УДК 539.3

Михайло А. Мартиненко, д.ф.-м.н., професор,
Ірина В. Лебедєва*, к.ф.-м.н., доцент

Розподіл температури в пружному тілі зі сферичним розрізом

Розглянуто задачу про збурення температурного поля сферичною тріщиною у тривимірному тілі. Задачу зведено до рівняння Лапласа з мішаними граничними умовами в сферичній системі координат. Шляхом задоволення граничних умов розв'язання задачі приведено до парної системи рядів-рівнянь за поліномами Лежандра, рівняння Абеля, інтегро-диференціального рівняння Вольтера відносно введеної допоміжної функції. Розроблено загальний підхід до врахування збурної дії сферичної тріщини на просторовий розподіл температури в матеріалі. Для лінійного незбуреного температурного поля знайдено аналітичний вираз для просторового розподілу температур за наявності сферичної тріщини у пружному тілі.

Ключові слова: сферична тріщина, збурене температурне поле, парна система.

M. A.Martynenko, Dr.Sci (Phys.-Math.), Professor,
I. V. Lebedyeva, Cand.Sci. (Phys.-Math.),
Associate Professor

Temperature Distribution in Elastic Body with a spherical cut

A problem on temperature field disturbance by a spherical crack in a tree-dimensional body is solved. The problem is reduced to the Laplac equation with mixed boundary conditions in spherical coordinate. Satisfying the boundary conditions gives the interdependent system of dual equation series with respect to the Legendre functions, next, the Abel equation, the Volterra integral-differential equation relative to unknown auxiliary function. The general approach to studying the spherical crack disturbance effect on spatial temperature field in elastic material is developed. The analytical expression for space temperature distribution under spherical crack in elastic body is obtained for the case of linear undisturbed temperature field.

Key Words: spherical crack, disturbed temperature field, dual equation series.

*E-mail: Lebedevai@ukr.net

Статтю представив член редколегії доктор ф.-м. н., професор В.В. Мелешко

1 Вступ

Виникнення та розвиток тріщин у матеріалах та конструкціях є однією з основних причин їх руйнування. У низці випадків це призводило до катастроф [10].

Існування температурних градієнтів у матеріалах підсилює розвиток утворення тріщин. Особливо чутливими до температурних полів є композитні матеріали, коефіцієнти термічного розширення компонент яких помітно відрізняються. Останнє означає, що врахування розподілу температур у матеріалах, в яких можливе утворення тріщин, є необхідним. З іншого боку, в свою чергу, виникнення тріщин, як буде показано у даній роботі, істотно впливає на просторовий розподіл температур у матеріалі.

У науковій літературі в основному аналізувалися внутрішні тріщини у вигляді розривів суцільності середовища вздовж деякої

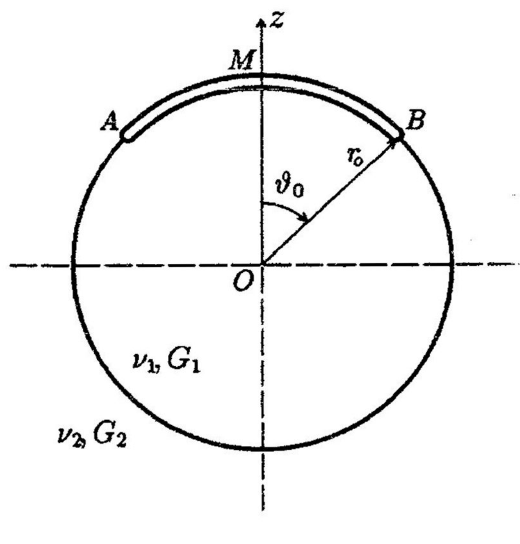

Рис.1. Сферична тріщина у необмеженому пружному тілі. Меридіональний переріз.

плоскої поверхні, зокрема, тріщини дископодібної та еліптичної форм [1]. Експериментальне вивчення частин зруйнованих деталей показало, що початкові поверхні розриву суцільності матеріалу мали сферичний та параболоїдальний вигляд, тобто не плоску, а об'ємну форму [5]. Більш реалістичною є модель тріщини по частині деякої поверхні обертання. Дана робота присвячена вивченню впливу тріщини, що моделюється математичним розрізом по частині сфери, на температурне поле у просторовому тілі.

2 Постановка задачі

Розглянемо необмежене ізотропне пружне тіло, послаблене термоізольованою тріщиною по частині поверхні сфери ($r = r_0$, $0 \le \vartheta \le \vartheta_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$). На рис.1. показано меридіональний переріз, де розріз збігається з дугою AMB. Розіб'ємо цей простір поверхнею сфери S на дві області: внутрішню область V_1 ($0 \le r \le r_0$) та зовнішню область V_2 ($r > r_0$). На поверхні S зовні розрізу мають виконуватись умови неперервності полів переміщень і напружень. Вважатимемо, що розподіл температури у тілі без тріщини описується заданою гармонічною функцією $t_0(r,\vartheta)$. Тоді загальний розподіл температури можна представити так [4]

$$T(r,\vartheta) = t(r,\vartheta) + t_0(r,\vartheta),$$

$$t(r,\vartheta) = \begin{cases} t_1(r,\vartheta), & 0 \le r \le r_0; \\ t_2(r,\vartheta), & r > r_0. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $t(r,\vartheta)$ – збурене температурне поле, яке виникає за наявності сферичної тріщини. Оскільки тріщина термоізольована, на її поверхні виконуються умови [3]

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_2}{\partial n}; \quad \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

$$(r = r_0,\ 0 \le \vartheta \le \vartheta_0).$$

Враховуючи (1), дістанемо

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = \frac{\partial t_2}{\partial r} = -\frac{\partial t_0}{\partial r}, \tag{3}$$

$$(r = r_0,\ 0 \le \vartheta \le \vartheta_0).$$

Таким чином, задача про визначення збуреного температурного поля приводиться до рівняння теплопровідності [4]

$$\Delta t = 0 \tag{4}$$

та умови (3). До цих умов слід додати умову неперервності теплового потоку на поверхні сфери зовні розрізу:

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = \frac{\partial t_2}{\partial r}, \quad t_1(r,\vartheta) = t_2(r,\vartheta), \tag{5}$$

$$(r = r_0,\ \vartheta_0 \le \vartheta \le \pi).$$

3 Метод розв'язання

Вираз для температурного поля є розв'язком рівняння Лапласа у сферичних координатах. У випадку стаціонарного теплообміну, без джерел тепла цей розв'язок представимо розкладами за поліномами Лежандра [6]

$$t_1(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n P_n(\cos\vartheta), (0 \le r \le r_0); \tag{6}$$

$$t_2(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{-n-1} P_n(\cos\vartheta), \ (r > r_0), \tag{7}$$

де нескінченну послідовність невизначених коефіцієнтів α_n, β_n можна знайти з умови (3), рівняння (4) і властивості ортогональності поліномів Лежандра. Дістанемо таку залежність між коефіцієнтами

$$\beta_n = -\frac{n}{n+1}\alpha_n r_0^{2n+1}. \tag{8}$$

Задовольняючи решту умов, прийдемо до системи парних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n r_0^n P_n(\cos\vartheta) = -r_0 \left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=r_0}, (0 \le \vartheta \le \vartheta_0);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}\alpha_n r_0^n P_n(\cos\vartheta) = 0, (\vartheta_0 \le \vartheta \le \pi). \tag{9}$$

Розв'язок системи (9) шукаємо у вигляді інтегрального оператора [7]

$$\alpha_n r_0^n \frac{2n+1}{n+1} = \int_0^{\vartheta_0} f(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t dt, \tag{10}$$

$$\beta_n = -\frac{n}{n+1}\alpha_n r_0^{2n+1},$$

де $f(t)$ – нова допоміжна функція, неперервна разом із своєю похідною при $0 \le t \le \vartheta_0$.

Скористаємось розривною сумою [2]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\mathrm{H}(t-\vartheta)}{\sqrt{2\cos\vartheta - 2\cos t}}, \tag{11}$$

де $\mathrm{H}(t-\vartheta)$ – функція Хевісайда, та інтегральним представленням Мелера-Діріхле [2]

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\vartheta}}dx. \tag{12}$$

Друге рівняння системи (9) підстановкою (10) задовольняється тотожно. Підставляючи (10) у перше рівняння системи (9), з урахуванням інтегрального представлення (12) після зміни порядку підсумовування та інтегрування, дістанемо інтегральне рівняння Абеля [7]

$$\int_0^{\vartheta}\frac{dx}{\sqrt{2\cos x-2\cos\vartheta}}\int_0^{\vartheta_0}f(t)K(t,x)dt=-r\frac{\partial t_0}{\partial r}\,, \qquad (13)$$

$$(\vartheta<\vartheta_0),$$

де

$$K(t,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=$$

$$=-\frac{1}{2}\delta_t'(t-x)-\frac{1}{8}\mathrm{H}(t-x). \qquad (14)$$

Застосуємо до інтегрального рівняння Абеля формулу обернення [7, 8]:

$$\int_0^{\vartheta}\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{2\cos x-2\cos\vartheta}}=f(x)\,;$$

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{f(s)\sin s ds}{\sqrt{2\cos s-2\cos x}}. \qquad (15)$$

З урахуванням властивостей узагальнених функцій дістанемо інтегро-диференціальне рівняння Вольтера відносно функції $f(t)$:

$$4f'(x)-\int_0^{\vartheta_0}f(t)dt=G(x)\,;\quad f(0)=0\,, \qquad (16)$$

де

$$G(x)=\frac{4}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{g(s)\sin s ds}{\sqrt{2\cos s-2\cos x}}. \qquad (17)$$

Диференціюючи рівняння (16), матимемо

$$f''(x)+\frac{1}{4}f(x)=G'(x) \qquad (18)$$

з двома умовами

$$f(0)=0\,,\qquad f'(\vartheta_0)=G(\vartheta_0). \qquad (19)$$

Перша умова випливає з припущення про обмеженість теплового потоку, друга – безпосередньо з рівняння (16). Розв'язок рівняння (18) легко будується в явному аналітичному вигляді, а коефіцієнти α_n, β_n визначаються з рівностей (10) і (19). Збурене температурне поле в областях V_1 і V_2 задається розкладами (6) і (7), а відповідний напружений стан знаходиться за відомими формулами [6].

4 Приклад

Нехай задано лінійне температурне поле

$$t_0(r,\vartheta)=\frac{q}{\lambda}r\cos\vartheta+T_0\,, \qquad (20)$$

де q – величина теплового потоку, λ – коефіцієнт теплопровідності тіла, T_0 – температура в площині $z=0$. Розв'язок рівняння (18) має вигляд

$$f(x)=-\frac{r_0}{\pi}\frac{q}{\lambda}\left(3\sin\frac{3}{2}x-\cos\frac{3}{2}\vartheta_0\sec\frac{\vartheta_0}{2}\sin\frac{x}{2}\right). \qquad (21)$$

Коефіцієнти α_n, β_n визначаємо за формулами (10) з урахуванням розв'язку (21):

$$\alpha_n=\frac{r_0^{1-n}}{\pi}\frac{q}{\lambda}\frac{n+1}{2n+1}\times$$
$$\times\left\{\cos\frac{3}{2}\vartheta_0\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n}-\frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1}\right]-\right.$$
$$\left.-3\left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1}-\frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2}\right]\right\}, \qquad (22)$$

$$\beta_n=-\frac{r_0^{n+2}}{\pi}\frac{q}{\lambda}\frac{n}{2n+1}\times$$
$$\times\left\{\cos\frac{3}{2}\vartheta_0\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n}-\frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1}\right]-\right.$$
$$\left.-3\left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1}-\frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2}\right]\right\}.$$

Після підстановки (22) у розклади (6), (7) дістанемо вираз для температурного поля:

$$t_1(r,\vartheta)=\frac{r_0}{\pi}\frac{q}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n}\times$$
$$\times\left\{\cos\frac{3}{2}\vartheta_0\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n}-\frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1}\right]-\right.$$
$$\left.-3\left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1}-\frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2}\right]\right\}P_n(\cos\vartheta),$$
$$(0\le r\le r_0);$$

$$t_2(r,\vartheta)=-\frac{r_0}{\pi}\frac{q}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n+1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n-1}\times$$
$$\times\left\{\cos\frac{3}{2}\vartheta_0\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[\frac{\sin n\vartheta_0}{n}-\frac{\sin(n+1)\vartheta_0}{n+1}\right]-\right.$$
$$\left.-3\left[\frac{\sin(n-1)\vartheta_0}{n-1}-\frac{\sin(n+2)\vartheta_0}{n+2}\right]\right\}P_n(\cos\vartheta),$$
$$(r>r_0).$$

Отже, задача теплопровідності для пружного тіла зі сферичним розрізом розв'язана.

5 Заключні зауваження

Таким чином, розглянуто вплив збурної дії сферичної тріщини на температурне поле в необмеженому ізотропному пружному середовищі. Розроблено загальний підхід до врахування таких збурень. Низка застосованих математичних операцій включає ров'язання рівняння Лапласа у сферичних координатах з мішаними граничними умовами, системи рядів-рівнянь за поліномами Лежандра, наступний пошук її ров'язків у вигляді спеціальних операторів. Вказана послідовність операцій дозволила записати рівняння Абеля, а далі – інтегро-диференціальне рівняння Вольтера відносно введеної допоміжної функції.

Аналітичний вираз для збуреного сферичною тріщиною температурного поля отримано для випадку початково незбуреного лінійного поля температури.

Список використаних джерел

1. *Андрейкив А.Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наукова думка, 1982. – 348 с.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. –М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 472 с.
3. *Кит Г.С., Хай М.В.* Определение трехмерных температурных полей и напряжений в бесконечном теле с разрезами // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1982. – №5. – С. 60-67.
4. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. –Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
5. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. –М: Мир, 1982. – 334 с.
6. *Лурье А.И.* пространственные задачи теории упругости. –М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
7. *Мартыненко М.А.* Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка // Мат. физика. – 1979. – **25**, – С. 106-109.
8. *Уфлянд Я.С., Меленевская Е.С.* Кручение упругого пространства, ослабленного сферическим разрезом // Прикл. механика. – 1971. – 7, №2. – С. 111-114..
9. *Улитко А.Ф.* Векторные разложения в постранственной теории упругости. –Киев: Академпериодика, 2002. – 341 с.
10. *Liebowitz H.* (Ed.) Fracture: an Advanced Treatise. Vol.2. Mathematical Fundamentals. – London: Academic Press, 1968. – 759 pp.

Надійшла до редколегії 14.12.09