УДК 621.3.078.001

Вовк В.Г., ас. (НАУ)
Шевчук Д.О., ас. (НАУ)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА МНОГМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

В работе предложен новый метод и спектральные алгоритмы анализа качества многомерной динамической системы со случайными параметрами при стохастических воздействиях. Результаты работы будут полезны при решении многих серьёзных задач управления сложными техническими системами, системного управления “организациями”.

Решая разные по сложности задачи стабилизации ответственных сложных динамических объектов, системного управления технологическими и динамическими процессами в “организациях” необходимо оценивать показатели качества в реальных условиях эксплуатации. Как правило, динамические факторы которые влияют на процесс функционирования исследуемых систем, имеют чисто стохастический характер.

На сегодняшний день в отечественной литературе рассматриваются задачи анализа качества таких систем только при детерминированных операторах исследуемого объекта. Но высокие требования к качеству изделий и процессов, а также конкуренция различных рынков требуют более полных и близких к реальным постановок задач синтеза и анализа качества системы.

Исходя из выше сказанного поставим новую задачу анализа многомерной динамической системы при учёте случайных её коэффициентов передачи входной информации к выходу и стохастического характера воздействий на неё, а также найдём жесткие алгоритмы решения поставленных задач.

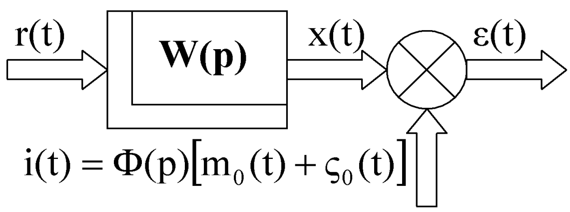

Рис.1 Структурная схема анализируемой системы

Пускай действие сложной динамической системы(рис.1) описывается оператором $\mathbf{W}(p)$ (аргумент $p=\frac{d}{dt}$) размерностью $m\times n$, базовые коэффициенты которого складываются из детерминированной матрицы $\mathbf{A}_0$ размерностью $m\times m$ и случайной матрицы $\mathbf{A}^0$ размерностью $m\times m$. Случайные коэффициенты $\mathbf{A}^0 = diag\{a_{ii}^0(t)\}$ есть стационарные центрированные процессы с известными динамическими характеристиками. В матрице $\mathbf{A}_0 = diag\{a_{0ii}\}$ a_{0ii} - заранее известные числа.

Матрица $\mathbf{W}(p)$ имеет следующий вид

$$\mathbf{W}(p)=\mathbf{W}_0(p)[\mathbf{A}_0(t)+\mathbf{A}^0(t)],$$

где матрицу $\mathbf{W}_0(p)$ размерностью $n\times m$ можно изобразить как

$$\mathbf{W}_0(p)=\{b_{0ij}\mathrm{W}_{ij}\}$$

при этом коэффициенты b_{0ij} при $i\neq j$ являются некоторыми детерминированными числами, а коэффициенты b_{0ii} равны единице.

На вход динамической системы(рис.1) подаётся программный сигнал

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{m}_0(t)+\zeta^0(t)+\varphi^0(t),$$

где $\mathbf{m}_0(t)$- детерминированная составляющая программы, что изменяется намного медленнее, чем случайные функции $\mathbf{A}^0(t)$, $\zeta^0(t)$ и $\varphi^0(t)$; $\zeta^0(t)$- случайная составляющая программ, $\varphi^0(t)$- случайные программные помехи. При этом $\boldsymbol{\zeta}^0(t)$, $\varphi^0(t)$ - *m*- мерные центрированные случайные процессы с известными динамическими характеристиками.

На выходе системы имеем сигнал следующего вида

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}^0(t)$$

где $\mathbf{x}_0(t)$- детерминированная составляющая выходного сигнала системы, $\mathbf{x}^0(t)$- его случайная составляющая. Желаемый *n*-мерный сигнал системы определяется за соотношением

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{\Phi}(p)\left[\mathbf{m}_0(t) + \boldsymbol{\zeta}^0(t)\right]$$

где $\mathbf{\Phi}(p)$- матрица желаемого оператора преобразования системой сигналов $\mathbf{m}_0(t)$, $\zeta^0(t)$.

Ошибка системы с её детерминированной $\boldsymbol{\varepsilon}_0(t)$ и случайной $\boldsymbol{\varepsilon}^0(t)$ составляющими находят по формуле

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}^0(t).$$

Для решения поставленной задачи анализа можно воспользоваться идеей подходов к задачам подобного рода, описанных на скалярном уровне и в пространстве времени [1]. Однако за базовый возьмем известный подход и спектральные алгоритмы анализа точности сложных динамических систем, которые, на наш взгляд, являются более эффективными[2].

Вначале выясним необходимые характеристики выходных сигналов исследуемой системы. Учитывая структурную схему системы (Рис.1), запишем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}^0(t) = \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}_0\mathbf{m}_0(t) + \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}_0\left[\zeta^0(t) + \varphi^0(t)\right] + \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}^0(t)\mathbf{m}_0(t) +\\ + \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}^0(t)\left[\zeta^0(t) + \varphi^0(t)\right]\end{aligned} \qquad (1)$$

После применения к формуле(1) операции математического ожидания получим

$$\langle\mathbf{x}(t)\rangle = \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{W}_0(p)\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{m}_0(t) + \left[\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}(0) + \overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}(0)\right]\boldsymbol{\delta}(t)\right\},$$

где $\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}(0)$, $\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}(0)$- векторы начальных ординат взаимных корреляционных функций сигналов указанных в индексах, $\boldsymbol{\delta}(t)$ - функция Дирака.

Фурье – образ детерминированной составляющей выхода имеет такой вид:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_0\left\{\mathbf{A}_0\mathbf{m}_0 + \left[\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}(0) + \overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}(0)\right]\right\}.$$

Здесь и в будущем аргумент $s = j\omega$ опущен.

Можно показать, что Фурье – образ случайной части сигнала выхода будет

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{W}_0\mathbf{A}_0\left(\zeta^0 + \varphi^0\right) + \mathbf{W}_0\mathbf{A}^0\mathbf{m}_0(\tau) \qquad (2)$$

где τ - медленный временной параметр.

Введём обозначения $\mathbf{M}_0 = diag\{m_{0ii}(\tau)\}$ и вектор $\overline{\mathbf{A}}^0 = \|\alpha_{ii}\|$ размерностью $1 \times m$. С учётом этих обозначений выражение (2) и его эрмитово-сопряженное выражение можно записать так

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^0 &= \mathbf{W}_0\left[\mathbf{A}_0\left(\zeta^0 + \varphi^0\right) + \mathbf{M}_0(\tau)\overline{\mathbf{A}}^0\right];\\ \mathbf{x}^0_* &= \left[\left(\zeta^0_* + \varphi^0_*\right)\mathbf{A}_{0*} + \overline{\mathbf{A}}^0_*\mathbf{M}'_0(\tau)\right]\mathbf{W}_{0*},\end{aligned} \qquad (3)$$

где «*» - символ эрмитового сопряжения, « ' » - символ транспонирования.

Учитывая выражение (3) и теорему Винера-Хинчина [2], определяем матрицу спектральных плотностей выходного сигнала как

$$\begin{aligned}\mathbf{S}'_{\mathbf{xx}} = \mathbf{W}_0\big[\mathbf{A}_0\left(\mathbf{S}'_{\zeta\zeta} + \mathbf{S}'_{\varphi\zeta} + \mathbf{S}'_{\zeta\varphi} + \mathbf{S}'_{\varphi\varphi}\right)\mathbf{A}_{0*} + \mathbf{A}_0\left(\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\alpha\zeta}} + \mathbf{S}'_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}\right)\mathbf{M}'_0(\tau) +\\ + \mathbf{M}_0(\tau)\left(\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\zeta\alpha}} + \mathbf{S}'_{\boldsymbol{\varphi\alpha}}\right)\mathbf{A}_{0*} + \mathbf{M}_0(\tau)\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\alpha\alpha}}\mathbf{M}'_0(\tau)\big]\mathbf{W}_{0*},\end{aligned} \qquad (4)$$

где $\mathbf{A}^0\mathbf{m}_0(t) = \mathbf{M}_0(\tau)\overline{\mathbf{A}}^0$.

Дисперсия выходного сигнала с учётом выражения (4) вычисляется по формуле

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}'_{\mathbf{xx}}\widehat{\mathbf{R}}\right)ds, \quad s = j\omega,$$

где tr - след матрицы, $\widehat{\mathbf{R}}$ - известная весовая положительно определённая матрица.

Теперь определим базовые характеристики сигналов ошибки системы, Фурье-образ которой имеет вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{x} - \mathbf{i} = \mathbf{Wr} - \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{m}_0 + \zeta^0\right). \tag{5}$$

Учитывая выражение (5), во временной области выражение ошибки системы записывается как

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \left[\mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}(p)\right]\mathbf{m}_0(t) + \left[\mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}(p)\right]\boldsymbol{\zeta}^0(t) + \\ + \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}_0\varphi^0(t) + \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}^0(t)\mathbf{m}_0(t) + \mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}^0(t)\left[\boldsymbol{\zeta}^0(t) + \varphi^0(t)\right]\end{gathered} \tag{6}$$

Используя операцию определения математического ожидания к уравнению (6), получим детерминированную ошибку системы

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}(t)\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = \left[\mathbf{W}_0(p)\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}(p)\right]\mathbf{m}_0(t) + \mathbf{W}_0(p)\left[\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}(0) + \overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}(0)\right]\boldsymbol{\delta}(t),$$

Фурье – образы которой имеют следующий вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left(\mathbf{W}_0\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}\right)\mathbf{m}_0 + \mathbf{W}_0\left[\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}(0) + \overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}(0)\right]; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{0*} = \mathbf{m}_{0*}\left(\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} - \boldsymbol{\Phi}_*\right) + \left[\overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}(0) + \overline{\mathbf{R}}_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}(0)\right]\mathbf{W}_{0*}.\end{gathered} \tag{7}$$

Фурье – образы случайной составляющей ошибки системы запишем как

$$\begin{gathered}\varepsilon^0 = \left(\mathrm{W}_0\mathrm{A}_0 - \Phi\right)\zeta^0 + \mathrm{W}_0\mathrm{A}_0\,\varphi^0 + \mathrm{W}_0\mathrm{A}^0\mathrm{m}_0(\tau) = \left(\mathrm{W}_0\mathrm{A}_0 - \Phi\right)\zeta^0 + \mathrm{W}_0\mathrm{A}_0\,\varphi^0 + \mathrm{W}_0\mathrm{M}_0(\tau)\overline{\mathrm{A}}^0; \\ \varepsilon_*^0 = \zeta_*^0\left(\mathrm{A}_{0*}\mathrm{W}_{0*} - \Phi_*\right) + \varphi_*^0\,\mathrm{A}_{0*}\mathrm{W}_{0*} + \overline{\mathrm{A}}_*^0\mathrm{M}'_0(\tau)\mathrm{W}_{0*}.\end{gathered} \tag{8}$$

Учитывая выражения (8), с помощью теоремы Винера – Хинчина определим матрицу спектральных плотностей ошибки системы

$$\begin{gathered}\mathbf{S}'_{\varepsilon\varepsilon} = \left(\mathbf{W}_0\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}\right)\mathbf{S}'_{\zeta\zeta}\left(\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} - \boldsymbol{\Phi}_*\right) + \left(\mathbf{W}_0\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}\right)\mathbf{S}'_{\varphi\zeta}\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} + \mathbf{W}_0\mathbf{A}_0\mathbf{S}'_{\zeta\varphi}\left(\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} - \boldsymbol{\Phi}_*\right) + \\ + \left(\mathbf{W}_0\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\Phi}\right)\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\alpha\zeta}}\mathbf{M}'_0(\tau)\mathbf{W}_{0*} + \mathbf{W}_0\mathbf{M}_0(\tau)\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\zeta\alpha}}\left(\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} - \boldsymbol{\Phi}_*\right) + \mathbf{W}_0\mathbf{A}_0\mathbf{S}'_{\varphi\varphi}\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} + \\ + \mathbf{W}_0\mathbf{A}_0\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\alpha\varphi}}\mathbf{M}'_0(\tau)\mathbf{W}_{0*} + \mathbf{W}_0\mathbf{M}_0(\tau)\mathbf{S}'_{\varphi\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{A}_{0*}\mathbf{W}_{0*} + \mathbf{W}_0\mathbf{M}'_0(\tau)\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\alpha\alpha}}\mathbf{M}'(\tau)\mathbf{W}_{0*}.\end{gathered} \tag{9}$$

Используя выражения (7), найдём показатель качества преобразования детерминированной информации – интегрально – квадратичную ошибку системы, которая имеет вид:

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{0*}\breve{\mathbf{R}}\right)ds,$$

где $\breve{\mathbf{R}}$ - известная весовая положительно определённая симметричная полиномиальная матрица.

Используя матрицу (9), найдём среднеквадратическое значение ошибки, как показатель качества преобразования системой случайной информации из формулы

$$e = \frac{1}{j}\int_{-j\omega}^{j\omega} \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}'_{\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}}\widehat{\mathbf{R}}\right)ds.$$

Таким образом, поставленная задача решена.

Выводы.

Поданы новые метод и алгоритмы позволяющие анализировать качество сложных динамических систем (объектов) при стохастических воздействиях в условиях близких к реальным.

Предложена новейшая процедура вычленения случайных коэффициентов в автономную группу из матричного оператора исследуемой динамической системы, что увеличивает точность оценки качества при стохастических воздействиях.

Литература:

1. *Блохин Л.Н., Буриченко М.Ю.* Статистична динаміка систем управління. – К. “НАУ”, 2003. – 208 стр.

2. *Блохин Л.Н.* Оптимальные системы стабилизации. – К.: “Техника”, 1982. – 143 стр.