ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ

Володимир Листопад
Національний університет харчових технологій

Виконання будь-яких операцій з матрицями (додавання, віднімання, множення, знаходження оберненої, транспонування тощо) або їх елементами є достатньо громіздкими та довготривалими в часі. На практичному занятті по темі «Дії з матрицями та обчислення оберненої матриці» вдається розібрати максимально 2-3 приклади. Якщо при вивченні цієї теми скористатися комп'терною підтримкою, то кількість виконаних завдань зросте в 4-5 разів. Для роботи кожен викладач обирає програму (для комп'ютерної підтримки), яка є в наявності, або ту, з якою здобувачі освіти знайомились на практичних/лабораторних заняттях з інформатики раніше.

Нагадаємо деякі відомі факти з матричної алгебри [1, с.92](без доведення).

<u>Теорема 1</u>. Довільну невироджену матрицю A з допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної матриці E.

$$A \to E. \tag{1}$$

<u>Теорема 2.</u> Якщо до одиничної матриці порядкуу n застосувати ті самі елементарні перетворення тільки над рядками і в тому ж порядку з допомогою яких невироджена квадратна матриця A порядку n зводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця A^{-1} буде обернена до матриці A.

Описана в теоремі 2 схема дає спосіб знаходження оберненої матриці до даної з допомогою елементарних перетворень. При цьому зручно записувати матриці A і E поруч, розділяючи їх вертикальною рискою (розглядаючи розширену матрицю $\left(A|E\right)$), та одночасно проводити елементарні перетворення над рядками матриць A і E. В результаті перетворення рядків матриця $\left(A|E\right)$ перетвориться в матрицю $\left(E|A^{-1}\right)$, тобто

$$\left(A|E\right) \to \left(E|A^{-1}\right). \tag{2}$$

Цей метод обчислення оберненої матриці називають методом Жордана-Гауса. Проілюструємо його реалізацію на прикладі користуючись засобами Ms Excel.

<u>Приклад 1. [2, с.66]</u> Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Розв'язання.

Таблиця 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Обчислення оберненої матриці за методом**							
2	**Жордана-Гауса**							
3		**A**				**E**		
4	1	2	3	4	1	0	0	0
5	2	3	1	2	0	1	0	0
6	1	1	1	-1	0	0	1	0
7	1	0	-2	-6	0	0	0	1
8								
9	1	2	3	4	1	0	0	0
10	0	-1	-5	-6	-2	1	0	0
11	0	1	2	5	1	0	-1	0
12	0	2	5	10	1	0	0	-1
13								
14	1	0	-7	-8	-3	2	0	0
15	0	1	5	6	2	-1	0	0
16	0	0	-3	-1	-1	1	-1	0
17	0	0	-5	-2	-3	2	0	-1
18								
19	1	0	0	-5 2/3	- 2/3	- 1/3	2 1/3	0
20	0	1	0	4 1/3	1/3	2/3	-1 2/3	0
21	0	0	1	1/3	1/3	- 1/3	1/3	0
22	0	0	0	- 1/3	-1 1/3	1/3	1 2/3	-1
23								
24	1	0	0	0	22	-6	-26	17
25	0	1	0	0	-17	5	20	-13
26	0	0	1	0	-1	0	2	-1
27	0	0	0	1	4	-1	-5	3
28			**E**			A^{-1}		

У зафарбованих клітинках помічено розв'язні елементи для кожного кроку переходу.

Зауваження 1. Для переходу до наступної таблиці користуємося правилом прямокутника (Жорданові виключення) з обов'язковою фіксацією (клавіша F4) у створюваній формулі елементів розв'язного стовпця. Перевірку можна виконати користуючись функцією МУМНОЖ.

Зауваження 2. Теорема 2 виконується, якщо елементарні перетворення виконувати над стовбцями (Жорданові виключення по вертикалі), тобто матрицю E розташовують під матрицею A, тоді

$$\left[\frac{A}{E}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}}\right] \tag{3}$$

Зауваження 3. Якщо у співвідношенні (4) на місце одиничної матриці справа від вертикальної риски поставити матрицю B (це матриця-стовбець правої частини системи), то в результаті відповідних перетворень отримаємо матрицю $A^{-1}B$:

$$(A|B) \to (E|A^{-1}B), \tag{4}$$

де $A^{-1}B$ - є розв'язком системи в матричному вигляді.

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$

Розв’язання прикладу 3 проводиться за формулою (4). Відповідь. $x = 4,\ y = 2, z = 1.$

Зауваження 4. Якщо в співвідношенні (3) замість одиничної матриці під горизонтальною рискою поставити матрицю B, то в результаті відповідних перетворень отримаємо матрицю $A^{-1}B$:

$$\left[\frac{A}{B}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}B}\right] \qquad (5)$$

Обернена матриця використовується при розв’язуванні матричних рівнянь вигляду $AX = B$ (розв’язок $X = A^{-1}B$) та $YA = B$ (розв’язок $Y = BA^{-1}$).

Приклад 4. Розв’язати систему із прикладу 3 матричним методом самостійно. (Скористатися функціями МОБР та МУМНОЖ із Ms Excel).

Розглянемо приклади на розв’язування матричних рівнянь.

Приклад 5. [2, с.67]

Розв’язати матричне рівняння

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв’язання. Запишемо наше рівняння в матричному вигляді:

$X \cdot A = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Знаходимо матрицю обернену до матриці A - A^{-1}.

2) Множимо наше рівняння справа на A^{-1}. Отримаємо $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, або $X = C$, де $C = B \cdot A^{-1}$

3) Отже $X = B \cdot A^{-1}$ (див. таблицю 2)

Таблиця 2

66		**Розв’язування матричного рівняння (приклад 5)**							
67									
68		4	0	1	Крок 1		1	-1	0
69	**A=**	3	0	1	$A^{-1} =$		2	-3	1
70		1	1	1			-3	4	0
71									
72		1	1	1	Крок 2		0	0	1
73	**B=**	1	1	1	$C = B \cdot A^{-1} =$		0	0	1
74		2	2	2			0	0	2

Відповідь. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Переваги застосування електронних таблиць Ms Excel при реалізації методу Жордана – Гауса на заняттях з вищої математики:

1. Процес розв’язання займає лічені хвилини в порівнянні з підрахунком вручну .
2. Паралельно добре засвоюється теоретичний матеріал.
3. Виробляються:

- навички реалізації алгоритмічних процедур;
- вміння формулювати навчальну задачу, планувати діяльність щодо її розв’язання;
- вміння добирати та використовувати готові програмні засоби (математичні пакети прикладних програм та окремі функції);
- вміння складати програми для розв’язування типових навчальних задач;
- навички володіння основами логічного програмування;
- вміння добирати ефективний метод для розв’язування поставленої задачі.

Використовуючи запропоновану методику, викладач за досить короткий час може скласти систему завдань для проведення тематичного та підсумкового контролю.

Запропонований підхід має досить широкий спектр застосування в методах розв’язання задач лінійного програмування.

Список використаних джерел:

1. Гусак А.А.Справочник по высшей математике:/[Справочник]. Гусак А.А., Гусак Г.М. - Мн.: Наука і техніка, 1991. - 480 с.
2. Алгебра і теорія чисел. Практикум: В 2-х частинах/Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.А. – К.: Вища школа. Головне вид-тво, 1983. – ч. 1. 232 с.-Укр.