РІЗНОВИДИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА СПОСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Олег МАЗУР — старший викладач кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій;
Оксана НІКОЛАЄВА — доцент кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій;

Відомо, що при розв'язуванні завдань, запропонованих на ЗНО, є декілька тем, що традиційно викликають найбільше складнощів. Однією з таких тем є тригонометричні рівняння. Якщо це рівняння, відмінне від найпростішого то частіше всього учні за нього і не беруться. В статті розглядаються види тригонометричних рівнянь і низка спеціальних методів їх розв'язування.

І. Найбільш вживаним є метод підстановки.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5\operatorname{tg}2x+7.$$

Розв'язання. Область визначення даного рівняння знаходиться з умов: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ і являє собою множину значень $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}$, $m \in Z$. Виразимо всі функції, що входять в рівняння, через одну $\operatorname{tg} x = t$:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1-t}{1+t};$$

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Написані перетворення припускають, що $\operatorname{tg} x \neq \pm 1$, $\cos x \neq 0$ (скрізь в області визначення рівняння $\operatorname{tg} x \neq \pm 1$; значення x, при яких $\cos x = 0$, не є коренями початкового рівняння). Початкове рівняння набуде вигляду $\frac{1+t}{1-t}=5\cdot\frac{2t}{1-t^2}+7$ або (при $t \neq \pm 1$) $4t^2 - 4t - 3 = 0$; звідки $t_1=\frac{3}{2}$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

Скориставшись підстановкою $\operatorname{tg} x = t$, одержимо два найпростіших, еквівалентних у сукупності початковому тригонометричних рівняння: $\operatorname{tg}x=\frac{3}{2}$ і $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{2}$, розв'язками яких є: $x_1=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$, $k \in Z$ і $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+n\pi$, $n \in Z$.

Відповідь: $x_1=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$, $k \in Z$ і $x_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+n\pi$, $n \in Z$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$\sin x + \cos x = 1$ (1).

Розв'язання. Виразимо косинус через синус: $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$. Зробимо заміну $\sin x = t$. Дістанемо ірраціональне рівняння

$t+\sqrt{1-t^2}=1$ (2).

Звільнившись від радикала, одержимо: $2t^2 - 2t = 0$, звідки $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Значення $t = \sin x = 0$ задовольняє рівнянню (1) при $\cos x = 1$. Отже, розв'язку $t_1 = 0$ відповідає додатне значення радикала. Розв'язки рівняння (1) , що відповідають кореню $t_1 = 0$, є $x = 2k\pi$, $k \in Z$, оскільки з загальної формули $x = n\pi$, $n \in Z$ потрібно виключити непарні значення n, які дають для косинуса значення, що дорівнюють –1.

Значення $t_2 = 1$ задовольняє рівнянню (2), звідки знаходимо $\sin x = 1$ і $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n \in Z$.

Відповідь: $x_1 = 2k\pi$, $k \in Z$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n \in Z$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2\cos^8x - 9\cos^7x + 20\cos^6x - 33\cos^5x + 46\cos^4x - 66\cos^3x + 80\cos^2x - 72\cos x + 32 = 0$. (1)

Розв'язання. Нехай $\cos x = t$. Тоді

$2t^8 - 9t^7 + 20t^6 - 33t^5 + 46t^4 - 66t^3 + 80t^2 - 72t + 32 = 0$. (2).

Маємо зворотне рівняння восьмого степеня. Поділивши обидві частини цього рівняння на t^4 ($t = 0$ не є його коренем) і згрупувавши члени, одержимо рівняння, еквівалентне рівнянню (2):

$$9\left(t^3+\frac{8}{t^3}\right)+20\left(t^2+\frac{4}{t^2}\right)-33\left(t+\frac{2}{t}\right)+46=0. \quad (3)$$

Покладемо $t+\frac{2}{t}=z$. Тоді $t^2+\frac{4}{t^2}=z^2-4$; $t^3+\frac{8}{t^3}=z^3-6z$; $t^4+\frac{16}{t^4}=z^4-8z^2+8$, а рівняння (3) набуде вигляду $2z^4 - 9z^3 + 4z^2 + 21z - 18 = 0$ (4). Використовуючи метод відшукання раціонального кореня, одержимо корені рівняння (4): $z_1=-\frac{3}{2}$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$.

Таким чином, рівняння (4) рівносильне сукупності, що складається з чотирьох рівнянь:

$$t+\frac{2}{t}=-\frac{3}{2},\ t+\frac{2}{t}=1,\ t+\frac{2}{t}=2,\ t+\frac{2}{t}=3.$$

Розв'язуючи цю сукупність, знайдемо корені рівняння (2): $t = 2$ або $t = 1$. Повертаючись до змінної x, маємо $\cos x = 2$, що непридатне для розв'язання рівняння (1), або $\cos x = 1$, звідки знайдемо $x = 2n\pi$, $n \in Z$.

Відповідь: $x = 2n\pi$, $n \in Z$.

II. Зведення до однієї функції.

Рівняння $R(\cos f(x), \sin f(x)) = 0$, яке містить $\cos f(x)$ або $\sin f(x)$ лише в парних степенях, розв'язується за допомогою підстановки $\sin f(x) = t$ (або $\cos f(x) = t$).

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$3\sin^3 x + 7\cos^2 x \sin x - 3 = 0$.

Розв'язання. Покладемо $\sin x = t$ $(-1 \le t \le 1)$ і замінимо $\cos^2 x$ на $1 - t^2$, тоді одержимо кубічне рівняння: $4t^3 - 7t + 3 = 0$.

Останнє рівняння має три дійсних корені: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = -\frac{3}{2}$, з яких умові $-1 \le t \le 1$ задовольняють два перших, звідки $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ і $x_2 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$, $m \in Z$.

Відповідь: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ і

$x_2 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi$, $m \in Z$.

У багатьох випадках зручніше переходити від квадратів тригонометричних функцій до функцій подвійного аргументу за формулами

$$\cos^2 f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2f(x)\right),$$

$$\sin^2 f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2f(x)\right),$$

знижуючи тим самим степінь рівняння що виходить.

Зауважимо, зокрема, що використання цих формул завжди дозволяє замість біквадратного рівняння відносно $\cos f(x)$ (або $\sin f(x)$) розв'язувати квадратне рівняння відносно $\cos 2f(x)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$4\cos^2(2 - 6x) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$.

Розв'язання. Застосувавши формулу

$$\cos^2 f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2f(x)\right),$$

запишемо рівняння у вигляді $4\cos^2(2 - 6x) + 8\cos(2 - 6x) - 5 = 0$ і розв'яжемо його як квадратне відносно $\cos(2 - 6x)$. Дістанемо $\cos(2-6x) = -\frac{5}{2} < -1$ що не має змісту, або $\cos(2-6x) = \frac{1}{2}$, звідки знайдемо $x = \frac{1}{3} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in Z$.

Відповідь: $x = \frac{1}{3} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in Z$.

III. Зведення до одного аргументу.

Інколи при розв'язанні деяких тригонометричних рівнянь доцільно звести всі функції до одного аргументу.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$4\sin^4 x + + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$.

Розв'язання. Скориставшись перетвореннями

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right),$$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ та

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right),$$

зведемо всі функції до одного аргументу $2x$;

$$4 \cdot \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) + 2\cos^2 2x - 1 =$$

$$= 1 + 12 \cdot \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)$$

або, після спрощень, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Розв'язуючи одержане найпростіше рівняння, еквівалентне вихідному, знаходимо $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

Відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$2\cos 2x + \sin 3x - 2 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формули $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ та $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^2 x$, перейдемо до одного аргументу x. Рівняння набуде вигляду $2(1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x - 4\sin^3 x - 2 = 0$ або $\sin x\,(4\sin^2 x + 4\sin x - 3) = 0$. Звідси маємо або $\sin x = 0$, тобто $x = k\pi$, $k \in Z$, або $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$, тобто $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$.

Відповідь. $x_1 = k\pi$, $k \in Z$; $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$.

Завдання для самостійного розв'язування

Рівень I

1. Розв'язати рівняння $2\cos x - \sin^2 x = 2$.

$x = \arccos(-3) + 2n\pi$, $n \in Z$;

$x = -\arccos 3 + 2n\pi$, $n \in Z$;

$x = n\pi$, $n \in Z$;

$x = 2n\pi$, $n \in Z$;

$x \in \varnothing$.

2. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}^3 x + 8\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$.

$x_1 = 2k\pi$, $k \in Z$, $x_2 = \mathrm{arctg}\left(-4 + \sqrt{15}\right) + m\pi$, $m \in Z$, $x_3 = \mathrm{arctg}\,(-4 - \sqrt{15}) + n\pi$, $n \in Z$;

$x_1 = k\pi$, $k \in Z$, $x_2 = \mathrm{arctg}\left(-4 + \sqrt{15}\right) + m\pi$, $m \in Z$, $x_3 = \mathrm{arctg}\,(-4 - \sqrt{15}) + n\pi$, $n \in Z$;

$x_1 = k\pi$, $k \in Z$, $x_2 = \mathrm{arctg}\left(4 + \sqrt{15}\right) + m\pi$, $m \in Z$, $x_3 = \mathrm{arctg}\,(-4 - \sqrt{15}) + n\pi$, $n \in Z$;

$x_1 = k\pi$, $k \in Z$, $x_2 = \mathrm{arctg}\left(4 + \sqrt{15}\right) + m\pi$, $m \in Z$, $x_3 = \mathrm{arctg}\,(4 - \sqrt{15}) + n\pi$, $n \in Z$;

$x \in \varnothing$.

3. Розв'язати рівняння
$(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2)(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 3) = 12$..

$x_1 = -\,\mathrm{arctg}\, 2 + m\pi,\ m \in Z,\ x_2 = \mathrm{arctg}\, 3 + n\pi,\ n \in Z$;

$x_1 = \mathrm{arctg}\, 2 + m\pi,\ m \in Z,\ x_2 = -\,\mathrm{arctg}\, 3 + n\pi,\ n \in Z$;

$x_1 = -\,\mathrm{arctg}\, 2 + m\pi,\ m \in Z,\ x_2 = -\,\mathrm{arctg}\, 3 + n\pi,\ n \in Z$;

$x_1 = \mathrm{arctg}\, 2 + m\pi,\ m \in Z,\ x_2 = \mathrm{arctg}\, 3 + n\pi,\ n \in Z$;
$x \in \varnothing$.

4. Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{\sin x+1}+\dfrac{2}{\sin x-2}=1$.

$x=(-1)^n \arcsin\left(2+\sqrt{6}\right)+n\pi,\ n \in Z$;

$x=(-1)^n \arcsin\left(2-\sqrt{6}\right)+n\pi,\ n \in Z$;

$x=(-1)^n \arcsin\left(-2-\sqrt{6}\right)+n\pi,\ n \in Z$;

$x=(-1)^n \arcsin\left(\sqrt{6}-2\right)+n\pi,\ n \in Z$;
$x \in \varnothing$.

5. Розв'язати рівняння
$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}+\frac{3}{\sin x\cdot\cos x}=4.$$

$x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{n\pi}{2},\ n \in Z$;

$x=(-1)^{n}\dfrac{\pi}{12}+n\pi,\ n \in Z$;

$x=(-1)^{n}\dfrac{\pi}{12}+2n\pi,\ n \in Z$;

$x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{2},\ n \in Z$;

$x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n\pi}{2},\ n \in Z$.

6. Розв'язати рівняння
$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + 1 = 0$.

$x_1=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi,\ n \in Z;\ x_2 = \pi + k\pi,\ k \in Z$;

$x_3=-\dfrac{\pi}{3}+2m\pi,\ m \in Z$;

$x_1=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n \in Z;\ x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$;

$x_3=\pm\dfrac{\pi}{3}+2m\pi,\ m \in Z$;

$x_1=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi,\ n \in Z;\ x_2=\dfrac{\pi}{8}+2k\pi,\ k \in Z$;

$x_3=\pm\dfrac{\pi}{9}+2m\pi,\ m \in Z$;

$x \in R$;

$x_1=\dfrac{\pi}{5}+n\pi,\ n \in Z;\ x_2=\dfrac{\pi}{7}+2k\pi,\ k \in Z$;

$x_3=\pm\dfrac{\pi}{10}+2m\pi,\ m \in Z$.

7. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, 2x = 1$.

$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+n\pi,\ n \in Z$;

$x=\pm\dfrac{\pi}{4}+n\pi,\ n \in Z$;

$x=\pm\dfrac{\pi}{6}+n\pi,\ n \in Z$;

$x=\pm\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n \in Z$;

$x \in \varnothing$.

Рівень II

1. Розв'язати рівняння
$2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$.
2. Розв'язати рівняння
$\mathrm{ctg}^4 x - 2\,\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg}^2 x - 2\,\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$.
3. Розв'язати рівняння
$(2\sin^2 x - 3\sin x + 1)(2\sin^2 x + 5\sin x + 1) = 9\sin^2 x$.
4. Розв'язати рівняння
$$\frac{4\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\, x+3}+\frac{5\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^2 x-5\,\mathrm{tg}\, x+3}=-\frac{3}{2}.$$
5. Розв'язати рівняння
$$\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\left(\frac{\sin x\cos x}{\sin x\cos x-1}\right)^2=8.$$
6. Розв'язати рівняння
$3\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.
7. Розв'язати рівняння $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 2x + \mathrm{tg}\, 3x = 0$.

Рівень III

1. Розв'язати рівняння
$$\sqrt{\frac{1}{16}+\cos^4 x-\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{9}{16}+\cos^4 x-\frac{3}{2}\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$
2. Розв'язати рівняння
$8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.
3. Розв'язати рівняння
$(12\,\mathrm{tg}\, x - 1)(6\,\mathrm{tg}\, x - 1) \times$
$\times (4\,\mathrm{tg}\, x - 1)(3\,\mathrm{tg}\, x - 1) = 5$.
4. Розв'язати рівняння
$$\frac{\mathrm{ctg}^2 x-13\mathrm{ctg}\, x+15}{\mathrm{ctg}^2 x-14\mathrm{ctg}\, x+15}-\frac{\mathrm{ctg}^2 x-15\mathrm{ctg}\, x+15}{\mathrm{ctg}^2 x-16\mathrm{ctg}\, x+15}+\frac{1}{12}=0.$$
5. Розв'язати рівняння
$\mathrm{tg}^4 x-2\sqrt{2}\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\, x+2-\sqrt{2}=0$.
6. Розв'язати рівняння
$\cos 5x + \cos 4x + \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x + 6\cos^2 x + 8\cos^3 x = 0$.
7. Розв'язати рівняння
$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Відповіді

Рівень I

1. Г. **2.** В. **3.** Б. **4.** Б. **5.** А. **6.** Б. **7.** В.

Рівень II

1. $x_{1,2}=\arccos\dfrac{-2+\sqrt{19}}{5}+2n\pi,\ n \in Z$.

2. $x_1 = \text{arcctg}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} + k\pi$, $k \in Z$;

$x_2 = \text{arcctg}\dfrac{3-\sqrt{15}}{2} + m\pi$, $m \in Z$.

3. $x_1 = (-1)^n \arcsin\dfrac{\sqrt{7}-1}{2} + n\pi$, $n \in Z$;

$x_2 = (-1)^m \arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + m\pi$, $m \in Z$.

4. $x_1 = -\,\text{arctg}\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} + m\pi$, $m \in Z$;

$x_2 = \text{arctg}\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} + n\pi$, $n \in Z$.

5. $x \in \varnothing$.

6. $x_1 = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in Z$; $x_2 = \pm\arccos\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

7. $x_1 = k\pi$, $k \in Z$; $x_2 = \pm\,\text{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + n\pi$, $n \in Z$; $x_3 = \pm\dfrac{\pi}{3} + m\pi$, $m \in Z$.

Рівень III

1. $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3} + n\pi; -\dfrac{\pi}{6} + n\pi\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6} + n\pi; \dfrac{\pi}{3} + n\pi\right]$, $n \in Z$.

2. $x_1 = 2k\pi$, $k \in Z$; $x_{2,3} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $m \in Z$;

$x_{4,5} = \arccos\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4} + 2n\pi$, $n \in Z$.

3. $x_1 = -\,\text{arctg}\dfrac{1}{12} + k\pi$, $k \in Z$; $x_2 = \text{arctg}\dfrac{1}{2} + m\pi$, $m \in Z$.

4. $x_{1,2} = \text{arcctg}\left(1 \pm \sqrt{85}\right) + m\pi$, $m \in Z$;

$x_{3,4} = \text{arcctg}\left(5 \pm \sqrt{10}\right) + n\pi$, $n \in Z$.

5. $x_{1,2} = \text{arctg}\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} + n\pi$, $n \in Z$;

$x_{3,4} = \text{arctg}\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2} + m\pi$, $m \in Z$.

6. $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$; $x_2 = \pi + 2m\pi$, $m \in Z$;

$x_3 = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in Z$.

7. $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$; $x_2 = \pi + 2m\pi$, $m \in Z$;

$x_3 = \dfrac{3}{10}\pi + \dfrac{2}{5}k\pi$, $k \in Z$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Листопад В. В., Мазур О. К. Готуємось до ЗНО. Математика // «Оріон» — 2017.