УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко, асп.(Ин-т математики АН Украины, Киев),
В. В. Листопад, асп. (Киев. пед. ин-т),
И. А. Шевчук, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МОНОТОННОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Установлена равномерная оценка для монотонной аппроксимации многочленами функций с ухудшающейся гладкостью на концах отрезка.

Встановлена рівномірна оцінка для монотонної апроксимації многочленами функцій з гладкістю, що погіршується на кінцях відрізка.

Профессор R. A. De Vore в беседе с И. А. Шевчуком высказал предположение, что, используя способ доказательства статьи [1], можно получить следующий результат.

Теорема. *Пусть* $r \in N$, $r > 2$; $I := [-1; 1]$. *Если возрастающая и непрерывная на* I *функция* $f = f(x)$ *имеет на* $(-1; 1)$ *локально абсолютно непрерывную* $(r-1)$*-ю производную и* $|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \le 1$ *почти при всех* $x \in I$, *то для каждого натурального* $n \ge r-1$ *найдется возрастающий на* I *алгебраический многочлен* $P_n = P_n(x)$ *степени* $\le n$ *такой, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le cn^{-r}, c = c(r) = \text{const}, x \in I. \quad (1)$$

Для случаев $r = 1, 2$ справедливость данной теоремы установлена в работе [2].

Отметим, что соответствующие оценки для аппроксимации без ограничений получены в работе [3] (см. также [4], гл. IX).

В настоящей статье доказывается сформулированная выше теорема.

1. Воспользуемся следующими обозначениями из [1]: $g = g(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция; $L(x, g, [a, b])$ — многочлен Лагранжа степени $\le r-2$, который интерполирует функцию g в точках $a + i(b-a)/(r-2)$, $i = \overline{0, r-2}$; $\Phi = \Phi(x)$ — дифференцируемая на I функция;

$$\mathcal{L}(x, \Phi) = \Phi(-1) + \int_1^x L(y, \Phi', [-1 + 2/r; 1 - 2/r])\, dy;$$

c_i — различные положительные числа, которые зависят от r;

$$\Delta_n(y) := n^{-2} + \sqrt{1-y^2}\,/n, y \in I, \Delta := \Delta_n(x), x \in I;$$

$$\beta := \arccos x, x \in I, \alpha := \arccos y, y \in I;$$

$$\mathcal{J}_n(t) := \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^{34(r-1)} \Bigg/ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2}\right)^{34(r-1)} du$$

— ядро типа Джексона,

$$\mathcal{D}_n(y, x) := \frac{1}{(34(r-1)-1)!} \frac{\partial^{34(r-1)}}{\partial x^{34(r-1)}} (x-y)^{34(r-1)-1} \int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \mathcal{J}_n(t)\, dt$$

— многочленное ядро типа Дзядыка;

$$x_0 := 1; x_j := \cos j\pi/n, I_j := [x_j, x_{j-1}],$$

$$\bar{x}_j := \cos(j\pi/n - \pi/2n), \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_j^0 := \cos(j\pi/n - \pi/4n), \quad j < n/2;$$

$$x_j^0 := \cos(j\pi/n - 3\pi/4n), \quad j \geq n/2;$$

$$h_j := x_{j-1} - x_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$t_j := (x - x_j^0)^{-2}\cos^2 2n \arccos x + (x - \overline{x}_j)^{-2}\sin^2 2n \arccos x,$$

$$T_j(x) := \frac{\int_{-1}^{x} t_j^{3(r-1)}(y)\,dy}{\int_{-1}^{1} t_j^{3(r-1)}(y)\,dy}, \quad \overline{T}_j(x) := \frac{\int_{-1}^{x}(x_{j-1}-y)(x_j-y)\,t_j^{3r-2}(y)\,dy}{\int_{-1}^{1}(x_{j-1}-y)(x_j-y)\,t_j^{3r-2}(y)\,dy}.$$

Всюду далее без специальных оговорок будут использованы неравенства

$$\Delta_n^2(y) < 4\Delta(|x-y|+\Delta), \quad 2(|x-y|+\Delta) > |x-y| + \Delta_n(y) > (|x-y|+\Delta)/2;$$

$$h_{j\pm1} < 3h_j, \quad \Delta < h_j < 5\Delta, \quad x \in I_j.$$

2. Докажем вспомогательные предложения. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^r$ класс непрерывных на I функций f, имеющих на $(-1, 1)$ локально абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную и таких, что

$$|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \leq 1 \tag{2}$$

почти для всех $x \in I$.

Лемма 1. *Если* $g \in \overset{\circ}{W}{}^r$, *то справедливы неравенства*

$$|g(y) - L(y, g)| \leq c_1, y \in I, \tag{3}$$

$$|g(y) - g(x) - \int_x^y L(t, g', [x, x+\Delta])\,dt| \leq c_2 n^{-r}(|x-y|+\Delta)^{2r}\Delta^{-2r}, x \in I, \tag{4}$$

$$x + \Delta \in I, \ y \in I.$$

Доказательство. Обозначая $y_i = -1 + 2(i+1)/r$; $i = \overline{0, r-2}$, и пользуясь известным интегральным представлением для разделенной разности, а также условием (2), получаем

$$|g(y) - L(y, g)| = \Big|\int_{-1}^{y}(t-y_0)\ldots(t-y_{r-2})\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-2}} g^{(r)}(y_0 +$$

$$+ (y_1 - y_0)t_1 + \ldots + (t - y_{r-2})t_{r-1})\,dt_{r-1}\ldots dt_1\,dt\Big| \leq \Big|\int_{-1}^{y}(t-$$

$$-y_0)\ldots(t-y_{r-2})\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-2}}[1-(y_0+(y_1-y_0)t_1+\ldots$$

$$\ldots + (t-y_{r-2})t_{r-1})^2]^{-r/2}\,dt_{r-1}\ldots dt_1\,dt\Big| \leq \Big|\int_{-1}^{y}(t-y_0)\ldots(t-$$

$$-y_{r-2})\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-2}}[2(1-(y_0+(y_1-y_0)t_1+\ldots+(t-$$

$$-y_{r-2})t_{r-1}))]^{-r/2}\,dt_{r-1}\ldots dt_1\,dt\Big| + \Big|\int_{-1}^{y}(t-y_0)\ldots(t-$$

$$-y_{r-2})\int_0^1\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{r-2}}[2(1+(y_0+(y_1-y_0)t_1+\ldots+(t-$$

$$-y_{r-2})t_{r-1}))]^{-r/2}\,dt_{r-1}\ldots dt_1\,dt\Big| =: G_1(y) + G_2(y).$$

Оценим $G_2(y)$ ($G_1(y)$ оценивается аналогично). Положим $g_r(t) = (1+t)^{r/2-1}$, если r — нечетное, $g_r(t) = (1+t)^{r/2-1}\ln(1+t)$, если r — четное. Поскольку [4, с. 160, 161; 5] $|g_r(t) - L(t, g_r, I)| \leq c_3$, то

$$G_2(y) = c_4\int_{-1}^{y}|g_r(t) - L(t, g_r, I)|\,dt \leq c_1,$$

т. е. неравенство (3) доказано.

Зафиксируем $x \in I$. Обозначив $\bar{y}_i := x + i\Delta / (r-2)$, $i = \overline{0,\ r-2}$, получим

$$| g(y) - g(x) - \int_x^y L(t, g', [x; x+\Delta])\, dt | \le \Big| \int_x^y (t - \bar{y}_0) \ldots (t - \bar{y}_{r-2}) \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{r-2}} [1 - $$

$$- (\bar{y}_0 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0) t_1 + \ldots + (t - \bar{y}_{r-2}) t_{r-1})^2]^{-r/2}\, dt_{r-1} \ldots dt \Big| =: \bar{G}(y).$$

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $-1 + n^{-2} \le x, x + \Delta \le 1 - n^{-2}, -1 + n^{-2} \le y \le 1 - n^{-2}$. Тогда очевидно

$$(1 - x^2)^{-1/2} < 2(n\Delta)^{-1}, (1 - y^2)^{-1/2} < 16 n^{-1} \Delta^{-2}(| x - y | + \Delta),$$

поэтому

$$\bar{G}(y) \le (| x - y | + \Delta)^r \max \{(1 - x^2)^{-r/2}, (1 - y^2)^{-r/2}\} / (r-1)! \le$$

$$\le (16^r / (r-1)!) (1 / n^r) ((| x - y | + \Delta) / \Delta)^{2r}.$$

2. Пусть $xy > 0$. Положив для определенности $x \in [-1; 0)$ (а значит, и $y \in [-1; 0)$), обозначим $x^* = \min \{x, y\}$, $y^* = \max \{x, y\}$. С учетом случая 1 рассмотрим только случай $x^* < -1 + n^{-2}$. Положим $\bar{g}_r(t) = (1 + t)^{r/2-1}$, если r — нечетное, иначе $\bar{g}_r(t) = (1 + t)^{r/2-1} \ln ((1 + t) / (1 + y^*))$. Замечая, что $| \bar{g}_r(t) | \le$ $\le (1 + y^*)^{r/2-1}$ при $t \in [-1; y^*]$, имеем

$$\bar{G}(y) \le c_5 \Big| \int_x^y [\bar{g}_r(t) - L(t, \bar{g}_r, [x, x + \Delta])]\, dt \Big| \le$$

$$\le c_5 \int_x^y (1 + y^*)^{r/2-1} (1 + c_6((| x - y | + \Delta) / \Delta)^{r-2})\, dt \le$$

$$\le c_7 (| x - y | + \Delta)^{r/2} (| x - y | + \Delta)^{r-2} \Delta^{2-r} \le c_7 \cdot 16^{r/2} n^{-r} (| x - y | + \Delta)^{2r} \Delta^{-2r}.$$

3. Для остальных случаев $c_8 \le n^{-r} \Delta^{-2r} (| x - y | + \Delta)^{2r}$, поэтому оценка (4) следует из вытекающего из (3) неравенства

$$\Big| g(y) - g(x) - \int_x^y L(t, g', [x; x+\Delta])\, dt \Big| = \Big| \int_x^y (g'(t) - L(t, g', [x; x+\Delta]))\, dt \Big| =$$

$$= \Big| \int_x^y [g'(t) - \mathcal{L}(t, g) - L(t, g' - \mathcal{L}', [x; x+\Delta])]\, dt \Big| \le c_9.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть заданы функция* $\Phi \in \overset{\circ}{W}{}^r$ *и множество* $F \subset I$. *Если при* $x \in F$ *имеем* $\Phi'(x) = 0$, *то многочлен*

$$D_n(x, \Phi) := \int_{-1}^1 [\Phi(y) - \mathcal{L}(y, \Phi)]\, \mathcal{D}_n(y, x)\, dy + \mathcal{L}(x, \Phi)$$

степени $< 17(r-1)(n-1)$ *приближает функцию* $\Phi = \Phi^{(0)}$ *и ее производную* $\Phi' = \Phi^{(1)}$ *так, что*

$$| \Phi^{(p)}(x) - D_n^{(p)}(x, \Phi) | \le c_{10} \Delta^{-p} (\Delta / (\mathrm{dist}\,(x, I \setminus F) + \Delta))^{13(r-1)} n^{-r},$$

$$(\le c_{11} \Delta^{-p} n^{-r}),\ x \in I, p = 0 \vee 1.$$

Доказательство. Обозначим $g(x) := \Phi(x) - \mathcal{L}(x, \Phi)$ и заметим, что $g \in \overset{\circ}{W}{}^r$, $\| g \| \le c_1$. Так как на F $L(y) = g(y)$, то, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3 из [6] (считая $\varphi(t) = t^{r/2-1}$), сводим доказательство к оценке интеграла

$$\mathcal{I}_2 = \int_{I \setminus F} [L(y) - g(y)] \frac{\partial^p}{\partial x^p} \mathcal{D}_n(y, x)\, dy$$

и, пользуясь (4) и неравенством (4) из [6], получаем

$$|\mathcal{J}_2| \le 2c_9 n^{-r}\Delta^{15r-19-p}\int_{\operatorname{dist}(x,I|F)}^{\infty}(t+\Delta)^{18-15r}\,dt <$$

$$< c_{10}n^{-r}\Delta^{-p}(\Delta/(\Delta+\operatorname{dist}(x,I\,|\,F)))^{13(r-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть множество E состоит из произвольных отрезков I_{j_i}. Многочлен*

$$Q_n(x,E) := n^{-r}\sum_i (T_{j_i}(x)-\overline{T}_{j_i}(x))$$

степени $< 2(2n-1)(3r-2)+3$ *удовлетворяет неравенствам:*

a) $|Q_n(x,E)| \le c_{12}n^{-r}, x\in I$;

b) $Q_n'(x,E) \ge -c_{13}\Delta^{-1}n^{-r}, x\in E$;

c) $Q_n'(x,E) \ge c_{14}n^{-r}\Delta^{-1}(\Delta/(\operatorname{dist}(x,E)+\Delta))^{13(r-1)}, x\in I\setminus E$.

Доказательство. С помощью неравенств (22) – (25) из [6] получаем

a) $$|Q_n(x,E)| \le n^{-r}\sum_i |T_{j_i}(x)-\overline{T}_{j_i}(x)| \le n^{-r}\sum_{j=1}^{n} c_{15}(h_j/(|x-x_j|+$$

$$+h_j))^{6(r-1)-1} < c_{12}n^{-r}\sum_{j=1}^{n} h_j(\Delta(|x-x_j|+\Delta))^{(6(r-1)-2)/2}\times$$

$$\times(|x-x_j|+\Delta)^{1-6(r-1)} \le c_{12}\Delta^{3(r-1)-1}n^{-r}\int_{-1}^{1}(|x-t|+$$

$$+\Delta)^{-3(r-1)}\,dt \le c_{12}n^{-r}, x\in I;$$

b) $$Q_n'(x,E) \ge n^{-r}\sum_i -\overline{T}_{j_i}'(x) \ge -c_{16}n^{-r}\overline{T}_{j^*}'(x) \ge -64^{3(r-1)+1}n^{-r}\times$$

$$\times\Delta_n^{-1}(x_{j^*})c_{16} \ge -c_{13}\Delta^{-1}n^{-r}, x\in E,$$

где индекс j^* выбран таким, чтобы $x\in I_{j^*}$;

c) $$Q_n'(x,E) \ge c_{17}n^{-r}h_j^{6(r-1)-1}(|x-x_j|+\Delta)^{-6(r-1)} \ge c_{18}n^{-r}(\Delta^2/(|x-$$

$$-x_j|+\Delta))^{6(r-1)-1}(|x-x_j|+\Delta)^{-6(r-1)} \ge c_{14}n^{-r}\Delta^{-1}(\Delta/(\operatorname{dist}(x,E)+$$

$$+\Delta))^{12(r-1)} \ge c_{14}n^{-r}\Delta^{-1}(\Delta/(\operatorname{dist}(x,E)+\Delta))^{13(r-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $0\le g'(x)\le n^{-r}\Delta^{-1}$, $x\in I$, *тогда многочлен*

$$R_n(x,g) := g(-1)+\sum_{j=1}^{n}(g(x_{j-1})-g(x_j))\,T_j(x)$$

степени $6(2n-1)(r-1)+1$ *не убывает на* I *и при этом*

$$|g(x)-R_n(x,g)| \le c_{19}n^{-r}, x\in I.$$

Лемма 4 доказывается так же, как и лемма 7 из [6].

Лемма 5. *Пусть заданы функция* $g\in \overset{\circ}{W}{}^r$ *и множество* $\mathcal{J}_j$, *состоящее из* $2r-3$ *соседних отрезков* I_j, *т. е.* $\mathcal{J}_j = I_j\cup I_{j+1}\cup\ldots\cup I_{j+2(r-2)}$. *Если при каждом* $i=j,\ldots,j+2(r-2)$ *найдется точка* $\tilde{x}_i\in I_i$, *в которой* $|g'(\tilde{x}_i)| \le \le n^{-r}\Delta_n^{-1}(\tilde{x}_i)$, *то и при всех* $x\in\mathcal{J}_j$ *имеем* $|g'(x)|\le c_{20}n^{-r}\Delta^{-1}$.

Доказательство. Обозначим через $l(x, g', \tilde{x}_{2p})$ многочлен Лагранжа степени $\leq r-2$, интерполирующий функцию g' в точках $\tilde{x}_{2p}, p = \overline{0, r-2}$. Теперь справедливость леммы 5 вытекает из представления

$$g'(x) = (g'(x) - L(x, g', \mathcal{J}_j)) - l(x, g', -L, \tilde{x}_{2p}) + l(x, g', \tilde{x}_{2p})$$

и леммы 1.

3. Пусть $f = f(x)$ не убывает на I и $f \in \overset{\circ}{W}{}^r$.

***Определение* 1.** *Отрезок I_j назовем отрезком первого типа, если $f'(x) \leq \leq c_{20}(c_{13}+c_{14})n^{-r}\Delta^{-1}$ при $x \in I_j$; отрезок I_j назовем отрезком второго типа, если он не является отрезком первого типа и $f'(x) \geq (c_{14}+c_{13})n^{-r}\Delta^{-1}$ при всех $x \in I_j$. Остальные отрезки I_j назовем отрезками третьего типа. Объединение всех отрезков первого типа обозначим E_1, второго типа — E_2, третьего типа — E_3.*

Лемма 6. *Соседних отрезков третьего типа не может быть больше чем $2(r-2)$. Т. е. каждое из множеств $\mathcal{J}_j = j = 0, \ldots, n-2(r-2)$, содержит по крайней мере один отрезок I_j не третьего типа.*

Лемма 6 следует из леммы 5.

$E_1 \bigcup E_3$ представим в виде объединения (конечного) непересекающихся отрезков

$$G_1 = [x_{j_1}; x_{j_0}] \bigcup [x_{j_3}; x_{j_2}] \bigcup \ldots \; 0 \leq j_\nu \leq j_{\nu+1} \leq n.$$

В G_1 включены все те отрезки, длина которых не меньше $2r-3$ отрезков I_j. Если $|x_{j_\nu}| = 1$, то положим $S_\nu(x) := 1$, если же $|x_{j_\nu}| \neq 1$, то обозначим

$$S_\nu(x) := \int_x^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{\bar{j}_\nu})^r (x_{j_\nu} - y)^r \, dy \Big/ \int_{\bar{x}_{\bar{j}_\nu}}^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{\bar{j}_\nu})^r (x_{j_\nu} - y)^r \, dy,$$

где $\bar{j}_\nu := j_\nu + (1 + (-1)^\nu)/2$.

***Определение* 2.** *Положим $g_1(x) := 0$ при $x \notin G_1$; $g_1(x) := f'(x) S_\nu(x)$ при $x \in [\bar{x}_{\bar{j}_\nu}; x_{j_\nu}]$; $g_1(x) = f'(x)$ — в остальных случаях; $g_2(x) := f'(x) - g_1(x)$.*

Обозначим $f_1(x) := f(-1) + \int_{-1}^x g_1(y)\,dy$, $f_2(x) = \int_{-1}^x g_2(y)\,dy$.

Лемма 7. *Функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ неотрицательны и при этом справедливы неравенства*

$$|g_1(x)| \leq c_{21} n^{-r} \Delta^{-1}, x \in I, \tag{5}$$

$$|g_2^{(r-1)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \leq c_{22}, x \in I. \tag{6}$$

Доказательство. Неотрицательность функций g_1 и g_2 очевидна. Неравенство (5) с учетом того, что $|S_\nu(x)| \leq 1$, следует из неравенства

$$|f'(x)| \leq cn^{-r}\Delta^{-1}, x \in G_1, \tag{7}$$

которое доказывается аналогично лемме 5.

Теперь докажем неравенство

$$|g_1^{(r-1)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \leq c_{23}. \tag{8}$$

Зафиксируем точку $x \in I$. Если $g_1(x) = 0$ или $g_1(x) = f'(x)$, то (8) очевидно, так что достаточно доказать (8) лишь для $x \in [\bar{x}_{\bar{j}_\nu}; x_{j_\nu}] := I_\nu^*$. Учитывая (7) и (2), замечаем, что $|f^{(j+1)}(x)| \le c_{24} n^{-r} \Delta^{-(j+1)}, j = \overline{0, r-1}$, поэтому

$$|g_1^{(r-1)}(x)| = \left| \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} f^{(j+1)} S_\nu^{(r-1-j)}(x) \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} c_{24} n^{-r} \Delta^{-(j+1)} \Delta^{j+1-r} \right| \le c_{25} (n\Delta)^{-r}.$$

Наконец, (6) следует из (8) и определения 2. Лемма доказана.

Обозначим $G_2 := \{x: \operatorname{dist}(x, E_2)\} \le 20 r^2 \Delta\}$. Из леммы 6 и определения 2 следует $g_2(x) = 0$, $x \in I \setminus G_2$. Отсюда, из лемм 2, 7 и определений 1, 2, а также из неравенства

$$\Delta_{n_1}(x) (\operatorname{dist}(x, G_2) + \Delta_{n_1}(x))^{-1} \le c_{26} \Delta (\operatorname{dist}(x, E_2) + \Delta)^{-1}$$

при $n_1 \ge n$ вытекает следующая лемма.

Лемма 8. *При каждом натуральном* $n_1 \ge n$ *многочлен* $D_{n_1}(x, f_2)$ *степени* $< 17(r-1)(n_1 - 1)$ *характеризуется свойствами*

$$|f_2(x) - D_{n_1}(x, f_2)| \le c_{27} n^{-r}, x \in I,$$

$$D'_{n_1}(x, f_2) \ge -c_{28} n_1^{-r} \Delta_{n_1}^{-1}(x) (\Delta / (\operatorname{dist}(x, E_2) + \Delta))^{13(r-1)}, x \in I \setminus E_2,$$

$$D'_{n_1}(x, f_2) \ge (c_{13} + c_{14}) n^{-r} \Delta^{-1} - c_{28} \Delta_{n_1}^{-1}(x) n^{-r}, x \in E_2,$$

где $c_{27} = c_{10} c_{22}$, $c_{28} = c_{10} \cdot c_{22} \cdot c_{26}^{13(r-1)}$.

4. ***Доказательство теоремы.*** Пусть $n_1 \in N$, $n_1 \ge n$. Обозначим через

$$P_{n_1}(x) := D_{n_1}(x, f_2) + Q_n(x, E_2) + R_n(x, f_1)$$

многочлен степени $17(r-1)n$. Из лемм 8, 3, 7 и 4 следует

$$|f(x) - P_{n_1}(x)| \le (c_{27} + c_{12} + c_{19} c_{21}) n^{-r} \le c_{29} n^{-r}, x \in I,$$

$$P'_{n_1}(x) > (c_{14} n^{-r} \Delta^{-1} - c_{28} n_1^{-r} \Delta_{n_1}^{-1}(x))(\Delta / (\operatorname{dist}(x, E_2) + \Delta))^{13(r-1)}, x \in I,$$

Осталось выбрать n_1 таким образом, чтобы выполнялось неравенство $c_{14} n^{-r} \times \Delta^{-1} \ge c_{28} n_1^{-r} \Delta_{n_1}^{-1}(x)$ (т. е. $n_1 = [(c_{28} / c_{14})^{1/(r-2)} + 1] n + 1$).

Таким образом, для $n > c_{30}$ теорема доказана.

Для $r - 1 \le n \le c_{30}$ искомый в теореме многочлен можно взять в виде $P_n(x) := L(x, f) + x c_1$.

1. *Шевчук И. А.* О коприближении монотонных функций // Докл АН СССР.– 1989.– **308**, №3.– С. 537 – 541.
2. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**, №3.– P. 471 – 474.
3. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness // Springer Ser. Computational Math.– 1987.– 9.– P. 300.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences // J. Math. Pures Appl.–1957.– **36**.– P. 67 – 95.
6. *Шевчук И. А.* Приближение монотонных функций монотонными многочленами. // Мат. сб. 1992. – **183**, № 5.– С. 63 – 78.

Получено 11.01.91