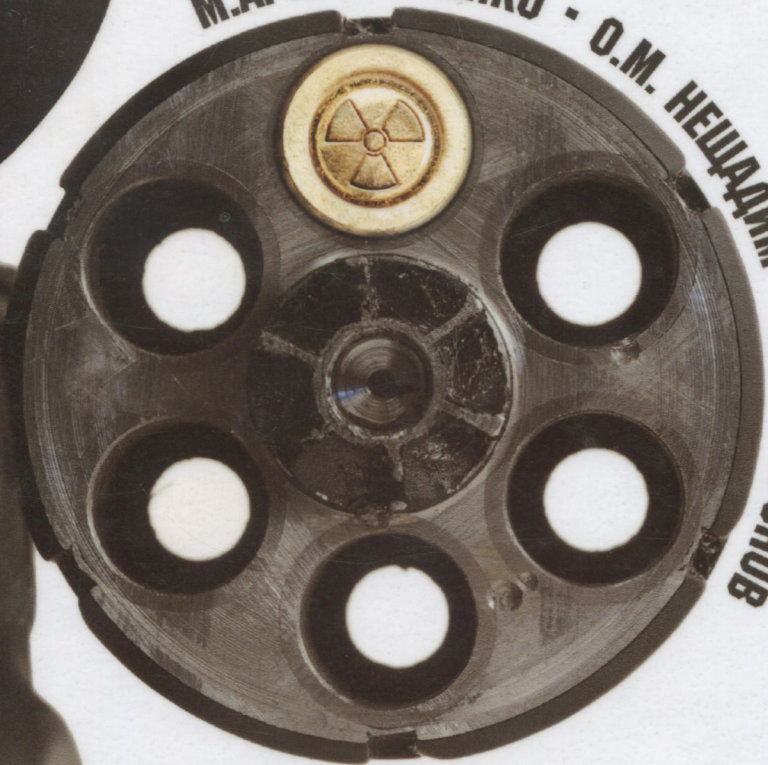


М.А. МАРТИНЕНКО - О.М. НЕЩАДИМ - В.М. САФОНОВ



ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЧАСТИНА 1

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

УДК 519.21
ББК 22.17
М 33

*Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(Лист від 18.01.12 № 1/11-554)*

Рецензенти:

В.В. Михайленко, д-р фіз.-мат наук, проф., кафедри вищої математики Національного авіаційного університету.

М.М. Семко, д-р фіз.-мат наук, проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету державної податкової служби України.

В.П. Легеца, проф. кафедри вищої математики Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Мартиненко М.А., Нещадим О.М., Сафонов В.М.

М 33 Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник. Ч.І — К.:ЦП «КОМПРИНТ», 2012.—288с.

ISBN 978-966-2719-20-8

Згідно з програмою дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» в першій частині пропонованого підручника розглядається теоретичний матеріал, який подається у форму лекцій і супроводжується прикладами типових задач. Наприкінці кожної лекції наведено перелік основних запитань і достатня кількість завдань для самоконтролю та індивідуальної роботи студентів. Розраховано на студентів інженерно-економічних спеціальностей вищих навчальних закладів усіх форм навчання.

УДК 519.21
ББК 22.17

ISBN 978-966-2719-20-8

©Мартиненко М.А., Нещадим О.М., Сафонов В.М., 2012

Вступ

Економічні і соціально-економічні процеси перебувають під дією різноманітних факторів, яким притаманний елемент випадковості. У значній кількості випадків закономірності можуть бути виявлені при цілеспрямованому статистичному дослідженні масових явищ або процесів. Оскільки на досліджуване явище впливає багато факторів, то кожен окремий прояв цього явища буде відмінним від іншого.

При достатньо великій кількості спостережень випадкові дії значною мірою нейтралізуються, і одержаний результат стає практично невинувадковим, передбачуваним. Цей принцип лежить в основі практичного використання ймовірнісних і математико-статистичних методів дослідження.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення ймовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Виникнення теорії ймовірностей відноситься до XVII століття і пов'язується з комбінаторними задачами азартних ігор. Наприкінці XIX століття з'явилися серйозні запити з боку природознавства, які й привели до її інтенсивного розвитку. Ймовірнісні методи знайшли широке застосування в різних галузях науки і техніки.

Математична статистика опирається на теорію ймовірностей. Основним змістом математичної статистики є вивчення методів збору, систематизації й обробки результатів спостережень з метою виявлення статистичних закономірностей масових явищ і процесів. Застосування математико-статистичних методів в економіці дозволяє будувати математичні моделі і оцінювати їхні параметри, перевіряти твердження про властивості економічних показників і форм їх взаємозв'язку. Одержані результати є основою для

економічного аналізу і прогнозування, дають можливість приймати обґрунтовані економічні рішення у бізнесі в умовах невизначеності.

Матеріал пропонованого підручника охоплює основні теми: випадкові події, випадкові величини, вибірки та їх числові характеристики, статистичне оцінювання параметрів генеральної сукупності, перевірка достовірності статистичних гіпотез, основи кореляційного і регресійного аналізу. Доступність матеріалу та необхідний рівень математичної строгості сприяє успішному засвоєнню та опануванню методів теорії ймовірностей і математичної статистики.

Частина I. Теорія ймовірностей

Створення теорії ймовірностей у XVII-XVIII ст., спричинене комбінаторними задачами і обумовлене спробою їх теоретичного обґрунтування, пов'язане з іменами Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса, А. Муавра, Я. Бернуллі. Ймовірнісні проблеми теорії похибок вимірювань і стрільби, статистики народонаселення вивчалися вченими П. Лапласом, К. Гауссом, С. Пуассоном в XVIII-XIX століттях. Але значні досягнення в теорії ймовірностей та статистиці були отримані лише у XIX-XX ст. завдяки працям П.Л. Чебишева, О.М. Ляпунова, О.О. Маркова, В.Я. Буняковського, зокрема, у вигляді граничних теорем.

Сучасний розвиток теорії ймовірностей і математичної статистики зобов'язаний Р. Мізесу, А.М. Колмогорову, С.М. Бернштейну, Б.В. Гніденку, О.Я. Хінчину, А.В. Скороходу, В.С. Королюку, Р. Фішеру, Е. Пірсону, Є. Нейману та багатьом іншим математикам.

Лекція 1. Означення ймовірності

Предмет теорії ймовірностей і математичної статистики.

Класифікація подій та операції над ними.

Класичне, статистичне і геометричне означення ймовірності.

σ -алгебра подій. Аксиоматичне означення ймовірності.

Елементи комбінаторики.

1.1. Предмет теорії ймовірностей і математичної статистики

В повсякденному житті часто доводиться зустрічати явища або процеси, перебіг яких неможливо передбачити. Наприклад, спостерігаючи за баскетболістом, який кидає м'яч до кошика, неможливо передбачити, влучить

він чи ні. Неможливо наперед сказати, скільки разів випаде „герб” при десяти підкиданнях монети. Подібні явища, перебіг яких передбачити неможливо, називають *випадковими* або *стохастичними*. Однак, якщо провести велику серію спостережень за випадковим явищем при незмінних умовах, можна помітити деяку закономірність. Вивченням таких закономірностей займається теорія ймовірностей.

Теорія ймовірностей — математична наука, яка вивчає властивості масових випадкових явищ, здатних багаторазово повторюватись при відтворенні певного комплексу умов.

Опирається на теорію ймовірностей *математична статистика* — розділ математики, що вивчає методи збирання, систематизації і обробки результатів спостережень з метою виявлення статистичних закономірностей.

При достатньо великій кількості спостережень випадкові дії значною мірою нейтралізуються, і одержаний результат стає практично не випадковим, передбачуваним. Цей принцип лежить в основі практичного використання ймовірносних і математико-статистичних методів дослідження.

1.2. Класифікація подій та операції над ними

Початковими поняттями теорії ймовірностей є поняття *стохастичного експерименту* (випробування) і його *наслідку*, *випадкової події* та її *ймовірності*.

Під *експериментом* (випробуванням, дослідом) розуміють виконання певного комплексу умов, за яких спостерігається якесь явище або фіксується деякий результат.

Стохастичним називається експеримент, результат якого неможливо точно передбачити. *Наслідок* — можливий результат випробування; позначається через ω . *Подія* — один або кілька наслідків експерименту. Всі події поділяються на *достовірні*, *неможливі*, *випадкові*.

Подія називається *достовірною*, якщо в результаті експерименту вона обов'язково відбудеться і називається *неможливою*, якщо не може відбутися.

Випадковою називається подія, яка в результаті експерименту може як відбутися так і не відбутися.

Випадкові події позначаються великими латинськими літерами $A, B, C, \dots$, достовірну — символом Ω , неможливу — $\emptyset$.

Наприклад, кинуту гральний кубик, грані якого мають від 1 до 6 очок. Можливі наслідки (надалі елементарні події): $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$, де ω_j — випало j очок. Події: A — «випало 8 очок» — неможлива; B — «випало 5 очок» — випадкова; C — «випало менше 7 очок» — достовірна; D — «випало парне число очок» — випадкова.

В основі розповсюдженого теоретико-множинного підходу в теорії ймовірностей лежить припущення про відповідність кожному експерименту деякої множини, елементи (або точки) якої несуть найбільш повну інформацію про його всі можливі результати.

Довільна множина Ω , елементами якої є всі можливі наслідки експерименту, називається *простором елементарних подій*, а її елементи — *елементарними подіями*. В наведеному прикладі $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$.

Отже, випадкова подія є підмножиною у просторі елементарних подій, а сам простір, що розглядається як подія і за означенням завжди відбувається в результаті експерименту, — достовірна подія Ω .

Якщо деяка підмножина множини Ω не містить жодної точки Ω , то вона вважається порожньою і отожднюється з неможливою подією $\emptyset$, яка в експерименті не відбувається.

Слід зауважити, що у загальному випадку нескінченного простору елементарних подій не всі його підмножини повинні бути випадковими подіями: підмножин може бути більше, ніж можна сформулювати висловлювань про результат експерименту (наслідків), враховуючи зліченну кількість останніх.

Подія A є наслідком події B , тобто при настанні події B настає також подія A , якщо для них як підмножин з простору Ω виконується $B \subset A$ (або $A \supset B$) (рис.1.1).

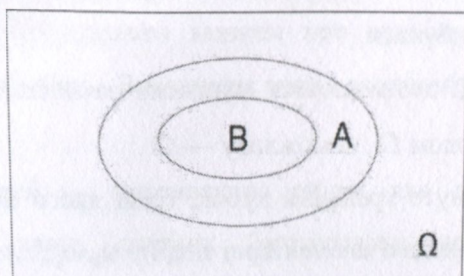


Рис.1.1

Сумою подій A та B називається подія $A+B$, яка відбувається тоді, коли настає або подія A , або подія B , або обидві разом (складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій A або B) (рис 1.2).

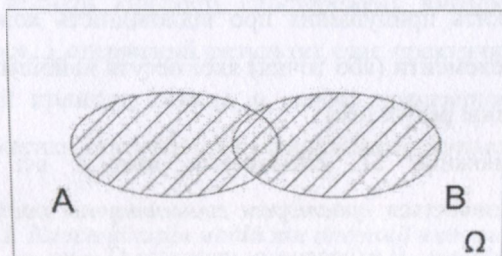


Рис.1.2

Добутком подій A та B називається подія $A \cdot B$, яка настає тільки тоді, коли відбуваються обидві події A та B (складається з елементарних подій, що входять в обидві події A і B) (рис. 1.3).

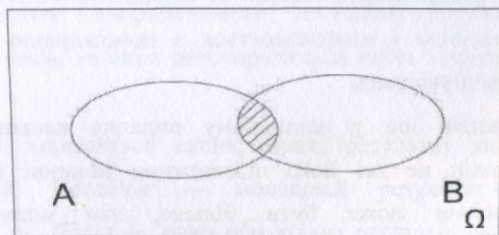


Рис.1.3

Поняття суми і добутку подій поширюються на випадок будь-якої

скінченної, а також зліченної кількості подій. Зокрема, подія $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \dots$ відбувається тоді і лише тоді, коли відбувається принаймні одна з подій $A_i, i=1,2,\dots$, а подія $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \dots$ відбувається тоді і лише тоді, коли відбуваються всі події $A_i, i=1,2,\dots$.

Різницею двох подій A та B ($A-B$ або $A \setminus B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться подія A , але не відбудеться подія B (рис.1.4).

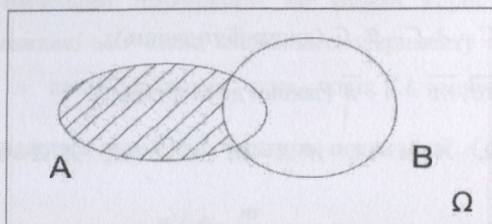


Рис.1.4

Подія $A-B$ складається з елементарних подій, які входять до A , але не входять до B . Наприклад, повертаючись до експерименту з гральним кубиком, якщо $A = \{\omega_2, \omega_4\}$ і $B = \{\omega_4, \omega_6\}$, то $A-B = \{\omega_2\}$.

Події A та B називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж експерименті. В супротивному випадку події називаються *сумісними*.

Якщо $A + \bar{A} = \Omega$, то події A і $\bar{A}$ — протилежні. Подія $\bar{A}$ означає, що подія A не відбулася (рис.1.5).

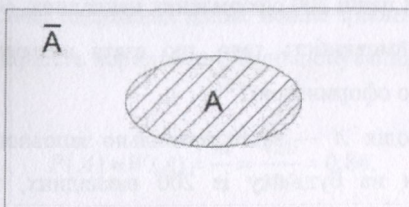


Рис.1.5

Наприклад, протилежними є події «двигун працює» і «двигун не працює».

Події в даному експерименті називаються *рівноможливими*, якщо кожна з них має однакову можливість появи. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, якщо вони попарно несумісні і разом складають достовірну подію:

$$A_i A_j = \emptyset, \quad (i \neq j); \quad \sum_{i=1}^n A_i = \Omega.$$

Деякі основні властивості визначених вище операцій:

1. $A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$ (комутативність);
2. $(A + B) + C = A + (B + C), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (асоціативність);
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивність);
4. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ (закони де Моргана);
5. $A + \overline{A} = \Omega, A + A = A, A \cdot A = A, A \cdot \overline{A} = \emptyset, A \cdot \Omega = A, \overline{\overline{A}} = A.$

1.3. Класичне, статистичне і геометричне означення ймовірності

Кількісною мірою можливості появи події є *ймовірність події*. Ймовірність події A позначається через $P(A)$ (від probability — ймовірність).

Нехай експеримент має n рівноможливих наслідків $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, причому m із них сприяють появі події A . Тоді ймовірність події A буде

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Наведене означення ймовірності називається *класичним*.

Приклад 1.1. В пачці 200 оформлених накладних, серед яких 17 заповнені неправильно. Яка ймовірність того, що взята навмання з пачки накладна виявиться правильно оформленою?

Розв'язання. Подія A — взято правильно заповнену накладну. Оскільки вибір може впасти на будь-яку із 200 накладних, то $n = 200$. Подія A відбудеться, якщо буде взято одну із $200 - 17 = 183$ правильно заповнених накладних, тобто $m = 183$.

Отже, за формулою (1.1) маємо

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{183}{200} = 0,915.$$

З класичного означення ймовірності випливає важлива нерівність:

$$0 \leq P(A) \leq 1,$$

причому виконується

$$1) P(\Omega) = 1,$$

$$2) P(\emptyset) = 0.$$

Класичним означенням ймовірності не можна користуватись, якщо наслідки не рівноможливі або число наслідків експерименту є нескінченним. Нехай проведено n випробувань, в яких подія A відбулася m разів.

Відношення $\frac{m}{n}$ називається відносною частотою появи події A і позначається

$$W(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.2)$$

При достатньо великій тривалості експерименту відносна частота коливається навколо деякого сталого числа p , яке приймається за ймовірність події A :

$$p = P(A) \approx W(A).$$

Таке означення ймовірності називається *статистичним* або *емпіричним*.

Приклад 1.2. Із 500 протестованих електроламп 420 пропрацювали більше 1000 годин. Визначити ймовірність нормального функціонування лампи такого типу більше 1000 годин.

Розв'язання. На основі одержаних даних можна зробити висновок, що для лампи такого типу ймовірність нормального функціонування більше 1000 годин (подія A) становить

$$P(A) \approx W(A) = \frac{m}{n} = \frac{420}{500} = 0,84.$$

Нехай всі наслідки експерименту можна прийняти за множину точок деякої області D , частину якої займає подія A : $A \subset D$. Ймовірність події

A буде

$$P(A) = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } D}. \quad (1.3)$$

Тут $\text{mes } A$, $\text{mes } D$ — міра (довжини, площі, об'єму) областей A та D . Таку ймовірність називають *геометричною*.

Приклад 1.3. Кредитор домовився із клієнтом про зустріч в банку між 10 та 11 годинами. Той хто прибув першим чекає 15 хвилин і їде. Яка ймовірність зустрічі?

Розв'язання. Нехай x — момент приходу кредитора, а y — клієнта. Всі можливі наслідки утворюють квадрат $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ в декартовій прямокутній системі координат Oxy . Зустріч відбудеться (подія A) за умови

$$|y - x| \leq \frac{1}{4}$$

або

$$x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4} \quad (\text{рис.1.6}).$$

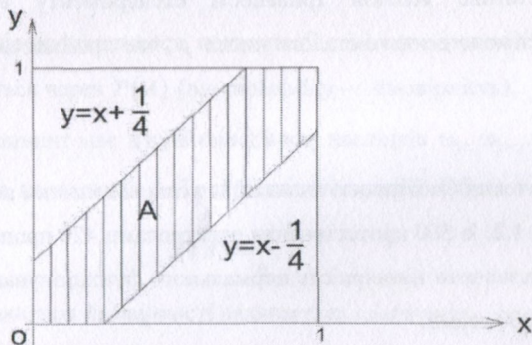


Рис. 1.6

Обчислюємо площу $\text{mes } A$ заштрихованої області:

$$\text{mes } A = \text{mes } D - 2S_{\Delta} = 1 - 9/16 = \frac{7}{16}.$$

Отже, за формулою (1.3) обчислюємо

$$P(A) = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } D} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

Відмітимо, що існує аксіоматична побудова теорії ймовірностей, яка формалізує і узагальнює наведені означення ймовірностей.

1.4 σ -алгебра подій. Аксіоматичне означення ймовірності

Побудова ймовірнісних моделей для експериментів з незліченним числом наслідків неможлива без наступної інформації.

Ймовірність — це функція від випадкової події. Функції дійсної змінної, як ми знаємо, зазвичай визначені не для всіх дійсних чисел, а лише для деякої підмножини множини R , яка називається областю визначення. Ймовірність також не завжди вдається визначити для будь-яких підмножин (випадкових подій) множини Ω . Доводиться обмежуватись деяким класом підмножин. Від цього класу природно вимагати, щоб він був замкненим відносно операцій, введених для подій вище.

Нехай Ω — довільний простір елементарних подій, а S — деяка сукупність випадкових подій. Сукупність подій S називається *алгеброю подій*, якщо виконуються умови:

1) $\Omega \in S$;

2) якщо $A \in S$, $B \in S$, то $A + B \in S$, $A - B \in S$.

Неможлива подія завжди входить до алгебри подій, оскільки $\emptyset = \Omega - \Omega$. Якщо $A \in S$, то $\bar{A} \in S$, оскільки $\bar{A} = \Omega - A$. Нарешті, якщо $A \in S$, $B \in S$, то $AB \in S$, тому що $AB = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$ (це випливає з другого закону де Моргана).

Найменшою сукупністю подій, яка є алгеброю, очевидно, є множина $S = \{\Omega, \emptyset\}$, оскільки $\Omega \pm \emptyset = \Omega$, $\emptyset - \Omega = \emptyset$.

Алгебра подій F називається σ -алгеброю або борелівською алгеброю, якщо з того, що $A_i \in F$, $i = 1, 2, \dots$, випливає, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.

Зауважимо, що у випадку скінченної множини Ω будь-яка алгебра подій є σ -алгеброю.

Тепер ми можемо ввести поняття ймовірності події.

Числова функція P , визначена на σ -алгебрі подій F , називається ймовірністю, якщо

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3') $AB = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$ (скінчена адитивність);

3'') якщо в послідовності подій $A_1, A_2, \dots$ всі події попарно несумісні, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \text{ (зліченна адитивність);}$$

4) нехай для зростаючої послідовності подій

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots \text{ і } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ або для спадної послідовності подій}$$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots \text{ і } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ тоді } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \text{ (аксіома}$$

неперервності).

Трійку (Ω, F, P) , де F — σ -алгебра, а P — ймовірність, визначена вище, називатимемо ймовірнісним простором.

Умови в означеннях алгебри, σ -алгебри та ймовірності складають систему аксіом теорії ймовірностей, яка була запропонована А.М. Колмогоровим і виявилась виключно плідною для розвитку теорії ймовірностей.

1.5 Елементи комбінаторики

Часто при обчисленні ймовірностей за класичним означенням потрібно вміти підраховувати число усіх можливих способів розташування певних предметів або число всіх можливих способів здійснення певної дії. Це можна зробити, застосовуючи основні правила і формули комбінаторики.

Комбінаторика — розділ математики, в якому вивчають розташування та

вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Перші дослідження з комбінаторики зроблені у XVII-XVIII ст. Б. Паскалем, П. Ферма, Г. Лейбніцем, Я. Бернуллі, Л. Ейлером.

Комбінаторика ґрунтується на двох принципах.

Принцип суми. Якщо множина A містить m елементів, а множина B — n елементів, причому ці множини не мають спільних елементів, то множина $A + B$ містить $m + n$ елементів.

Принцип добутку. Нехай потрібно виконати послідовно k дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу — n_2 способами і так до k -ої дії, яку можна виконати n_k способами. Тоді всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Приклад 1.4. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4, якщо жодна з цифр не повторюється.

Розв'язання. Оскільки першою цифрою можуть бути тільки цифри 1,2,3,4, то існує $n_1 = 4$ способів її вибору. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана $n_2 = 4$ способами, третя — $n_3 = 3$ способами, четверта — $n_4 = 2$ способами.

Отже, згідно з принципом добутку, шукане число способів дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

Множина називається упорядкованою, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа.

Упорядковані множини відрізняються одна від одної або своїми елементами, або їх порядком.

Упорядковані k -елементні підмножини множини з n елементів називаються *розміщеннями з n елементів по k* .

Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), \quad (1.4)$$

де, як відомо,

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

причому

$$0! = 1.$$

Приклад 1.5. Скількома способами можна розсадити 3 студентів на 10 стільцях?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Розміщення з n елементів по n називають *перестановками*.

Число перестановок із n елементів позначається через P_n і обчислюється

$$P_n = A_n^n = n! \quad (1.5)$$

Зауважимо, що перестановки з n елементів відрізняються між собою лише порядком елементів.

Приклад 1.6. Скількома способами можна розмістити на полиці чотири томи математичної енциклопедії?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини з чотирьох елементів, тобто

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Довільні k -елементні підмножини множини з n елементів, які відрізняються хоча б одним елементом називаються *сполученнями* (комбінаціями) із n елементів по k . Число сполучень з n елементів по k позначається C_n^k і обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.6)$$

Мають місце рівності:

$$\text{а) } C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$\text{б) } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1};$$

$$в) \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

Приклад 1.7. До Ради директорів компанії входять 2 бухгалтери, 3 інженери та 4 технологи. Планується створити підкомітет із трьох членів. Яка ймовірність того, що підкомітет буде складатися лише із технологів?

Розв'язання. Подія B - підкомітет складається лише із технологів. Число всіх способів вибору трьох осіб із дев'яти ($2+3+4=9$) становить $n = C_9^3$. Число наслідків, які сприяють появі події B буде $m = C_4^3$. Отже, шукана ймовірність

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4!6!3!}{3!1!9!} = \frac{1}{21} \approx 0,048.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке випадкова подія? Достовірна? Неможлива? Простір елементарних подій?
2. Які події вважаються несумісними? Сумісними? Протилежними?
3. Які події утворюють повну групу?
4. Що називають сумою подій? Добутком?
5. Дайте класичне означення ймовірності події. Назвіть властивості ймовірності.
6. Сформулюйте основні два принципи комбінаторики.
7. Що називається розміщеннями із n елементів по k ?
8. Який зв'язок існує між розміщеннями, перестановками і сполученнями?

Глосарій: теорія ймовірностей, математична статистика, стохастичний експеримент, наслідок, випадкова подія, достовірна подія, неможлива подія, простір елементарних подій, елементарні події, наслідок події, сума подій, добуток подій, різниця двох подій, закони де Моргана, несумісні події,

протилежні події, рівноможливі події, повна група подій, класичне означення ймовірності, відносна частота, статистичне означення ймовірності, геометрична ймовірність, ймовірність, алгебра подій, σ -алгебра, ймовірнісний простір, комбінаторика, принцип суми, принцип добутку, упорядкована множина, розміщення, перестановки, сполучення.

Практичне заняття №1

Означення ймовірності

№1.1. У групі 25 студентів. Скільки існує можливостей вибрати старосту і профорга за умови, що кожен студент може виконувати лише одне з цих доручень?

Розв'язання. Доручення старости може виконувати кожен з 25 студентів (25 можливостей). Після цього профоргом може стати кожен з 24 студентів (24 можливості). Отже, загальна кількість можливостей вибору старости та профорга дорівнює: $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$.

№1.2. Студенти вивчають 8 дисциплін. Скільки існує способів складання розкладу занять на п'ятницю, якщо в цей день тижня повинні бути три різні пари?

Розв'язання. На першу пару можна поставити будь-яку з 8 дисциплін, на другу — одну з 7 дисциплін, що залишились, а на третю — одну з 6 дисциплін. Таким чином, число способів складання розкладу є: $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Зауважимо, що тут розглядаються сполуки з 8 елементів по 3, які можуть відрізнитися або елементами, або їх порядком.

№1.3. На секції математики студентської наукової конференції побажали виступити з доповідями чотири студенти. Скількома способами їх можна розмістити в програмі, якщо їх доповіді повинні бути поруч?

Розв'язання. Очевидно, це $A_4^4 = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

№1.4. Групу студентів повинна екзаменувати з математики комісія з двох викладачів. Скількома способами може бути складена екзаменаційна

комісія, якщо на кафедрі 5 викладачів математики?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює: $C_5^2 = \frac{A_5^2}{P_2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$.

№1.5. Скільки треба мати словників, щоб можна було робити переклади з будь-якої із п'яти мов на будь-яку іншу з них? (Відповідь: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$).

№1.6. Скількома способами можна розмістити 10 студентів за круглим столом? (Відповідь: $P_9 = 9!$).

№1.7. На 5 співробітників хімічної лабораторії виділено три оздоровчі путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо: а) всі путівки різні; б) всі путівки однакові? (Відповідь: а) $A_5^3 = 60$; б) $C_5^3 = 10$).

№1.8. Скількома способами можна відібрати 5 студентів для роботи в математичному гуртку, якщо у підгрупі 13 студентів? (Відповідь: $C_{13}^5 = 1287$).

№1.9. Скільки є трьохзначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 і які діляться на 5? (Відповідь: 60).

№1.10. Скільки існує способів вибору на чергування двох студентів з двох груп чисельністю 23 і 20 студентів? (Відповідь: $23 \cdot 20 = 460$).

№1.11. Скількома способами можна відібрати одного студента на олімпіаду з математики із двох груп, що складаються з 23 та 20 студентів? (Відповідь: $23 + 20 = 43$).

№1.12. В турнірі брали участь 10 шахістів, і кожні 2 з них зустрічались 1 раз. Скільки шахових партій зіграно у турнірі? (Відповідь: $C_{10}^2 = 45$).

№1.13. Група студентів вивчає сім учбових дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять у понеділок, якщо у цей день повинно бути 4 різних заняття? (Відповідь: $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$).

№1.14. Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються? (Відповідь: $P_5 = 5! = 120$).

№1.15. Скільки матчів буде зіграно у футбольному чемпіонаті за участю 16 команд, якщо кожні 2 команди зустрічаються між собою один раз?

(Відповідь: $C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120$).

№1.16. Скільки дев'ятизначних чисел можна написати дев'ятьма цифрами? (Відповідь: $P_9 = 9!$).

№1.17. Скількома способами можна посадити дванадцять осіб за столом, на якому стоїть дванадцять приборів? (Відповідь: $P_{12} = 12!$)

№1.18. З десяти кандидатів на одну й ту ж посаду слід вибрати трьох. Скільки може бути різних випадків обирання? (Відповідь: $C_{10}^3 = 120$).

№1.19. Скількома способами можна вибрати 13 карт з колоди у 52 карти? (Відповідь: C_{52}^{13}).

№1.20. Скільки можна утворити цілих чисел з яких кожне записувалося б трьома різними значущими цифрами? (Відповідь: $A_9^3 = 504$).

№1.21. Скільки можна утворити цілих чисел з яких кожне записувалося б трьома різними цифрами? (Відповідь: $A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648$ або $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$).

№1.22. 5 студентів повинні сидіти за одним столом в лабораторії. Скількома способами їх можна посадити за столом? (Відповідь: $P_5 = 5! = 120$).

№1.23. У лабораторії 38 студентів. З них 6 слід посадити за 1-й стіл. Скільки усіх випадків може бути, якщо не зважати на порядок розташування студентів за столом? (Відповідь: $C_{38}^6 = C_{38}^{32} = 2760681$).

№1.24. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох осіб для чергування, якщо: а) один з них має бути старшим; б) старшого не повинно бути? (Відповідь: а) $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$; б) $C_{30}^2 = 432$).

№1.25. У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити 1 сержанта і трьох солдатів для патрулювання? (Відповідь: $C_3^1 \cdot C_{30}^3 = 3 \cdot 4060 = 12180$).

№1.26. Скількома способами можна присудити 1-е, 2-е і 3-є місця на олімпіаді з математики, у якій беруть участь 30 студентів? (Відповідь: A_{30}^3).

№1.27. У фінальному турі змагань беруть участь 5 студентів. Скількома способами можуть розподілитись місця між ними? (Відповідь: 5!).

№1.28. 25 учасників річних зборів акціонерів претендують на посади голови, секретаря, казначея та 4 інші посади у правлінні. Визначити, скільки існує способів заміщення вакантних місць претендентів. (Відповідь: $A_{25}^3 \cdot C_{22}^4$).

№1.29. Рада директорів складається з 3 бухгалтерів, 5 менеджерів і 6 інженерів. 1) Скількома способами можна створити з них підкомітет, що складається з 1 бухгалтера, 3 менеджерів і 4 інженерів? 2) Розв'язати задачу за умови, що до підкомітету повинні увійти головний бухгалтер та генеральний менеджер. (Відповідь: 1) $C_3^1 C_5^3 C_6^4$; 2) $C_4^2 C_6^4$).

№1.30. З 25 учасників річних зборів акціонерів потрібно обрати правління з 7 чоловік і комісію з 3 чоловік. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо: 1) члени правління можуть входити до складу комісії; 2) члени правління не можуть входити до складу комісії? (Відповідь: 1) $C_{25}^7 C_{25}^3$; 2) $C_{25}^7 C_{18}^3$).

№1.31. Скількома способами можна групу з 20 студентів поділити на дві підгрупи так, щоб в одній підгрупі було 15 студентів, а в другій 5? (Відповідь: $C_{20}^{15} = C_{20}^5$).

№1.32. Скількома способами групу з 20 студентів можна поділити на дві підгрупи по 10 чоловік? (Відповідь: C_{20}^{10}).

№1.33. Скількома способами можна поділити комісію з 15 викладачів на три підкомісії по 5 чоловік? (Відповідь: $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5$).

№1.34. Нехай A, B, C – три довільні події. Знайти події, які означають: 1) відбулася лише подія A ; 2) відбулися лише події A і B ; 3) відбулися всі три події; 4) відбулася принаймні одна з подій; 5) відбулися принаймні дві події; 6) відбулася лише одна подія; 7) відбулися лише дві події; 8) жодна з подій не відбулася; 9) відбулося не більше двох подій.

Розв'язання. 1) $A_1 = \overline{ABC}$; 2) $A_2 = A\overline{B}C$; 3) $A_3 = ABC$;
4) $A_4 = A + B + C = \overline{\overline{ABC}}$; 5) $A_5 = A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$;

$$6) A_6 = \overline{ABC} + \overline{A\overline{B}C} + \overline{AB\overline{C}}; 7) A_7 = \overline{ABC} + \overline{A\overline{B}C} + \overline{AB\overline{C}}; 8) A_8 = \overline{ABC};$$

$$9) A_9 = \overline{ABC} + \overline{A\overline{B}C} + \overline{AB\overline{C}} + \overline{ABC} + \overline{A\overline{B}C} + \overline{AB\overline{C}} = \overline{ABC}.$$

№1.35. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Нехай A — подія, що означає випадання в сумі непарного числа очок; B — хоча б на одному кубіку випало одне очко. Записати події AB та $A+B$.

Розв'язання. Позначимо через ω_{ij} подію, яка означає, що при першому підкиданні випало i очок, а при другому — j очок, $i, j = \overline{1,6}$. Простір елементарних подій Ω складається з 36 подій ω_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$.

Подія AB означає, що при першому підкиданні випало 1 очко, а при другому — парне число очок або навпаки, тобто:

$$AB = \omega_{12} + \omega_{14} + \omega_{16} + \omega_{21} + \omega_{41} + \omega_{61}.$$

Подія $A+B$ означає, що сума очок непарна, або хоча б при одному підкиданні випало одне очко. Ця подія не відбувається, коли відбувається одна з 13 подій: $\omega_{22}, \omega_{24}, \omega_{26}, \omega_{33}, \omega_{35}, \omega_{42}, \omega_{44}, \omega_{46}, \omega_{53}, \omega_{55}, \omega_{62}, \omega_{64}, \omega_{66}$.

№1.36. У ящику 10 куль з номерами від 1 до 10. Дістали 1 кулю. Яка ймовірність того, що її номер не перевищує 10?

Розв'язання. За умовою номер будь-якої кулі не перевищує 10, тому число випадків, що сприяють події A , дорівнює числу всіх можливих випадків, тобто:

$$m = n = 10. \text{ Отже, } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1 \text{ (подія } A \text{ є достовірною).}$$

№1.37. В урни є 20 куль: 12 білих і 8 чорних. Яка ймовірність дістати з урни червону кулю?

Розв'язання. В урни червоних куль немає, тому $m=0$, а $n=20$. Отже,

$$P(A) = \frac{0}{20} = 0. \text{ У даному випадку подія } A \text{ неможлива.}$$

№1.38. В урни 15 куль: 5 білих, 6 чорних та 4 синіх. Яка ймовірність дістати: а) білу; б) чорну; в) синю кулю?

Розв'язання. За умовою $n=15$. а) $m=5$, тому $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; б) $m=6$,

тому $P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; в) $m = 4$, тому $P(C) = \frac{4}{15}$.

№1.39. Знайти ймовірність того, що при підкиданні 3-х гральних кубиків 6 очок випаде на одному з них (байдуже якому), а на гранях двох інших випаде різна кількість очок, причому це не буде 6 очок.

Розв'язання. Загальна кількість елементарних наслідків експерименту дорівнює $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Число ж наслідків, що сприяють появі 6 очок на одному кубуку і різної кількості (не рівних 6 очок) на двох інших, дорівнює $m = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$. Тоді $P(A) = \frac{60}{216} \approx 0,278$.

№1.40. У студентському ансамблі 12 студентів, серед яких 5 хлопців. Яка ймовірність того, що серед 5-ти навмання відібраних солістів — 2 хлопці?

Розв'язання. З 12 студентів відбирають 5. Загальне число таких способів відбору дорівнює $n = C_{12}^5$. Число наслідків, що сприяють шуканій події дорівнює $m = C_5^2 C_7^3$. Таким чином, $P = \frac{C_5^2 C_7^3}{C_{12}^5} = \frac{175}{396} \approx 0,442$.

№1.41. У замку з «секретом» на спільній осі встановлено 4 диски, кожен з яких розділено на 5 секторів, на яких записані різні цифри. Замок відкривається лише тоді, коли диски встановлені так, що цифри на них складають певне чотиризначне число. Знайти ймовірність того, що при довільній установці дисків замок відкриється.

Розв'язання. Число всіх можливих наслідків $n = 5^4$, а число сприятливих шуканій події дорівнює $m = 1$. Таким чином, шукана ймовірність $P = \frac{1}{5^4}$.

№1.42. Зроблено 20 пострілів по цілі, при цьому виявлено 18 влучень. Знайти відносну частоту влучень.

Розв'язання. За умовою $n = 20$, а $m = 18$. Тоді $W = \frac{m}{n} = \frac{18}{20} = 0,9$.

№1.43. Всередині еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ розміщене коло $x^2 + y^2 = 9$. Знайти

ймовірність попадання точки в кільце, обмежене еліпсом і колом.

Розв'язання. Нехай подія A — попадання точки в кільце. Тоді $P(A) = \frac{S_{\text{кіль.}}}{S_{\text{ел.}}}$.

$$S_{\text{кіль.}} = S_{\text{ел.}} - S_{\text{кр.}} = \pi ab - \pi r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 4 - \pi \cdot 9 = 20\pi - 9\pi = 11\pi. \quad \text{Таким} \quad \text{чином,}$$

$$P(A) = \frac{11\pi}{20\pi} = 0,55.$$

№1.44. З 20 банків 10 розташовані за межею міста. Для дослідження випадково вибрано 5 банків. Яка ймовірність того, що серед відібраних виявиться в місті: а) 3 банки; б) хоча б один. (Відповідь: а) $C_{10}^3 C_{10}^2 / C_{20}^5 = 0,348$; б) $1 - C_{10}^5 / C_{20}^5 = 0,985$).

№1.45. Студент відшукує потрібну йому формулу в трьох довідках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому і третьому довідникові, відповідно дорівнює 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що ця формула міститься не менше, ніж в двох довідниках. (Відповідь: 0,788).

№1.46. Ймовірність своєчасного виконання студентом контрольної роботи з кожної з трьох дисциплін дорівнює відповідно 0,6; 0,5; 0,8. Знайти ймовірність своєчасного виконання контрольної роботи студентом: а) з двох дисциплін; б) хоча б з двох дисциплін. (Відповідь: а) 0,46; б) 0,7).

№1.47. Контролер перевіряє на якість пошитих 20 пальт і встановлює, що 16 з них є першого сорту, а решта — другого. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання з цієї партії трьох екземплярів один буде другого сорту. (Відповідь: 0,421).

№1.48. В коробці 10 червоних, 3 синіх і 7 жовтих олівців. Навмання виймають 3 олівця. Яка ймовірність того, що всі олівці: а) різного кольору; б) одного кольору? (Відповідь: а) 0,184; б) 0,137).

№1.49. У коло з радіусом R вписано квадрат. Знайти ймовірність влучення довільно кинутої точки у квадрат, якщо ця ймовірність пропорційна площі квадрата. (Відповідь: $P = \frac{2}{\pi}$).