

REGRESSION EQUATIONS FOR DETERMINING DENSITY ρ OF INTERCRYSTALLINE SUCROSE SOLUTION AT SUGAR MASSECUIE BOILING

T. Pogorilyy

National University of Food Technologies

Key words:

Density
Intercrystalline sucrose solution
Regression equation

Article history:

Received 04.09.2016
Received in revised form 14.10.2016
Accepted 24.10.2016

Corresponding author:

T. Pogorilyy
E-mail:
pogorilyytm@ukr.net

ABSTRACT

The article describes the further stage of creating a mathematical model of mass crystallization of sucrose. When creating an algorithm for determining the distribution of heat and diffusion mass flows between the components of the cell system of “sucrose solution–sugar crystal–massecuite”, the regression equations of distributions were found for density ρ of intercrystalline sucrose solution throughout the sugar massecuite boiling time. In the equations, density ρ depends on the current temperature T of the solution and on dry solids DS content in it. Each of the developed regression equations is built on the basis of experimental data obtained by several authors using the method of Ordinary Least Squares.

РЕГРЕСІЙНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ρ МІЖКРИСТАЛЬНОГО РОЗЧИНУ САХАРОЗИ ПРИ УВАРЮВАННІ ЦУКРОВОГО УТФЕЛЮ

Т.М. Погорілий

Національний університет харчових технологій

У статті реалізовано один із наступних етапів створення математичної моделі процесу масової кристалізації сахарози. При створенні алгоритму проведення розрахунків із визначення розподілу теплових і дифузійних масових потоків між складовими системи комірок «розчин сахарози–кристал цукру–утфель» було знайдено регресійні рівняння для густини ρ міжкристального розчину сахарози при уварюванні цукрового утфелю. В отриманих рівняннях густина ρ залежить від поточної температури T розчину та вмісту сухих речовин CP у ньому. Кожне із знайдених регресійних рівнянь побудовано на основі обробки експериментальних даних, отриманих рядом авторів із застосуванням методу найменших квадратів.

Ключові слова: густина, міжкристальний розчин сахарози, регресійне рівняння.

Постановка проблеми. Усі регресійні рівняння, що наведені в даній статті, стосуються залежності густини ρ міжкристального розчину сахарози

при уварюванні цукрового утфелю. Дані для регресійних рівнянь були отримані рядом авторів і наведені в літературних джерелах [1, 2]. Отримані залежності для густини ρ є достатньо складними й такими, що залежать не лише від поточної температури, а й від технологічних показників міжкристального розчину сахарози: чистота $Ч$ і вміст сухих речовин $СР$, регресійні рівняння яких вже було знайдено [3]. Отримані рівняння також залежать і від відносного часу уварювання цукрового утфелю $\tau/\tau_{ц}$.

При створенні математичної моделі нестационарного процесу тепло- та масообміну в системі комірок «кристал–міжкристальний розчин сахарози–утфель» [4; 5] необхідно врахувати, що між складовими даної системи комірок спостерігаються значні перепади градієнта температур. Можна зробити висновок, що всі теплофізичні характеристики кожної складової системи (кристалу, міжкристального розчину сахарози й утфелю) матимуть явно виражений нестационарний характер, тому постала необхідність у визначенні аналітичних (регресійних) рівнянь для таких теплофізичних характеристик, як густина ρ , об'ємна теплоємність $c\cdot\rho$ і теплопровідність λ міжкристального розчину сахарози при уварюванні цукрового утфелю. На першому етапі визначено регресійні рівняння для густини ρ міжкристального розчину сахарози протягом всього часу уварювання цукрового утфелю.

Мета дослідження: знайти регресійні рівняння для густини ρ міжкристального розчину сахарози при масовому уварюванні цукрового утфелю.

Матеріали і методи. Для вирішення поставленої проблеми використані програмні продукти (CurveExpert), що базуються на методі найменших квадратів. Створення регресійних кривих здійснено на основі експериментальних даних ряду авторів, широко висвітлених у літературі [1; 2].

Пошук регресійних рівнянь для густини ρ міжкристального розчину сахарози проводився на всьому інтервалі уварювання цукрового утфелю $0 \leq \tau/\tau_{ц} \leq 1$. Критерієм адекватності знайдених регресійних рівнянь слугували коефіцієнт кореляції r , ($0 \leq r \leq 1$), який повинен якомога більше прагнути до одиниці, $r \rightarrow 1$, та середньо квадратичне відхилення s , яке повинно якомога більше прагнути до нуля $s \rightarrow 0$.

Результати і обговорення. Наведемо отримані регресійні рівняння для визначення густини ρ міжкристального розчину сахарози.

Було розглянуто два різних випадки залежності густини ρ від вмісту сухих речовин $СР$ міжкристального розчину сахарози:

I) більш «широкий» інтервал, де величина вмісту сухих речовин $СР$ змінювалась в межах $СР \in [60..90]$, %;

II) більш «вузький», де величина $СР$ змінювалась в межах $СР \in [75..82]$, %. Такий вибір обумовлений тим, що подальший розрахунок процесу тепло- та масообміну між складовими вищезгаданої системи комірок розглядається в різні моменти відносного часу уварювання $\tau/\tau_{ц}$. Відповідно до кожного відносного моменту часу $\tau/\tau_{ц}$ уварювання цукрового утфелю будуть визначатись відповідні значення вмісту сухих речовин $СР$ у міжкристальному розчині сахарози [3].

Величини температур в обох розглянутих вище випадках вибору вмісту сухих речовин CP при проведенні пошуку регресійних рівнянь приймалися однаковими в межах $T \in [30..120]$, °С.

Зрозуміло, що для більш «широкого» інтервалу зміни величина вмісту CP ($CP \in [60..90]$, %), який буде охоплювати більший період часу уварювання цукрового утфелю, рівняння регресії мають більш складний характер. Це, у свою чергу, впливає на збільшення часу проведення розрахунків з визначення розподілу температур і дифузійного масообміну між складовими комірок.

Для випадку більш «вужького» інтервалу зміни вмісту сухих речовин CP ($CP \in [75..82]$, %) у міжкристалльному розчині, який описує менший період відносного часу уварювання цукрового утфелю, рівняння регресії мають простіший характер. У свою чергу, це призводить до значного скорочення часу проведення розрахунків з визначення розподілу температур і дифузійного масообміну.

У першому випадку (I) для густини ρ міжкристалльного розчину сахарози, яка залежить від двох змінних — вмісту сухих речовин $CP \in [60..90]$, % і температури $T \in [30..120]$, °С проведено ряд досліджень. У результаті узагальнюючий вираз регресійного рівняння у вигляді поліному третього порядку:

$$\rho(T, CP) = a_{\rho_{3,i}}(CP) + b_{\rho_{3,i}}(CP) \cdot T + c_{\rho_{3,i}}(CP) \cdot T^2 + d_{\rho_{3,i}}(CP) \cdot T^3, \quad (1)$$

$$30 \leq T \leq 120,$$

яке найкращим чином описує зміни функції густини ρ і в той же час є найбільш простим з усіх знайдених регресійних кривих. Серед усіх отриманих регресійних рівнянь у вигляді полінома третього порядку як показник адекватності отриманих рівнянь вибрано мінімальний коефіцієнт кореляції, що складає $r = 0,9997657$, та відповідне йому значення середньо квадратичного відхилення $s = 1,6969955$.

Коефіцієнти $a_{\rho_{3,i}}(CP)$, $b_{\rho_{3,i}}(CP)$, $c_{\rho_{3,i}}(CP)$ та $d_{\rho_{3,i}}(CP)$, $i = 1, 2, \dots$ залежать від змінної величини вмісту сухих речовин CP , $60 \leq CP \leq 90$, %, міжкристалльного розчину сахарози. Регресійні рівняння для кожного з них наведено нижче.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $a_{\rho_{3,i}}(CP)$, $1 \leq i \leq 3$ отримали у такому вигляді:

а)

$$a_{\rho_{3,1}}(CP) = 1484,7674 - 14,622583 \cdot CP + 0,26096219 \cdot CP^2 -$$

$$-0,0010669085 \cdot CP^3, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (2)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9995952$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 1,6969955$;

б)

$$a_{\rho_{3,2}}(CP) = 1042,6814 + 3,329288 \cdot CP + 0,020201861 \cdot CP^2, \quad (3)$$

$$60 \leq CP \leq 90,$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9995304$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 1,7732881$;

в)

$$a_{p_{3,3}}(CP) = 931,08502 + 6,3515139 \cdot CP, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (4)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9991427$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 2,3281825$.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $b_{p_{3,i}}(CP)$, $1 \leq i \leq 3$ мають такий вигляд:

а)

$$b_{p_{3,1}}(CP) = -2,7149561 + 0,028418686 \cdot CP - 0,00013217424 \cdot CP^2, \quad (5)$$
$$60 \leq CP \leq 90,$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8231626$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0547710$;

б)

$$b_{p_{3,2}}(CP) = \frac{1}{0,78532991 - 0,3562598 \cdot \ln(CP)}, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (6)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8225162$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0533156$;

в)

$$b_{p_{3,3}}(CP) = -1,9848173 + 0,0086452398 \cdot CP, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (7)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8158796$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0542043$.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $c_{p_{3,i}}(CP)$, $1 \leq i \leq 4$ отримали у такому вигляді:

а)

$$c_{p_{3,1}}(CP) = 0,012506232 + 0,0020914053 \times \cos(0,10467846 \cdot CP - 0,21140906), \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (8)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8826898$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0008147$;

б)

$$c_{p_{3,2}}(CP) = -0,11780958 + 0,0055132258 \cdot CP - 7,4502033 \cdot 10^{-5} \cdot CP^2 + 3,2312326e \cdot 10^{-7} \cdot CP^3, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (9)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8819526$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0008171$;

в)

$$c_{p_{3,3}}(CP) = 0,016080335 + 7,6332978 \cdot 10^{-5} \cdot CP - 1,5855071 \cdot 10^{-6} \cdot CP^2, \quad (10)$$
$$60 \leq CP \leq 90,$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8739346$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0008174$;

г)

$$c_{p_{3,4}}(CP) = 0,024838776 - 0,00016086105 \cdot CP, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (11)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8706959$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0008039$.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $d_{p_{3,i}}(CP)$, $1 \leq i \leq 4$ мають такий вигляд:

а)

$$d_{p_{3,1}}(CP) = -0,011424209 + 0,00062799524 \cdot CP - 1,2942006 \cdot 10^{-5} \cdot CP^2 + 1,1765909 \cdot 10^{-7} \cdot CP^3 - 3,9771862 \cdot 10^{-10} \cdot CP^4, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (12)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8935453$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0000041$;

б)

$$d_{p_{3,2}}(CP) = 0,00068419142 - 3,0274853 \cdot 10^{-5} \cdot CP + 3,9219442e \cdot 10^{-7} \cdot CP^2 - 1,63064 \cdot 10^{-9} \cdot CP^3, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (13)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8653570$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0000045$;

в)

$$d_{p_{3,3}}(CP) = 8,5166037e \cdot 10^{-6} - 2,8375992 \cdot 10^{-6} \cdot CP + 2,4221525 \cdot 10^{-8} \cdot CP^2, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (14)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8574766$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0000044$;

г)

$$d_{p_{3,3}}(CP) = -0,00012528463 + 7,8597388 \cdot 10^{-7} \cdot CP, \quad 60 \leq CP \leq 90, \quad (15)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,8278478$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0000047$.

У другому випадку (II) для густини ρ міжкристального розчину сахарози, яка залежить від двох змінних — вмісту сухих речовин CP на інтервалі $CP \in [75..82]$, % і температури $T \in [30..120]$, °C, було отримано вираз узагальнюючого регресійного рівняння у вигляді поліному другого порядку:

$$\rho(T, CP) = a_{p_{2,i}}(CP) + b_{p_{2,i}}(CP) \cdot T + c_{p_{2,i}}(CP) \cdot T^2, \quad 30 \leq T \leq 120, \quad (16)$$

Яке найкращим чином описує зміни функції густини ρ , але в той же час є найбільш простим з усіх інших варіантів знайдених регресійних кривих. Серед всіх отриманих регресійних рівнянь у вигляді полінома другого порядку як показник адекватності отриманих рівнянь вибрано мінімальний коефіцієнт кореляції, що складає $r = 0,9978201$, та середньоквадратичне відхилення $s = 1,1150803$.

Коефіцієнти $a_{p_{2,i}}(CP)$, $b_{p_{2,i}}(CP)$ та $c_{p_{2,i}}(CP)$, $i = 1, 2, 3$, що в даному випадку залежать від змінної величини вмісту сухих речовин CP міжкристального розчину сахарози на інтервалі $75 \leq CP \leq 82$, %, також окремо наведено нижче.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $a_{p_{2,i}}(CP)$, $1 \leq i \leq 3$ отримали у такому вигляді:

а)

$$a_{p_{2,1}}(CP) = 15742,193 - 556,18225 \cdot CP + 7,0932985 \cdot CP^2 - 0,02973991 \cdot CP^3, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (17)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9998563$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,5558766$;

б)

$$a_{p_{2,2}}(CP) = 1406,3176 - 7,3839804 \cdot CP + 0,094047631 \cdot CP^2, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (18)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9997646$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,5808132$;

в)

$$a_{p_{2,3}}(CP) = 826,76736 + 7,3894678 \cdot CP, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (19)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9995114$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,7246398$.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $b_{p_{2,i}}(CP)$, $1 \leq i \leq 3$ отримали у такому вигляді:

а)

$$b_{p_{2,1}}(CP) = -612,73431 + 23,452484 \cdot CP - 0,29887631 \cdot CP^2 + 0,0012676249 \cdot CP^3, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (20)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9978690$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0072238$;

б)

$$b_{p_{2,2}}(CP) = -1,6862969 + 0,06067388 \cdot CP - 0,00054237176 \cdot CP^2, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (21)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9831272$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0165352$;

в)

$$b_{p_{2,3}}(CP) = 1,6559634 - 0,02452445 \cdot CP, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (22)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9823759$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0146325$.

Регресійні рівняння для коефіцієнтів $c_{p2,i}(CP)$, $1 \leq i \leq 3$ отримали у такому вигляді:

а)

$$c_{p2,1}(CP) = 3,8140104 - 0,14645982 \cdot CP + 0,0018706728 \cdot CP^2 - 7,9523425 \cdot 10^{-6} \cdot CP^3, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (23)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9981835$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0000395$;

б)

$$c_{p2,2}(CP) = -0,019350107 + 0,00028681753 \cdot CP - 9,0114862 \cdot 10^{-7} \cdot CP^2, \quad (24)$$
$$75 \leq CP \leq 82,$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9816628$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0001021$;

в)

$$c_{p2,3}(CP) = -0,013796954 + 0,00014526083 \cdot CP, \quad 75 \leq CP \leq 82, \quad (25)$$

з коефіцієнтом кореляції $r = 0,9816038$ та середньоквадратичним відхиленням $s = 0,0000886$.

Висновки

У статті наведено результати проведених досліджень з отримання регресійних рівнянь для густини ρ міжкристалного розчину сахарози протягом усього періоду уварювання цукрового утфелю $0 \leq \tau/\tau_{ц} \leq 1$. Отримані регресійні рівняння залежать від поточної температури T та вмісту сухих речовин CP в міжкристалльному розчині сахарози цукрового утфелю.

Наступним етапом у створенні математичної моделі процесу масової кристалізації сахарози необхідно знайти регресійні рівняння для таких теплофізичних характеристик, як об'ємна теплоємність $c \cdot \rho$ і теплопровідність λ міжкристалного розчину сахарози протягом усього періоду уварювання цукрового утфелю.

Література

1. *Понов В.Д.* Основы теории тепло- и массообмена при кристаллизации сахарозы. — Москва: Пищевая промышленность, 1973. — 316 с.
2. *Кулинченко В.Р., Мирончук В.Г.* Промышленная кристаллизация сахаристых веществ: Монография. — Киев: НУПТ, 2012. — 426 с.
3. *Погорилий Т.М.* Регресійні рівняння для визначення чистоти χ і сухих речовин CP міжкристалного розчину сахарози при уварюванні цукрового утфелю // Наукові праці Національного університету харчових технологій. — 2016. — Т. 22, № 5. — С. 142—157.
4. *Pogoriliy T.* The distribution of temperatures in the sucrose solution–sugar crystal–sucrose solution–massecuite cells depending on the boiling sugar massecuite time // Ukrainian Journal of Food Science. — 2015. — Volume 3, Issue 1. — P. 139—148.
5. *Pogoriliy T.* Temperatures distribution in the “larger sugar crystal–larger crystal sucrose solution–less crystal sugar sucrose solution–smaller sugar crystal–massecuite” cells system

depending on the boiling sugar massecuite time // Ukrainian Food Journal. — 2015. — Volume 4, Issue 4. — P. 648—661.

РЕГРЕССИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ρ МЕЖКРИСТАЛЬНОГО РАСТВОРА САХАРОЗЫ ПРИ УВАРИВАНИИ САХАРНОГО УТФЕЛЯ

Т.М. Погорелый

Национальный университет пищевых технологий

В статье реализован один из этапов создания математической модели процесса массовой кристаллизации сахарозы. При создании алгоритма проведения расчетов по определению распределения тепловых и диффузных массовых потоков между составляющими системы ячеек «раствор сахарозы–кристалл сахара–утфель» были найдены регрессионные уравнения для плотности ρ межкристального раствора сахарозы при уваривании сахарного утфеля. В полученных уравнениях плотность ρ зависит от текущей температуры T раствора и содержания сухих веществ $СВ$ в нем. Каждое из найденных регрессионных уравнений построено на основе обработки экспериментальных данных, полученных рядом авторов с применением метода наименьших квадратов.

Ключевые слова: *плотность, межкристальный раствор сахарозы, регрессионные уравнения.*