УДК 517.537.72

О. М. Мулява, М. М. Шеремета

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ДО ЛОГАРИФМІЧНОГО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

O. M. Mulyava, M. M. Sheremeta. *On the belonging of an entire Dirichlet series to the logarithmic convergence class*, Mat. Stud. **33** (2010), 17–21.

For entire Dirichlet series, $F(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ let $M(\sigma)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\ \geq 0\}$. Conditions on λ_n for the equivalence of the relations $\int_0^{\infty}\sigma^{-p-1}\ln M(\sigma)d\sigma<+\infty$ and $\int_0^{\infty}\sigma^{-p-1}\ln\mu(\sigma)d\sigma<+\infty$ $(p>1)$ are established.

О. М. Мулява, М. М. Шеремета. *О принадлежности целого ряда Дирихле логарифмическому классу сходимости* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №1. – C.17–21.

Для целого ряда Дирихле $F(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ пусть $M(\sigma)=\sup\{|F(\sigma+it)|\colon t\in\mathbb{R}\}$ и $\mu(\sigma)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):\ n\geq 0\}$. Установлены условия на λ_n для равносильности соотношений $\int_0^{\infty}\sigma^{-p-1}\ln M(\sigma)d\sigma<+\infty$ и $\int_0^{\infty}\sigma^{-p-1}\ln\mu(\sigma)d\sigma<+\infty$ $(p>1)$.

1. Вступ. Нехай $\lambda=(\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $(\lambda_0=0)$, а ряд Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

абсолютно збіжний у всій комплексній площині. Для $\sigma\in\mathbb{R}$ нехай $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|\colon t\in\mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)\colon n\geq 0\}$ — максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma,F)=\max\{n\geq 0\colon |a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\mu(\sigma,F)\}$ — його центральний індекс, а $\varkappa_n=(\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|)/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$. За П. Камсеном [1] цілий ряд Діріхле (1) R-порядку $\varrho\in(0,+\infty)$ належить до класу збіжності, якщо $\int_0^{\infty}e^{-\varrho\sigma}\ln M(\sigma,F)d\sigma<+\infty$. За умови $\ln n=O(\lambda_n)$ $(n\to\infty)$ в [2] доведено, що для того щоб цілий ряд Діріхле (1) належав до класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n)$ неспадна, і досить, щоб $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})|a_n|^{\varrho/\lambda_n}<+\infty$. Оскільки за умови $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(\ln n/\lambda_n)=\tau<+\infty$ для кожного $\varepsilon>0$ виконується нерівність $M(\sigma,F)\leq A(\tau,\varepsilon)\mu(\sigma+\tau+\varepsilon,F)$ $(\sigma>0)$, то належність до класу збіжності є рівносильною до співвідношення $\int_0^{\infty}e^{-\varrho\sigma}\ln\mu(\sigma,F)d\sigma<+\infty$. В [3] доведено, що для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле з класу $S(\lambda)$ співвідношення $\int_0^{\infty}e^{-\varrho\sigma}\ln M(\sigma,F)d\sigma<+\infty$ і $\int_0^{\infty}e^{-\varrho\sigma}\ln\mu(\sigma,F)d\sigma<+\infty$ були еквівалентними, необхідно і досить, щоб для послідовності показників $\lambda=(\lambda_n)$ виконувалась умова $\ln n=O(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$.

У випадку, коли R-порядок $\varrho=0$, для характеристики зростання цілого ряду Діріхле використовують *логарифмічний R-порядок* $p=\overline{\lim}_{\sigma\to+\infty}\ln\ln M(\sigma,F)/\ln\sigma$, а *логарифмічний клас збіжності* означається ([2]) умовою $\int_1^{\infty}\sigma^{-p-1}\ln M(\sigma,F)d\sigma<+\infty$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 13A50, 13F20, 13N15.

Клас всіх цілих рядів Діріхле, що належать до логарифмічного класу збіжності позначимо через $S_p(\lambda)$.

Через $S_{p\mu}(\lambda)$ позначимо клас цілих рядів Діріхле, для яких виконується умова $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln \mu(\sigma, F) d\sigma < +\infty$. В [2] доведено, що якщо $p > 1$ і

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} \le 1, \tag{2}$$

то для того щоб $F \in S_p(\lambda)$, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(\varkappa_n)$ неспадна, і досить, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \left\{(1/\lambda_n) \ln (1/|a_n|)\right\}^{1-p} < +\infty.$$

Подібно до випадку скінченного R-порядку, за умови (2) $F \in S_p(\lambda) \iff F \in S_{p\mu}(\lambda)$ ([2]). Тому виникає *питання про істотність умови (2).* Цьому питанню присвячена наша стаття.

Зауважимо, що з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$, $S_p(\lambda) \subset S_{p\mu}(\lambda)$, і тому залишається дослідження умов на λ, за яких $S_{p\mu}(\lambda) \subset S_p(\lambda)$. З цією метою введемо ще такий клас рядів Діріхле. Через $S_f(\lambda, p)$ позначимо клас таких формальних рядів Діріхле, у кожного з яких існує максимальний член для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$ і виконується умова $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln \mu(\sigma, F) d\sigma < +\infty$. Зауважимо, що $S_{p\mu}(\lambda) \subset S_f(\lambda, p)$, а також, що $S_f(\lambda, p) \ne S_{p\mu}(\lambda)$. На останнє вказує ряд Діріхле $F_*(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_n^{p/(p-1)} + s\lambda_n\}$ з $\lambda_n = (\ln n)^{1/(1+\delta)}$, $\delta > 0$ і $p > 1 + 1/\delta$. Нескладно перевіряємо, що $F \in S_f(\lambda, p)$, але абсциса абсолютної збіжності $\sigma_a = -\infty$.

У класі $S_f(\lambda, p)$ правильна така теорема.

Теорема 1. *Умова (2) є необхідною і достатньою для того, щоб $S_f(\lambda, p) \subset S(\lambda)$ для кожного $p > 1$ і співвідношення $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty$ було правильним для кожного ряду Діріхле $F \in S_f(\lambda, p)$.*

Гнучкіший результат правильний у класі $S_{p\mu}(\lambda)$.

Теорема 2. *Для того, щоб виконувалось включення $S_{p\mu}(\lambda) \subset S_p(\lambda)$ необхідно і досить, щоб $\ln n = O\big(\lambda_n^{p/(p-1)}\big)$ $(n \to \infty)$.*

2. Допоміжні результати. У доведенні теорем 1 і 2 використовуватимемо такі леми.

Лема 1 ([4]). *Нехай $\alpha\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ та $\gamma\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — невід'ємні неперервні зростаючі до $+\infty$ функції і $\alpha(x + O(1)) \sim \alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Якщо*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (\alpha(n)/\gamma(\lambda_n)) > 1,$$

то існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \le \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_k^*)) + 1$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \alpha^{-1}(\gamma(\lambda_{k_j}^*))$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Лема 2. *З умови $F \in S_f(\lambda, p)$ випливає, що $\lambda_n^{-p/(p-1)} \ln (1/|a_n|) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.*

Справді, з умови $F \in S_f(\lambda, p)$ випливає, що $\ln \mu(\sigma, F) = o(\sigma^p)$ $(\sigma \to +\infty)$. Далі, за означенням $\mu(\sigma, F)$ елементарно отримуємо потрібне.

Лема 3. *Включення $S_f(\lambda, p) \subset S_{p\mu}$ є правильним тоді і тільки тоді, коли*

$$\int_1^\infty \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\sigma^p} d\sigma < +\infty. \tag{3}$$

Справді, використовуючи рівність $\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(1, F) + \int_1^\sigma \lambda_{\nu(t,F)} dt$, маємо
$$\int_1^\infty \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma^{p+1}} d\sigma = \frac{1}{p} \int_1^\infty \frac{\lambda_{\nu(t,F)}}{t^p} dt + \frac{1}{p} \ln \mu(1, F).$$

2. Доведення теореми 1. Припустимо, що ряд Діріхле належить до класу $S_f(\lambda, p)$. З умови (2) випливає, що $\ln n \le \lambda_n^\eta$ для кожного $\eta > 1$ і всіх $n \ge n_0$. Тому, за лемою 2 $\ln n = o(\ln \frac{1}{|a_n|})$ при $n \to \infty$, звідки нескладно отримуємо, що ряд належить до класу $S(\lambda)$ ([5]). В класі $S(\lambda)$ достатність умови (2) для рівносильності співвідношень $\int_1^\infty \sigma^{-p-1} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty$ і $\int_1^\infty \sigma^{-p-1} \ln \mu(\sigma, F) d\sigma < +\infty$ доведено в [2].

Отже, залишилось довести необхідність умови (2). Припустимо, що ця умова не виконується, тобто існує таке $\delta > 0$, що $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln n}{(1+\delta)\ln \lambda_n} > 1$. Тоді за лемою 1 з $\alpha(x) = \ln\ln x$ і $\gamma(x) = (1+\delta)\ln x$, $x \ge 1$, існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \le \exp\{(\lambda_k^*)^{1+\delta}\} + 1$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \exp\{(\lambda_{k_j}^*)^{1+\delta}\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Якщо $\lambda_n \ne \lambda_k^*$, приймемо $a_n = 0$, а з метою скорочення запису в отриманому ряді Діріхле замінимо λ_k^* на λ_n. Прийдемо до ряду Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n \le \lambda_n^{1+\delta} + 1$ для всіх $n \ge 1$ і $\ln n_j \ge \lambda_{n_j}^{1+\delta}$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $\ln\ln n_j / \ln j \to \infty$ при $j \to \infty$ і $n_{j+1} > 2n_j$ для всіх $j \ge 1$.

Виберемо інші коефіцієнти ряду (1). Нехай (q_k) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а $m_j = [n_{j+1}/2]$. Як і в [3], приймемо $n_0 = 0$, $a_{n_0} = 1$, $a_n = 0$ для всіх $n_j < n < m_j$, $a_{n_{j+1}} = \prod_{k=0}^j \exp\{-q_k(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\}$, $k \ge 1$, і $a_n = a_{n_j} \exp\{-q_j(\lambda_n - \lambda_{n_j})\}$, $m_j \le n < n_{j+1}$ $(j \in \mathbb{N})$, тобто отримуємо ряд Діріхле

$$F^*(s) = \sum_{j=0}^\infty \left(a_{n_j} \exp\{s\lambda_{n_j}\} + \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}-1} a_n \exp\{s\lambda_n\} \right). \tag{4}$$

За вибором послідовності (a_n) легко випливає, що
$$\frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{n_{j+1}}}{\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_{n_j} - \ln a_{m_j}}{\lambda_{m_j} - \lambda_{n_j}} = \frac{\ln a_n - \ln a_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = q_j, \quad m_j \le n < n_{j+1}.$$
Тому, якщо $q_j \le \sigma < q_{j+1}$ $(j \in \mathbb{N})$, то $\nu(\sigma, F) = n_{j+1}$ і $\mu(\sigma, F) = a_{n_{j+1}} \exp\{\sigma \lambda_{n_{j+1}}\}$. Звідси випливає, що

$$\int_{q_1}^\infty \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\sigma^p} d\sigma = \sum_{j=1}^\infty \int_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\sigma^p} d\sigma = \sum_{j=1}^\infty \lambda_{n_{j+1}} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \frac{d\sigma}{\sigma^p} \le \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_{n_{j+1}}}{q_j^{p-1}}. \tag{5}$$

З іншого боку, для всіх досить великих j

$$M(q_j, F) \ge \sum_{n=m_j}^{n_{j+1}} a_n \exp\{q_j \lambda_n\} = (n_{j+1} - m_j)\mu(q_j, F) \ge n_{j+1}. \tag{6}$$

Виберемо $q_j = \lambda_{n_{j+1}}^{(1+\delta)/p}$. Тоді за умови $p > 1 + 1/\delta$ з (5) отримуємо

$$\int_{q_1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\sigma^p} < \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}}^{1-(1+\delta)(p-1)/p} < +\infty,$$

бо $(1+\delta)(p-1)/p - 1 > 0$, а з нерівності $\ln n \le \lambda_n^{1+\delta} + 1$ $(n \ge 1)$ і умови $\frac{\ln\ln n_j}{\ln j} \to \infty$ $(j \to \infty)$ випливає збіжність ряду $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{n_{j+1}}^{-\alpha}$ для кожного $\alpha > 0$. Отже, для ряду (4) співвідношення (3), а за лемою 3 і співвідношення $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln \mu(\sigma, F) d\sigma < +\infty$, правильні. Тому ряд (4) належить до класу $S_f(\lambda, p)$.

Якщо він не є цілим, то доведення необхідності умови (2) завершено. Якщо ж ряд (4) є цілим, то з (6) отримуємо нерівність $\ln M(q_j, F^*) \ge \ln n_{j+1} \ge \lambda_{n_{j+1}}^{1+\delta} = q_j^p$ і, отже, співвідношення $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty$ не виконується, бо з нього випливає, що $\ln M(\sigma, F) = o(\sigma^p)$ при $\sigma \to +\infty$. Теорему 1 повністю доведено.

3. Доведення теореми 2. Якщо $\ln n \le K\lambda_n^{p/(p-1)}$, $n \ge 0$, то з належності ряду Діріхле до класу $S_{p\mu}(\lambda)$ за лемою 2 отримуємо нерівність $\ln(1/|a_n|) \ge \Psi(\varepsilon)\lambda_n^{p/(p-1)}$ для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ і всіх $n \ge n_0(\varepsilon)$, де $\Psi(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$, звідки з огляду на умову $\ln n = O\big(\lambda_n^{p/(p-1)}\big)$ $(n \to \infty)$ нескладно отримати, що $M(\sigma, F) \le K(\varepsilon)\mu(\sigma/(1-\varepsilon), F)$ для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$, де додатна стала $K(\varepsilon)$ залежить тільки від ε. Звідси випливає співвідношення $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty$, тобто достатність умови $\ln n = O(\lambda_n^{p/(p-1)})$ $(n \to \infty)$ доведено.

Доведемо її необхідність. Припустимо, що вона не виконується, тобто існує додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція l така, що $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n^{p/(p-1)} l(\lambda_n)} > 1$. Тоді за лемою 1 існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \le \exp\{(\lambda_k^*)^{p/(p-1)} \cdot l(\lambda_k^*)\} + 1$ для всіх $k \ge 1$ і $k_j \ge \exp\{(\lambda_{k_j}^*)^{p/(p-1)} l(\lambda_{k_j}^*)\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел. Приймаючи $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \ne \lambda_k^*$, як і вище, прийдемо до ряду Діріхле (1), де послідовність (λ_n) така, що $\ln n \le \lambda_n^{p/(p-1)} l(\lambda_n) + 1$ для всіх $n \ge 1$ і $\ln n_j \ge \lambda_{n_j}^{p/(p-1)} l(\lambda_{n_j})$ для деякої зростаючої послідовності (n_j) натуральних чисел. Послідовність (n_j) можемо вважати такою, що $\ln n_j \ge j^{2p/(p-1)^2}$, $n_{j+1} > 2n_j$ і $\lambda_{m_j} \ge 2\lambda_{n_j}$ для всіх $j \ge 1$, де $m_j = [n_{j+1}/2]$.

Подальший вибір коефіцієнтів здійснимо, як у доведенні теореми 1, тобто знову прийдемо до ряду Діріхле (4), для якого правильними є оцінки (5) і (6).

Виберемо тепер $q_j = \lambda_{n_{j+1}}^{p/(p-1)} l(\lambda_{n_{j+1}})$. Тоді з (6) отримуємо нерівність

$$\ln M(q_j, F^*) \ge \ln n_{j+1} \ge \lambda_{n_j}^{p/(p-1)} l(\lambda_{n_j}) = q_j^p$$

і, отже, співвідношення $\int_1^{\infty} \sigma^{-p-1} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty$ не виконується.

У той же час для такого вибору q_j з (5) отримуємо

$$(p-1)\int_{q_1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\sigma^p} d\sigma < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n_{j+1}}}{(\lambda_{n_{j+1}}^{p/(p-1)} l(\lambda_{n_{j+1}}))^{p-1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{n_{j+1}} l(\lambda_{n_{j+1}}))^{p-1}} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\{(\ln n_{j+1})^{(p-1)/p} l(\lambda_{n_{j+1}})^{1/p}\}^{p-1}} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n_{j+1})^{(p-1)^2/p}} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2},$$

тобто для ряду Діріхле (4) правильне співвідношення (3) і, отже за лемою 3, $F \in S_f(\lambda, p)$. Залишилось довести, що цей ряд цілий. За вибором послідовності (a_n) для $m_j \le n \le n_{j+1}$ отримуємо

$$a_n \le \exp\{-q_j(\lambda_n - \lambda_{n_j})\} \le \exp\{-q_j(\lambda_n - \lambda_{m_j}/2)\} \le \exp\{-q_j\lambda_n/2\}. \tag{7}$$

Тому при $n \to +\infty$

$$\frac{\ln n}{-\ln a_n} \leq \frac{2\ln n_{j+1}}{q_j\lambda_n} \leq \frac{4\ln m_j}{\lambda_{n_{j+1}}^{p/(p-1)} l(\lambda_{n_{j+1}})\lambda_{m_j}} \leq \frac{5\lambda_{m_j}^{p/(p-1)} l(\lambda_{m_j})}{\lambda_{n_{j+1}}^{p/(p-1)} l(\lambda_{n_{j+1}})\lambda_{m_j}} \leq \frac{5\lambda_{m_j}^{1/(p-1)}}{\lambda_{n_{j+1}}^{p/(p-1)}} \leq \frac{5}{\lambda_{n_{j+1}}} \to 0.$$

Оскільки у цьому випадку ([5]) абсциса абсолютної збіжності ряду обчислюється за формулою $\sigma_a = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}$, то з (7) випливає, що $F \in S_p(\lambda)$. Теорему 2 повністю доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kamthan P.K. *A theorem on step functions* (III)// Istambul Univ. Fen. Fac. Mecm., A. – 1963. – V. 28. – P.65–69.
2. Мулява О.М. *Про класи збіжності рядів Діріхле*// Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С.1485–1494.
3. Filevych P.V., Fedynyak S.I. *On belonding of entire Dirichlet series to convergence class*// Mat. Stud. – 2001. – V. 16, №1. – P.57–60.
4. Sumyk O.M., Sheremeta M.M. *On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in term of m-member asymptotics*// Mat. Stud. –2003. – V. 19, №1. – P.83–88.
5. Мулява О.М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле*// Мат. Студії. – 1998. – Т. 9, №2. – С.171–176.

Київський національний університет харчових технологій
Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 21.03.2007