лінії) для демпфування першої (рис. 2, а) та другої (рис. 2, б) мод вимушених згинних коливань, розрахованих на основі гіпотез Кірхгофа-Лява (криві 1, 2) і з врахуванням деформації зсуву (криві 1', 2'). При цьому криві 1, 1' отримані для пластинки товщиною $h = 0,01 \text{ м}$, а криві 2, 2' – для $h = 0,04 \text{ м}$.

Аналіз кривих на рис. 2 показує, що деформація зсуву не впливає на коефіцієнт керування актуатора для тонких пластинок (криві 1, 1'). Для порівняно товстих пластинок (криві 2, 2') вона призводить до збільшення коефіцієнта $|k_A|$ як в області частот першого, так і, особливо, другого резонансів. В той же час деформація зсуву не впливає на оптимальний (мінімальний) розмір x_0 кругів актуатора.

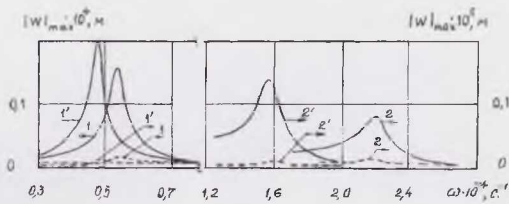


Рис. 3

На рис. 3 показано амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) коливань пластинки товщиною $h = 0,04$ м з актуатором, що має радіус $x_0 = 0,8$ і товщину $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м, при гармонічному збудженні в діапазоні частот першого (криві 1, 1') та другого (криві 2, 2') резонансів. Криві 1, 2 розраховані на основі гіпотез Кірхгофа-Лява, а 1', 2' – з врахуванням деформації зсуву. Суцільні лінії відповідають випадку збудження коливань поверхневим тиском $P_0 = 0,8 \cdot 10^3$ Па. АЧХ при спільній дії механічного навантаження і протифазно підведеного до актуатора електричного потенціалу V_A характеризуються штриховими лініями. Останні розраховані для наступних значень активної V_A' і реактивної V_A'' складових амплітуд потенціалу: $V_A' = -6,932$ В, $V_A'' = -0,2856 \cdot 10^{-1}$ В (криві 1); $V_A' = -8,848$ В, $V_A'' = -0,5365 \cdot 10^{-1}$ В (криві 1'); $V_A' = -1,99$ В, $V_A'' = -0,3166$ В (криві 2); $V_A' = -5,541$ В, $V_A'' = -0,3418$ В (криві 2'). Тут знак «мінус» вказує на протилежність фаз механічного та електричного навантаження.

Порівняння кривих рис. 3 (суцільні і штрихові лінії) дозволяє зробити висновок про можливість гасіння механічно збуджених коливань пластинки шляхом вибору відповідної амплітуди електричного потенціалу, що протифазно з частотою механічного навантаження підводиться до актуаторів.

Висновок. На основі проведених числових експериментів виявлено, що вплив деформації зсуву на коливальні параметри, особливо тонких пластинок, з'являється у зміщенні резонансних частот вліво та збільшенні амплітуд прогинів при вимушених коливаннях на цих частотах. Ця обставина супроводжується ростом значень електричного потенціалу V_A для компенсації механічного навантаження. Показано, що за допомогою актуатора одного і того ж розміру можна гасити вимушені згинні коливання пластинки на першій і другій модах. Проте, в силу великої енергоємності першої моди, для її гасіння необхідно підводити електричний потенціал більшої амплітуди, ніж при гасінні другої моди.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел // Прикл. механика. – 2002. – 38. – № 3. – С. 13–45.
2. Trou H.S., Bergman L.A. Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 400 p.
3. Trou H.S. Piezoelectric shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/London. – 1993. – 400 p.
4. Карнаухов В.Г., Козлов В.І., П'ятецька О.В. Активне демпфювання осесиметричних резонансних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричних включень // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
5. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., П'ятецька О.В. Вплив температури дисипативного розігріву на активне демпфювання вимушених осесиметричних коливань круглої пластини за допомогою п'єзоелектричного актуатора // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2004. – № 3. – С. 107–114.

6. *Киричок І.Ф., П'ятецька О.В., Карнаухов М.В.* Згинні коливання та дисипативний розігрів кільцевої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2006. – № 2. – С. 184–192.
7. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной толщины. – К.: Наук. думка, 1981. – 516 с.
8. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И.* Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 2001. – 37. – № 2. – С. 45–76.
9. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 5).
10. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
11. *Григоренко Я.М., Мукоїд А.П.* Розв'язування лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К.: Либідь, 1992. – 148 с.
12. *Несторенко П.П., Червинко О.П., Сенченков И.К.* Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов при нормальном нагружении // Вестник Национального технического университета Украины «КПИ». – 2002. – № 9. – С. 3–8.
13. *Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А.* О зависимости свойства пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20. № 7. – С. 70–74.

ВОВКОДАВ Наталя Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету харчових технологій.

Наукові інтереси:

– зв'язані задачі термoeлектромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних п'єзоактивних матеріалів при гармонічному навантаженні.

Т. 287-96-16.

КИРИЧОК Іван Федорович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Наукові інтереси:

– розробка теорії і методів розв'язування зв'язаних задач термомеханіки і електромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів.

Т. 454-77-63.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– термомеханіка непружних п'єзоелектричних тіл.

Подано 07.06.2007