

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА



ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-МЕТОДИЧНА
КОНФЕРЕНЦІЯ

СУЧАСНІ НАУКОВО – МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ

23-24 травня 2022 р.

КИЇВ НУХТ 2022

**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
NATIONAL UNIVERSITY OF FOOD TECHNOLOGIES
NATIONAL PEDAGOGICAL DRAGOMANOV UNIVERSITY
HIGHER EDUCATION ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE**

**ALL-UKRAINIAN SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL
CONFERENCE**

**MODERN SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL PROBLEMS OF
MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL**

May 23-24, 2022

KYIV NUFT 2022

Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 23 – 24 травня 2022 р. – К.: НУХТ, 2022р. – 133 с.

Proceedings of the All-Ukrainian scientific-methodical conference "Modern scientific-methodical problems of mathematics in higher education", May 23 - 24, 2022 - K .: NUFT, 2022. – 133 p.

Видання містить матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». На конференції розглянуті сучасні математичні методи в інженерних задачах та методичні проблеми викладання математичних дисциплін у вищій школі. У матеріалах висвітлено шляхи і методи інтенсифікації навчального процесу й вплив новітніх наукових розробок на формування майбутніх фахівців.

The publication contains materials of the All-Ukrainian scientific-methodical conference "Modern scientific-methodical problems of mathematics in higher school". The conference discusses modern mathematical methods in engineering problems and methodological problems of teaching mathematical disciplines in higher education. The materials highlight the ways and methods of intensifying the educational process and the impact of the latest scientific developments on the formation of future professionals.

Редакційна колегія:

О.Ю. Шевченко – ректор Національного університету харчових технологій, доктор технічних наук, професор;

С. В. Токарчук – проректор з наукової роботи Національного університету харчових технологій, кандидат технічних наук, доцент;

В.Г. Самойленко – чл. корр. НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Національного університету ім. Тараса Шевченка;

О.А. Бойчук – член-корр. НАНУ, зав. відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань, доктор фізико – математичних наук, професор;

А.Г. Нікітін – член-корр. НАНУ, доктор фізико – математичних наук, професор;

М.В. Працьовитий – академік АНВШ України, декан факультету математики, інформатики та фізики Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова, доктор фізико-математичних наук, професор;

І.І. Юрик – завідувач кафедри вищої математики імені професора Можара В.І. НУХТ, кандидат фізико – математичних наук, професор;

А.В. Форсюк – декан факультету автоматизації і комп'ютерних систем, кандидат технічних наук, доцент;

В.Д. Кошманенко – провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;

В.М. Бойко – старший науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;

С.А. Плакса – завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України доктор фізико-математичних наук, професор,;

О.П. Зінькевич – доцент кафедри вищої математики імені професора Можара В.І. НУХТ, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано вченою радою НУХТ.

Протокол № 9 від «28» квітня 2022р.

Матеріали конференції видано в авторській редакції

© НУХТ, 2022

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ЗАДАЧАХ

<i>Віталій Вовк, Валерій Самоїленко</i> Асимптотичний аналіз математичних моделей гідродинаміки із змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням.....	8
<i>Микола Працьовитий, Яніна Гончаренко, Ірина Лисенко, Софія Ратушняк</i> Про порядок росту знаменників підхідних дробів ланцюгових A_2 -дробів.....	9
<i>Іван Юрик</i> Звуження незвідних унітарних зображень групи $p(1,4)$ на підгрупу $p(1,3)$	12
<i>Євген Сторожук, Володимир Максимюк, Іван Чернишенко, Вікторія Корнієнко</i> Розподіл напружень навколо циклічно розташованих прямокутних отворів в нелінійно-пружній ортотропній циліндричній оболонці.....	14
<i>Іван Ластівка, Анатолій Богатирчук</i> Застосування методу скінченних елементів при Розрахунку напружено-деформованого стану в композитних оболонках.....	18
<i>Ольга Островська, Василь Островський, Данило Проскурін, Юрій Самоїленко</i> Клас зображень ізометрій, що q_{ij} -комутують.....	20
<i>Оксана Мулява, Микола Медведєв</i> Дослідження диференціальних рівнянь з використанням псевдоопуклих рядів Діріхле.....	22
<i>Oleksandr Baranovskyi, Mykola Pratsiovytyi</i> Analytic definition of one class of fractal functions by Engel series.....	25
<i>Тетяна Баранник</i> Оператори умовної симетрії для нелінійного рівняння реакції – дифузії.....	27
<i>Оксана Білаш</i> Математичне моделювання, як один із пріоритетних методів для розв'язання інженерних задач.....	29
<i>Катерина Божонок</i> Апроксимаційний метод розв'язування нелінійного диференціального рівняння Абеля	31
<i>Яніна Гончаренко, Валентина Мороз</i> Застосування балансових моделей типу «витрати-випуск» для моделювання наслідків імпульсних скорочень обсягів виробництва окремих галузей економіки України.....	34
<i>Яніна Гончаренко, Анна Нитник</i> Моделювання часового ряду з складною локальною будовою..	39
<i>Марина Даниленко, Оксана Требенко</i> Моделі аксіоматичної теорії кватерніонів: нові результати.....	43
<i>Тетяна Зінченко</i> Математична модель як основа алгоритму розпаралелення обчислювального процесу.....	44
<i>Олексій Зінкевич</i> Нечіткі множини.....	46
<i>Ірина Ковальська, Олена Радзієвська</i> Оцінка найкращих наближень узагальнених похідних функції банахового простору через найкращі наближення функції.....	49
<i>Валентина Лісовська, Тетяна Кудик</i> Застосування різницевих рівнянь першого порядку при моделюванні динамічних процесів в економіці.....	51
<i>Юлія Маслова, Яніна Гончаренко, Ірина Лисенко</i> Деякі функція з фрактальними властивостями пов'язані з G_2 – зображення дійсних чисел.....	55
<i>Олег Мазур</i> Оптимальне керування несамоспряженої крайової задачі. Задача еліптичного типу.....	58
<i>Оксана Ніколаєва</i> Канонічне представлення логарифму відношення правдоподібності для лічильних процесів.....	59
<i>Сергій Пудченко, Іван Горбачук</i> Наукова школа доктора технічних наук професора Віктора Дущенко.....	61
<i>Марина Рассадкіна</i> Коефіцієнти транзитивності ч. в. множини виду $(N, 5)$	65
<i>Вікторія Романенко</i> Математична модель економічної ефективності вирощування картоплі..	68
<i>Людмила Трубайчук, Оксана Требенко</i> Про одне із узагальнень трикутника Паскаля.....	70

<i>Євгеній Шаповалов, Віктор Шаповалов, Шаповалова Ірина Миколаївна</i> Математична модель онтологічних графів для інтерпретації досліджень.....	72
<i>Ганна Циганкова</i> Оцінка результатів вимірювання магнітної індукції в нерівномірному повітряному проміжку електродинамічного гальма.....	74

СЕКЦІЯ 2. МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

<i>Олександр Школьний</i> Типові задачі при підготовці до ЗНО з математики: раціональні числа і вирази.....	77
<i>Володимир Михалевич, Оксана Тютюнник, Олександр Корінний</i> Навчальний Maple- тренажер з обчислень за розширеним алгоритмом Евкліда.....	80
<i>Володимир Максимюк, Євген Сторожук</i> Про науково–методичні проблеми математичного моделювання в теорії оболонок.....	84
<i>Наталія Борозенець</i> Формування дослідницької компетентності студентів аграрних ЗВО: використання методів навчання у процесі вивчення вищої математики	88
<i>Ольга Бондаренко, Яніна Гончаренко</i> Використання мови Python для розв’язування деяких задач з курсів «Математичне програмування» та «Лінійна алгебра».....	91
<i>Юлія Васютинська</i> Особливості дистанційно форми організації навчального процесу.....	95
<i>Лев Величко, Надія Гузик, Христина Ліщинська</i> Застосування інтерактивних методів навчання.....	97
<i>Вячеслав Горбурков, Олег Франчук</i> Методичні аспекти надання рекомендацій щодо вдосконалення навчально-освітньої діяльності.....	99
<i>Олексій Зінкевич, Валентина Лісовська, Тетяна Кудик</i> Формування мотиваційної компоненти навчання.....	102
<i>Ганна Мамонова</i> Математика у коміксах – ретроспектива і перспектива.....	107
<i>Олександр Пархоменко, Єлизавета Понурко, Тетяна Велика</i> Реалізація метода трапецій в Google Таблицях як методичний прийом при вивченні інтегралів.....	111
<i>Олена Поплавська, Наталія Самарук</i> Проблеми математичної підготовки майбутніх економістів в умовах дистанційного навчання.....	114
<i>Олександра Сушко-Крикун</i> Сучасні проблеми та перспективи викладання математичних дисциплін.....	118
<i>Любов Черкаська, Оксана Москаленко, Юрій Москаленко, Олена Коваленко</i> Формування фахових компетентностей майбутніх учителів математики засобами інтерактивних технологій.....	122
<i>Наталія Шаповалова, Лариса Панченко</i> Опорні конспекти як засіб формування основних понять у геометрії Лобачевського.....	125
<i>Катерина Юрченко</i> STEM-проекти на уроках математики в ЗЗСО.....	130

СЕКЦІЯ 1.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ ЗАДАЧАХ

Асимптотичний аналіз математичних моделей гідродинаміки із змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням

Віталій Вовк
Валерій Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Розглядаються диференціальні рівняння з частинними похідними, які використовуються в якості математичних моделей в гідродинаміці. Особливістю даних рівнянь моделей є наявність у них змінних коефіцієнтів, що значно ускладнює вивчення подібних задач аналітичними методами.

З іншого боку, наявність змінних коефіцієнтів дозволяє математично описувати процеси і явища, перш за все, хвильового типу у середовищах, характеристики яких залежать як від часової, так і просторових змінних. Крім того, у моделях, що вивчаються, наявне сингулярне збурення, яке, зокрема, у певних випадках характеризує середовище з малою дисперсією.

На прикладі рівнянь інтегровного типу розглядається задача про аналітичний опис деформацій солітонних розв'язків рівнянь гідродинамічного типу зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням. Така задача природньо виникає у випадках, коли відповідне рівняння (зі сталими коефіцієнтами) володіє так званними солітонними розв'язками, а отже, у частинних випадках рівняння зі змінними коефіцієнтами також може мати або ж розв'язки такого типу, або ж розв'язки, які є близькими (у певному сенсі) до таких розв'язків.

Дослідження проводиться з використанням асимптотичного нелінійного методу ВКБ, за допомогою якого будуються асимптотичні однофазові солітонноподібні розв'язки.

Розглядається питання про точність, з якою побудовані асимптотичні розв'язки задовольняють вихідне рівняння.

Обговорюється питання про вплив величини малого параметра на вигляд асимптотичних розв'язків даного типу і структуру алгоритму їх побудови. Також розглянуто питання про аналіз асимптотичних властивостей побудованих розв'язків при прямування малого параметра до його граничного значення.

Отриманні результати продемонстровано на прикладах, зокрема, представлено графіки для головного і першого доданків побудованих асимптотичних розв'язків, проаналізовано їх властивості в залежності від знаменів малого параметра.

**Про порядок росту знаменників підхідних дробів
ланцюгових A_2 -дробів**

Микола Працьовитий

*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Інститут математики НАН України*

Яніна Гончаренко, Ірина Лисенко

*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Софія Ратушняк*

*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Інститут математики НАН України*

Нехай $A \equiv \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$ – двосимвольний алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді згідно з [9] для будь-якого $x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ існує послідовність $(a_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]. \quad (1)$$

Нескінченний ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим A_2 -дробом*, а скорочений (символічний) запис $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ – *A_2 -зображенням* числа. Існують числа, що мають два A_2 -зображення. Це числа виду:

$$\left[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right] = \left[0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1, \left(1, \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2)$$

Їх ми називаємо *A_2 -бінарними*. Решта чисел мають одне єдине зображення. Множину таких чисел називаємо *A_2 -унарними*.

Зображенням чисел за допомогою їх розкладів у ланцюгові дроби науковці цікавилися протягом останнього століття. Значних успіхів у створенні метричної теорії таких зображень вдалося досягти О. Хінчину [12], П. Леві [5], Данжуа [3], Фарею [2], Лехнеру [4] тощо. В переважній більшості це були елементарні ланцюгові дроби, тобто такі, елементами яких є натуральні числа або ланцюгові (скінченні і нескінченні) розклади, що використовували скінченний алфавіт. Число представлене такими системами зображення могло мати континуальну множину зображень. В роботі [9] був запропонований підхід розкладу чисел у нескінченний ланцюговий дріб, елементами яких є лише два числа. Причому, кожне число має не більше двох зображень, а ті, що мають їх два утворюють зліченну множину чисел.

Тополого-метричні властивості ланцюгового A_2 -зображення чисел розкривають властивості циліндричних множин, зокрема довжина циліндра і основне метричне відношення. Ці питання достатньо повно висвітлені у роботах [7,9,8]. Поширити отримані результати у випадку трьохсимвольного алфавіту вдалося у роботі [11]. Окрему нішу посідають задачі властивостей

розподілів випадкових величин, представлених ланцюговими A_2 -дробами, значні результати в цьому напрямку були отриманні у роботах [1,6,10].

Ми цікавимося властивостями послідовностей знаменників підхідних дробів для подальшого поглиблення метричної складової теорії нескінченних ланцюгових A_2 -дробів.

Нагадаємо, що *підхідним дробом порядку n* ланцюгового A_2 -дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ називається вираз $\frac{p_n}{q_n}$, що дорівнює значенню скінченного ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Для обчислення чисельника і знаменника підхідних дробів використовують закон утворення підхідних дробів:

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases} n \in N \quad \text{де} \quad \begin{cases} p_{-1} = 1, \\ q_{-1} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0, \\ q_0 = 1. \end{cases} \quad (3)$$

На основі рівностей (3) і (1) мають місце наступні співвідношення.

Для послідовності знаменників підхідного дробу $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ виконуються наступні співвідношення:

- 1) $q_{n+1} > q_{n-1}$, $q_{n+1} > \frac{1}{2} q_n$;
- 2) якщо $a_n = \frac{1}{2}$ для будь-якого $n \in N$, то $q_1 > q_0$, $q_3 < q_2$, але $q_{n+1} > q_n$ при $n \geq 3$;
- 3) якщо $q_{n+1} < q_n$, то $q_{n+2} > q_{n+1}$ і $q_{n+2} > q_n > q_{n+1} > q_{n-1}$;
- 4) якщо $a_n = 1$ і $a_{n+1} = \frac{1}{2}$ для деякого $n \in N$, то $q_{n+1} - q_n = \frac{1}{2}(q_{n-1} - q_{n-2}) > 0$;
- 5) якщо $a_n = \frac{1}{2} = a_{n+1}$, то $q_{n+1} > q_n$, зокрема при $a_{n-1} = \frac{1}{2}$, $q_n > q_{n-1}$;
- 6) якщо $a_{k+1} = 1 = a_k$, то для всіх $n > k - 1$ $q_{k+n-1} > q_{k+n} \forall n \in N$;
- 7) якщо для деякого k виконується $q_{k-1} < q_k < q_{k+1}$, то для будь-якого $n > k + 1$ має місце $q_{n+1} > q_n$;
- 8) якщо $a_{k+1} = 1 = a_k$ або $a_{k+1} = a_k = a_{k-1} = \frac{1}{2}$ для деякого k , то $q_{n+1} > q_n$ для всіх $n > k$.

Дані нерівності дозволяють отримати наступні властивості послідовностей знаменників підхідних дробів:

➤ якщо $a_{2k-1} = 1$, $a_{2k} = \frac{1}{2}$ для будь-якого $k \in N$, то послідовність (q_n) є зростаючою, причому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_{2k-1}}{q_{2k}} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_{2k}}{q_{2k+1}} = \frac{1}{2};$$

➤ якщо $a_{2k-1} = \frac{1}{2}$, $a_{2k} = 1$ для будь-якого $k \in N$, то послідовності (q_{2k-1}) і (q_{2k}) є зростаючими, причому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_{2k-1}}{q_{2k}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_{2k}}{q_{2k+1}} = 1.$$

У доповіді пропонуються вичерпні результати дослідження поведінки послідовностей знаменників підхідних дробів та використання встановлених співвідношень для поглиблення метричної теорії ланцюгового A_2 -зображення чисел.

Література.

1. *Albeverio, S., Kulyba, Y., Pratsiovytyi, M. Torbin, G.* On singularity and fine spectral structure of random continued fractions. *Math. Nachr.*, 2015. № 288. – p. 1803–1813.
2. *Brown G.* Metrical theory for farey continued fractions // *Osaka J. Math.* – 1996. – Vol. 33.no. 2. – Pp. 951 – 970.
3. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* On Denjoy’s canonical continued fraction expansion // *Osaka J. Math.* – 40 (2003). – no. 1. – P. 235-244.
4. *Lehner J.* Semiregular continued fractions whose partial denominators are 1 or 2. The mathematical legacy of Wilhelm Maghus: droups, geometry and special functions (Brooklyn, NY, 1992) // *Contemp. Math.* – 1994. – 169. –P. 407-410.
5. *Levy P.* Theorie de l’addition des variables aleatoires. – Paris, 1937. – 327p.
6. *Pratsiovytyi M., Chuikov A.* Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2 -continued fraction representation of numbers // *Random Operators and Stochastic Equations*, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.
7. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements // *Random Oper. Stochastic Equations*, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
8. *Pratsiovytyi M.V., Makarchuk O.P., Chuikov A.S.* Approximation and estimates in the periodic representation of real numbers of the closed interval $[0;1]$ by A_2 -continued fractions. // *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. 2019. 1 (130). Pp. 71-83.
9. *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел // *Український математичний журнал.* – 2009. Том 61, № 4. – С.452-463.
10. *Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2 -дробом з незалежними елементами // *Теор. ймов. та мат. стат.* – 2009. – 81. – С. 139-154.
11. *Працьовитий М.В., Чуйков А.С., Кюрчев Д.В.* Ланцюгові A_3 -дроби: основи метричної теорії // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – 2017. – Т.14, № 4. – Київ: Інститут математики НАН України. 2017. С.97 – 110.
12. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – Москва: Наука, 1978. – 116с.

Звуження незвідних унітарних зображень групи $p(1,4)$ на підгрупу $p(1,3)$

Іван Юрик

Національний університет харчових технологій

Неоднорідна група $P(1,4)$ є узагальненням відомої групи Пуанкаре $P(1,3)$. Група $P(1,4)$ має такі інваріанти

$$P^2 = P_\mu^2 = P_0^2 - P_a^2 - P_4^2, \quad V_1^2 = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}^2, \quad V_2^2 = -\frac{1}{4} J_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma} P^\alpha J^{\beta\gamma}$$

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ породжується операторами $P_\mu, J_{\mu\nu}$, які задовільняють комутаційним співвідношенням

$$\begin{aligned} [P_{\mu\nu}, P_\nu] &= 0; \quad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha); \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta}). \end{aligned}$$

Генератори $P_\mu, J_{\mu\nu}$ в кінчному базисі $|\bar{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \chi\rangle$ мають вигляд

$$\begin{aligned} P_o = E &= \sqrt{p_0^2 + p_4 + \chi^2}; \quad P_k = p_k; \quad J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab} \\ J_{oa} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b + S_{a4} P_4}{E + \chi}, \quad J_{4a} = ip_a \frac{\partial}{\partial p_4} - ip_4 \frac{\partial}{\partial p_a} + S_{4a} \end{aligned} \quad (1)$$

де S_{kl} - матриці незвідного зображення $D(j, \tau)$ алгебри Лі групи $SO(4)$, $P_0^2 - P_k^2 = \chi^2$.

Оператори (1) визначені на просторі Гордінга $D \subset H$. Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо в D ввести топологію з системою норм $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, (\Delta + 1)^n \varphi_2)$, $\Delta = \sum_\mu P_\mu^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} J_{\mu\nu}^2$, то поповнення $H_1 \subset D$ по ній буде щільним в просторі H , ядерним і обгортуюча алгебра $E(P(1,4))$ є алгеброю неперервних операторів на H_1 .

Дійсно, оскільки групу $P(1,4)$ можна отримати стисненням групи $SO_0(1,5)$ в розумінні Іноню-Вігнера, то досить показати, що існує такий оператор X з $E(SO_0(1,5))$ для якого $X^* = X^{**}$ і X^{-1} - ядерний. Розглянемо оператор $A = (C + 1)^n$, де C - оператор Казіміра групи $SO_0(1,5)$ другого порядку. З теореми Нельсона випливає, що C і C^n суттєво самоспряжені, тому $A^* = A^{**}$. Легко показати, що A^{-1} - оператор Гільберта-Шміта, а оскільки квадрат такого оператора завжди суттєво самоспряжений оператор, то за X можна взяти оператор $(A^{-1})^2$. Отже, простір H_1 , ядерний.

Таким чином, з теореми випливає, що ядерна спектральна теорема може бути застосована і вектори $|\bar{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \chi\rangle$ належать простору $H_1^* (H_1 \subset H \subset H_1^*)$.

Базис незвідного зображення групи $P(1,4)$, в якому діагональні оператори квадрата маси $M^2 = P_0^2 - P_a^2$ і спіна $W^2 = W_0^2 - W_a^2$ і також оператори P_a, S_3 називається пуанкаре-базисом, який запишемо так $|\bar{p}, m, s, s_3; j, \tau, \chi\rangle$. Власні числа операторів M^2 і W^2 відповідають незвідним зображенням групи $P(1,3)$.

Наша задача полягає в тому, щоб визначити спектр можливих значень M^2 і W^2 , знайти явний вигляд операторів $J_{\mu\nu}, P_\mu$ в цьому базисі [1]. Маємо такий результат.

Теорема. Простір H унітарного незвідного зображення групи $P(1,4)$ з $m^2 > 0, P_0 > 0$, розкладається на підпростори, які відповідають унітарним незвідним зображенням підгрупи $P(1,3)$ з такими значеннями інваріантів M^2 і W^2 : $\chi \leq m^2 < \infty$, $|j - \tau| \leq S \leq |j + \tau|$, а оператори $J_{\mu\nu}, P_\mu$ в $P(1,3)$ - базисі мають вигляд

$$P_0 = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad P_a = p_a, \quad P_4 = \varepsilon_4 \sqrt{m^2 + \chi^2}, \quad \varepsilon_4 = \pm 1,$$

$$J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} P_b}{E + m},$$

$$J_{04} = -iE \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - \frac{\chi}{m} \frac{S_{4a} P_a}{m}, \quad \text{де } \{A, B\} \equiv AB + BA,$$

$$J_{4a} = ip_a \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i\varepsilon_4 m \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}} \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{\chi P_a S_{4b} P_b}{m^2 (E + m)} + \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}} \frac{S_{ab} P_b}{E + m} + \frac{\chi}{m} S_{4a}.$$

Зауваження. Якщо $\chi = 0$ ($p_4 \neq 0$), то оператори $J_{\mu\nu}, P_\mu$ мають вигляд

$$P_0 = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad m^2 = p_4^2, \quad J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad J_{04} = -iE \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\},$$

$$J_{4a} = \frac{i}{2} p_a \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i\varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{m^2}} \frac{\partial}{\partial p_a} - \varepsilon_4 \frac{S_{ab} P_b}{E + m}.$$

Література:

1. Никитин А.Г., Фуцич В.И., Юрик И.И. Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам. /ТМФ, **26**, №2, 1976. - С. 206-220.

Розподіл напружень навколо циклічно розташованих прямокутних отворів в нелінійно-пружній ортотропній циліндричній оболонці

Євген Сторожук, Володимир Максимюк,
Іван Чернишенко, Вікторія Корнієнко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Вступ. Циліндричні оболонки з прямокутними отворами є важливими структурними елементами ракет, літаків, вітрових турбін, посудин (резервуарів) тиску, морських споруд, тощо.

Більшість результатів з дослідження концентрації напружень в циліндричних оболонках, які ослаблені прямокутними отворами і знаходяться під дією статичних навантажень, отримано при розв'язанні лінійно-пружних задач.

Розв'язання фізично нелінійних крайових завдань з цієї проблеми пов'язане зі значними математичними труднощами і розглянуте в обмеженій кількості робіт. Майже всі результати в цих роботах отримані для ізотропних оболонок, виготовлених з металів або їх сплавів. Так, пружно-пластичний стан циліндричної оболонки з одним прямокутним отвором досліджено в роботі [1], а з двома та трьома – в [2]. І лише в роботі [3] наведені конкретні результати для нелінійно-пружної ортотропної циліндричної оболонки, ослабленої одним прямокутним отвором.

Постановка задачі і методика. Розглянемо тонку циліндричну оболонку радіуса R і товщини h , виготовлену з ортотропного композитного матеріалу (КМ) й ослаблену циклічно розташованими на напрямній однаковими прямокутними отворами (рис. 1). Віднесемо серединну поверхню оболонки (Σ) до криволінійної ортогональної системи координат (x, y) з початком в центрі одного з отворів, де x і y – довжини твірної та дуги на напрямній. По нормалі до серединної поверхні будемо відраховувати координату γ .

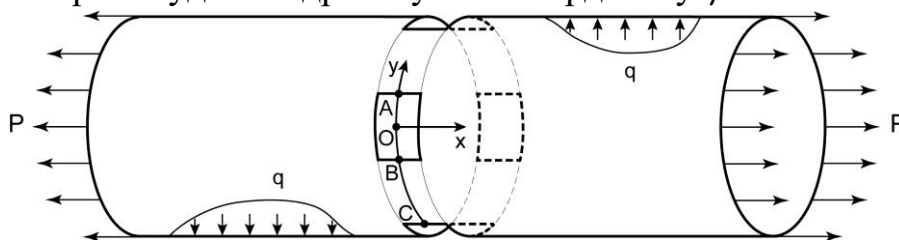


Рис. 1. Розрахункова схема циліндричної оболонки з циклічно розташованими прямокутними отворами

Вважаємо, що геометричні та механічні характеристики оболонки, способи її закріплення й навантаження такі, що для опису процесу деформування можна застосувати варіант теорії непологих оболонок, яка базується на гіпотезах Кірхгофа–Лява. Запишемо вирази для деформацій у векторній формі [3]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{e}_x; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{e}_y; & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{e}_y + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{e}_x; \\
\mu_{11} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \cdot \bar{e}_x; & \mu_{22} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \cdot \bar{e}_y; & 2\mu_{12} &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \cdot \bar{e}_y - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \cdot \bar{e}_x; \\
e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma \mu_{11}; & e_{22} &= \varepsilon_{22} + \gamma \mu_{22}; & e_{12} &= \varepsilon_{12} + 2\gamma \mu_{12},
\end{aligned} \tag{1}$$

де ε_{ij} і μ_{ij} – компоненти мембранної і згинної деформацій оболонки; $\bar{u} = u\bar{e}_x + v\bar{e}_y + w\bar{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні; $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат (x, y, γ) ; $\bar{\varphi} = \varphi_x \bar{e}_x + \varphi_y \bar{e}_y$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній, які визначаються за формулами:

$$\varphi_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{n}; \quad \varphi_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{n}. \tag{2}$$

Припускаючи, що навантаження просте, скористаємося нелінійними фізичними співвідношеннями деформаційної теорії пластичності анізотропних середовищ, у якій прийнята умова пластичності виду [3]:

$$f = \frac{1}{2} (q_{1111} \sigma_{11}^2 + q_{2222} \sigma_{22}^2 + 2q_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 4q_{1212} \sigma_{12}^2) = f_s. \tag{3}$$

Тут f_s – додатна матеріальна константа.

Також прийmemo, що матеріал зміцнюється тільки тоді, коли виконується робота пластичних деформацій

$$W_p = \int_0^{e_{11}^p} \sigma_{11} de_{11}^p + \int_0^{e_{22}^p} \sigma_{22} de_{22}^p + \int_0^{e_{12}^p} \sigma_{12} de_{12}^p, \tag{4}$$

тобто $f = f(W_p)$ та $W_p = W_p(f)$ при $f \geq f_s$.

Залежності між компонентами напружень і деформацій для плоского напруженого стану у випадку збігу напрямків ортотропії матеріалу з напрямками осей координат (x, y, γ) мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \left(\frac{1}{E_{11}} + \Psi q_{1111} \right) \sigma_{11} + \left(-\frac{\nu_{12}}{E_{22}} + \Psi q_{1122} \right) \sigma_{22}; \\
e_{22} &= \left(-\frac{\nu_{21}}{E_{11}} + \Psi q_{2211} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{E_{22}} + \Psi q_{2222} \right) \sigma_{22}; \\
e_{12} &= \left(\frac{1}{G_{12}} + 4\Psi q_{1212} \right) \sigma_{12},
\end{aligned} \tag{5}$$

де $E_{11}, E_{22}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$ – пружні сталі композита; $q_{1111}, q_{2222}, q_{1122}, q_{1212}$ – компоненти тензора, що враховує анізотропію нелінійних властивостей КМ;

$\Psi(f)$ – функція, яка описує нелінійне деформування матеріалу і обчислюється за формулою [3]:

$$\Psi = \frac{1}{2\sqrt{f}} \int_{f_s}^f \frac{W_p'}{\sqrt{f}} df. \quad (6)$$

Методика розв'язання фізично нелінійних крайових задач для композитних ортотропних циліндричних оболонок, ослаблених прямокутними отворами, базується на використанні методу додаткових напружень і методу скінченних елементів (МСЕ).

Реалізація методу додаткових напружень передбачає подання виразів для напружень у вигляді суми лінійних (σ_{ij}^0) і нелінійних (σ_{ij}^H) доданків:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^H; & \sigma_{22} &= \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^H; & \sigma_{12} &= \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^H; \\ \sigma_{11}^0 &= c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}; & \sigma_{22}^0 &= c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22}; & \sigma_{12}^0 &= c_{33}e_{12}; \\ \sigma_{11}^H &= \sigma_{11} - \sigma_{11}^0; & \sigma_{22}^H &= \sigma_{22} - \sigma_{22}^0; & \sigma_{12}^H &= \sigma_{12} - \sigma_{12}^0; \\ c_{11} &= \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; & c_{22} &= \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; & c_{21} &= c_{12} = \frac{E_{11}\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}; & c_{33} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для внутрішніх зусиль і моментів $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ з врахуванням рівностей (7) маємо вирази:

$$\begin{aligned} \{m\} &= \{m^0\} + \{m^H\}; & \{m^0\} &= [D]\{\varepsilon\}; \\ T_{ij}^H &= \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^H d\gamma; & M_{ij}^H &= \int_{h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^H \gamma d\gamma \quad (i, j = 1, 2), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$ – вектор компонентів мембранної та згинної деформації оболонки; $[D]$ – матриця жорсткостей оболонки, елементи якої обчислюються за формулами:

$$d_{kl} = c_{kl}h; \quad d_{3+k,l} = d_{k,3+l} = 0; \quad d_{3+k,3+l} = c_{kl}h^3/12 \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Систему розв'язувальних рівнянь отримаємо з варіаційного рівняння Лагранжа

$$\iint_{\Sigma} \delta\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} d\Sigma = \delta A_p - \iint_{\Sigma} \delta\{\varepsilon\}^T \{m^H\} d\Sigma. \quad (10)$$

Тут A_p – робота зовнішніх сил.

Вважаючи, що в рівнянні (10) нелінійні складові зусиль і моментів відомі з попереднього наближення і не варіюються, вихідну фізично нелінійну задачу методом додаткових напружень зводимо до послідовності лінійно-пружних задач. Фізичні співвідношення (5) є суттєво нелінійними й нерозв'язними аналітично відносно напружень. В кожному наближенні методу додаткових напружень при обчисленні нелінійних членів $\{m^H\}$ необхідно

чисельно виразити напруження через відомі деформації, використовуючи рівності (5).

Послідовність лінійно-пружних задач розв'язується модифікованим МСЕ. Особливість запропонованого варіанту МСЕ полягає в тому, що вектор кутів повороту $\vec{\varphi}$ не визначається за допомогою формул (2) для φ_x і φ_y , як це прийнято в традиційному МСЕ для тонких оболонок, а апроксимується біквдратичним поліномом серендипового типу з виконанням гіпотез Кірхгофа–Лява у вузлах скінченного елемента [3].

Застосовуючи МСЕ, з рівняння Лагранжа (10) одержимо систему алгебраїчних рівнянь, яка моделює нелінійно-пружне деформування композитної циліндричної оболонки, ослабленої прямокутними отворами:

$$[K]\{U\} = \{P\} - \{\Omega\}, \quad (11)$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки; $\{U\}$, $\{P\}$, $\{\Omega\}$ – глобальні вектори ступенів свободи, навантажень і нелінійностей.

Результати. З використанням розробленої чисельної методики розв'язані лінійні та фізично нелінійні задачі для циліндричної оболонки, виготовленої з ортотропного органопластика й ослабленої циклічно розташованими чотирма прямокутними отворами, при дії на торцях оболонки рівномірно розподілених розтягувальних зусиль. Досліджено вплив нелінійної пружності, геометричних і механічних параметрів на розподіл напружень навколо отворів.

Висновки. Таким чином, в роботі розроблено чисельну методику розв'язання двовимірних нелінійно-пружних задач статки для тонких циліндричних оболонок, виготовлених з композитних матеріалів і ослаблених циклічно розташованими прямокутними отворами. Побудована методика базується на використанні варіаційного рівняння Лагранжа, методу початкових напружень і модифікованого МСЕ. Виявлено закономірності осьового розтягу нелінійно-пружної ортотропної циліндричної оболонки з чотирма прямокутними отворами. Представляє подальший інтерес вивчення напружено-деформованого стану композитних оболонок з прямокутними отворами при сумісному врахуванні фізичної та геометричної нелінійностей.

Література

1. Демидов А.И. К вопросу о применимости теории малых упруго-пластических деформаций при расчете оболочек при неупругом поведении материала // Металлические конструкции. – 2014. – 20, № 4. – С. 221 – 234.
2. Hudramovich V.S., Hart E.L., Klimenko D.V., Rjabokon' S.A. Mutual influence of openings on strength of shell-type structures under plastic deformation // Strength of Materials. – 2013. – 45, N 1. – P. 1 – 9.
3. Storozhuk E. A., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I. S. Nonlinear Elastic State of a Composite Cylindrical Shell with a Rectangular Hole // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 5. – P. 504 – 514.

Застосування методу скінченних елементів при розрахунку напружено-деформованого стану в композитних оболонках

Іван Ластівка, Анатолій Богатирчук

Національний авіаційний університет

Композитні оболонки як елементи конструкцій широко використовуються в техніці, зокрема в хімічній, харчовій промисловості, в літакобудуванні та в інших галузях промисловості. В свою чергу, інтенсивне впровадження композитних матеріалів потребує розробки розрахункових моделей і методів, що враховують особливості структури і поведінки цих матеріалів.

Результатом дослідження є розроблений алгоритм знаходження напружено-деформованого стану в анізотропних оболонках різноманітної форми, виготовлених з композитного матеріалу, складена на алгоритмічній мові C++ програма для розрахунку напружено-деформованого стану, а також отримані конкретні числові результати.

Розглянемо напружений стан оболонки довільної форми із композитного матеріалу. Для такого класу задач приймається гіпотеза прямих ліній Тимошенка. Для розв'язку застосовуємо метод скінченних елементів. Віднесемо серединну поверхню оболонки до системи криволінійних ортогональних координат (α, β) . В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа [1].

$$\iint_{\Omega} \{ \delta V_0 - (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta w + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2) \} A_1 A_2 d\alpha d\beta - \int_{\Gamma_1} (T_u^0 \delta u_t + T_{us}^0 \delta u_s + T_w^0 \delta w + G_u^0 \delta \gamma_t + G_{us}^0 \delta \gamma_s) d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\delta V = T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \delta_{12} + G_1 \delta k_1 + G_2 \delta k_2 + 2H_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23},$$

де V_0 – питома енергія деформації; $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ – узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$U_1 = u_1(\alpha, \beta) + z\gamma_1(\alpha, \beta),$$

$$U_2 = u_2(\alpha, \beta) + z\gamma_2(\alpha, \beta), \quad (-h/2 \leq z \leq h/2), \quad W = w(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд [1]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + k_\alpha w, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) - 2k_{\alpha\beta} w,$$

$$\varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \delta(-k_\alpha u + k_{\alpha\beta} v), \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A \\ 2, \beta, B \end{pmatrix}, \quad 2\chi_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma_2}{B} \right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12}, \\ G_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ H_{12} &= D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}, \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}, \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут B_{ij} , D_{ij} , K_i – узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1) отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних u , v , w , γ_1 , γ_2 :

$$I(u, v, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0. \quad (5)$$

Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів [3]. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (x_1, x_2) таку, що $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{4}(1+x_{10})(1+x_{20})(x_{10}+x_{20}-1), \quad (i=1, 3, 5, 7); \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1-x_1^2)(1+x_{20}), \quad (i=2, 6); \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1+x_{10})(1-x_2^2), \quad (i=4, 8) \end{aligned} \quad (6)$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha^i \varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^8 \beta^i \varphi_i, \quad (7)$$

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^8 u_1^i \varphi_i, \dots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^8 \gamma_2^i \varphi_i. \quad (8)$$

Тут u_1^i, \dots, γ_2^i – шукані переміщення в i -му вузлі.

Підставивши співвідношення (6), (7), (8) в (5) отримуємо систему алгебраїчних рівнянь. Матриця симетрична і має стрічкову структуру. Ширина стрічки залежить від способу нумерації вузлів. Розбивка області оболонки на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь і її розв'язок виконуються на комп'ютері за допомогою програми, складеної на мові C++ [2].

Література

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами / О.М. Гузь, І.С. Чернишенко, В.М. Чехов та ін. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Давыдов В.Г. Технологии программирования. С++ / В.Г. Давыдов – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 672 с.
3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ./ О. Зенкевич, К. Морган—М.: Мир, 1986.—318 с.

Клас зображень ізометрій, що q_{ij} -комутують

Ольга Островська

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Василь Островський

Інститут математики НАН України

Данило Проскурін

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Юрій Самойленко

*Інститут математики НАН України***Вступ.**

C^* -алгебри, породжені ізометріями, досліджувались багатьма авторами. Серед чисельних прикладів відзначимо алгебри Тепліца, алгебри Кунца, та їх деформації. Ці приклади належать до класу $*$ -алгебр з віківським впорядкуванням [1].

Нагадаємо, що алгебра Кунца-Тепліца \mathcal{O}_d^0 — це унітальна C^* -алгебра, породжена твірними s_j , $j=1, \dots, d$, що задовольняють співвідношення

$$s_j s_k = \delta_{jk} I, \quad j, k = 1, \dots, d.$$

Ми вивчаємо зображення C^* -алгебри W_d , породженої твірними s_j , $j=1, \dots, d$ та співвідношеннями

$$s_i^* s_i = I, \quad s_i^* s_j = q_{ij} s_j s_i^*, \quad |q_{ij}| < 1, \quad q_{ij} = \bar{q}_{ji}, \quad 1 \leq i \neq j \leq d. \quad (1)$$

Відзначимо, що при $q_{ij} = 0$, $i \neq j$, ця алгебра перетворюється на \mathcal{O}_d^0 . В роботі [2] було висловлено гіпотезу, що, зокрема, при $|q_{ij}| < 1$, $i \neq j$, відповідна C^* -алгебра ізоморфна до \mathcal{O}_d^0 , проте доведення цього факту відоме лише у випадках $d=2$ [3] та $|q_{ij}| < \sqrt{2}-1$ [2]. Зображення алгебр Кунца-Тепліца вивчались у багатьох роботах, проте для деформованих віківських алгебр, включно з W_d , відоме лише зображення Фока [1]. Тому побудова зображень деформованих співвідношень (1) може виявитись корисним при побудові ізоморфізму між W_d та \mathcal{O}_d^0 у загальному випадку.

Попередні відомості.

Почнемо з деяких позначень. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \{1, \dots, d\}^m$ — скінченний мультиіндекс довжини m , $|\alpha| = m$, позначимо $\Lambda_m = \{1, \dots, d\}^m$ множину усіх скінченних мультиіндексів довжини m , $\Lambda_0 = \emptyset$, та позначимо $\Lambda^0 = \cup_{m=0}^{\infty} \Lambda_m$ множину усіх скінченних мультиіндексів довільної довжини. Також ми позначимо $\Lambda = \{1, \dots, d\}^{\infty}$ множину усіх нескінченних мультиіндексів. Для скінченного мультиіндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \Lambda^0$ ми використовуємо

позначення $s_\alpha = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_m}$. Для скінченних мультиіндексів ми використовуємо стандартні відображення:

$$\Lambda_m \ni \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \sigma(\alpha) = (\alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \Lambda_{m-1},$$

$$\Lambda_m \ni \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \sigma_j(\alpha) = (j, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \Lambda_{m+1}, \quad j=1, \dots, d.$$

Такі ж відображення очевидним чином визначені також для нескінченних мультиіндексів $\alpha \in \Lambda$.

Якщо $\alpha \in \Lambda^0$ не містить j , тоді з (1) випливає

$$s_j^* s_\alpha = q(j, \alpha) s_\alpha s_j^*, \quad q(j, \alpha) = q_{j\alpha_1} \dots q_{j\alpha_m}.$$

Якщо ж α містить j , тоді α можна представити у вигляді $\alpha = (\alpha' j \alpha'')$, де α' не містить j , тому

$$s_j^* s_\alpha = q(j, \alpha') s_{\alpha'} s_{\alpha''} = q(j, \alpha) s_{\alpha \setminus j}$$

(тут та надалі ми позначаємо $\alpha \setminus j = (\alpha' \alpha'')$ мультиіндекс, отриманий з α вилученням першого входження j , та для зручності позначаємо $q(j, \alpha) = q(j, \alpha')$).

Для нескінченних мультиіндексів $\alpha, \beta \in \Lambda$, означимо $q(\alpha, \beta)$ наступним чином. Якщо існує $\gamma \in \Lambda$, $\alpha', \beta' \in \Lambda_m$, $m \geq 0$, для якого

$$\alpha = (\alpha' \gamma), \beta = (\beta' \gamma), \quad \alpha \text{ та } \beta \text{ співпадають з точністю до перестановки,}$$

тоді $q(\alpha, \beta) = q(\alpha', \beta')$, в іншому разі визначаємо його нулем.

Безпосередньо перевіряється, що таке визначення $q(\alpha, \beta)$ є коректним.

Результати.

Побудуємо гільбертів простір, у якому діятиме зображення. Ми кажемо, що нескінченні мультиіндекси $\alpha, \beta \in \Lambda$ еквівалентні, $\beta \sim \alpha$, якщо вони “мають однакові хвости з точністю до зсуву”, тобто існують числа m, n , для яких $\sigma^m(\alpha) = \sigma^n(\beta)$. Зафіксуємо довільний нескінченний мультиіндекс α , та розглянемо сім'ю векторів $(e_\beta | \beta \sim \alpha)$. Для таких векторів визначимо їх скалярний добуток

$$(e_\beta, e_\gamma) = q(\beta, \gamma), \tag{2}$$

зокрема, маємо $(e_\beta, e_\beta) = 1$.

Твердження 1. Форма (2) коректно визначена та додатна на лінійній оболонці векторів $(e_\beta | \beta \sim \alpha)$.

Для вибраного $\alpha \in \Lambda$, визначимо гільбертів простір H_α як поповнення лінійної оболонки векторів $(e_\beta | \beta \sim \alpha)$ відносно введеного скалярного добутку.

Теорема 2. 1. Оператори в просторі H_α

$$\pi_\alpha(s_j) e_\beta = e_{\sigma_j(\beta)}, \quad \pi_\alpha(s_j^*) e_\beta = \begin{cases} 0, & i \text{ не містить } j, \\ q(j, \beta) e_{\beta \setminus j}, & i \text{ містить } j, \end{cases}$$

коректно визначені та утворюють *-зображення C^* -алгебри W_d .

2. Побудовне зображення незвідне.

3. Зображення, що відповідають мультиіндексам α, α' унітано еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні гільбертові простори співпадають, тобто $\alpha \sim \alpha'$.

Висновки.

В роботі побудовано новий клас незвідних наборів ізометрій, для яких виконуються умови q_{ij} -комутовання. Ці набори породжують зображення відповідної C^* -алгебри W_d , що є природною дейормацією алгебри Кунца-Тепліца.

Література.

- [1] P.E.T. Jørgensen, L.M. Schmitt, R.F. Werner. Positive representations of general commutation relations allowing Wick ordering. *J. Funct. Anal.* 134: 33--99, 1995.
- [2] P.E.T. Jørgensen, L.M. Schmitt, R.F. Werner. q -Canonical commutation relations and stability of the Cuntz algebra. *Pacific J. Math.* 165(1): 131--151, 1994.
- [3] P.E.T. Jørgensen, D.P. Proskurin, and Yu.S. Samoilenko. On C^* -algebras generated by pairs of q -commuting isometries. *J. Phys. A*, 38(12): 2669--2680, 2005.

УДК 517.537.6

Дослідження диференціальних рівнянь з використанням псевдоопуклих рядів Діріхле

Оксана Мулява

Національний університет харчових технологій

Микола Медведєв

Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського

Вступ. У 1923 році французький математик Ж. Валірон [1, с.18] показав,

що якщо ціла функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має порядок $\rho \in (0; \infty)$ і належить до

класу збіжності, тобто $\int_1^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, то

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty$. П. Камсен [2] узагальнив цей результат на випадок цілих (абсолютно збіжних в C) рядів Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp s \lambda_n, \quad s = \sigma + it,$$

з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками λ_n . Він показав, що якщо

$$0 < h \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq H < +\infty, \quad n \geq 0 \text{ і}$$

$$\kappa_n(F) \stackrel{def}{=} \frac{\ln|a_n| - \ln|a_n + 1|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \uparrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

то для того, щоб

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho\sigma} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty, \quad \text{де } M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in R\}$$

необхідно і достатньо, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty$

Ю.М. Галь і М.М. Шеремета [3] перенесли результат Камсена на ряди Діріхле, абсолютно збіжні в півплощині $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$.

Матеріали і методи. Використовуються методи теорії функції комплексної змінної, а саме застосування цілих рядів Діріхле (близьких до опуклих), абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ для дослідження та розв'язку диференціальних рівнянь.

Результати. Використовуючи критерій Александера, С.М. Шах [4] вказав умови на дійсні параметри $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ диференціального рівняння $z^2 w'' + zw' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$, за яких воно має такий цілий трансцендентний розв'язок g , що разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в $D = \{z : |z| < 1\}$ функціями.

Як в [5], через $SD(\Lambda_0)$ позначимо клас рядів Діріхле

$$F(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

з нульовою абсциссою абсолютної збіжності і заданною зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників $\Lambda = (\lambda_k)$. В [5] доведено, що якщо

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 f_2 \geq \dots \geq \lambda_k f_k \geq \dots, \quad (2)$$

то функція (1) до близькою до псевдоопуклої. Використовуючи це твердження, в [5] доведено також, що якщо $h > 0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 < 0$ і

$$|\gamma_1| \leq \frac{2\sqrt{|\gamma_2|} + h}{\sqrt{|\gamma_2|} + h} h \sqrt{|\gamma_2|}, \quad |\gamma_0| \leq \left(\frac{4h(\sqrt{|\gamma_2|} + h)^2}{\sqrt{|\gamma_2|} + 2h} - |\gamma_1| \right) \frac{|\gamma_1|}{h(2\sqrt{|\gamma_2|} + h)}, \quad \text{то}$$

диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + (\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2)w = 0$$

має цілий розв'язок (1) з показниками $\lambda_k = \sqrt{|\gamma_2|} + (k-1)h$ ($k \geq 1$), який є близький до псевдоопуклої функції в Π_0 .

Отримано відмінні від (2) достатні умови, за яких функція (1) буде близькою до псевдоопуклої і показано застосування отриманого результату до дослідження властивостей розв'язків диференціальних рівнянь.

Теорема 1. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geq 2$. Якщо $\lambda_k f_k / \lambda_1 \rightarrow q \leq 2$ при $k \rightarrow \infty$, то функція (1) є близькою до псевдоопуклої в Π_0 .

Теорема 2. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geq 2$. Якщо $\lambda_2 f_2 / \lambda_1 \geq 2$ і $(\lambda_{k+1} f_{k+1} - \lambda_k f_k) / \lambda_1 \rightarrow q \leq 2$ при $k \rightarrow \infty$, то функція (1) є близькою до псевдоопуклої в Π_0 .

Наступна теорема доповнює наведений раніше аналог критерію Александера і є певним аналогом теореми 2.

Теорема 3. Нехай $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \lambda_1$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geq 2$. Якщо $1 \leq \lambda_2 f_2 / \lambda_1 \leq 2$ і $\lambda_k f_k - \lambda_{k+1} f_{k+1} \rightarrow q \geq 0$ при $k \rightarrow \infty$, то функція (1) є близькою до псевдоопуклої в Π_0 .

Розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + (\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2) w = 0$$

дослідженого в [5], є цілий ряд Діріхле.

Тут ми зупинимося на рівнянні

$$(1 - e^{hs})^2 w'' - h(1 - e^{2hs}) w' + \gamma e^{2hs} = 0, \quad (3)$$

де $h > 0$ і $\gamma \in \mathbb{R}$, і знайдемо умови, за яких розв'язком цього рівняння є ряд Діріхле, який має нульову абсцису абсолютної збіжності і зображає близьку до псевдоопуклої в Π_0 функцію.

Теорема 4. Якщо або $-h^2 \leq \gamma \leq 0$, або $\gamma = h^2$, то диференціальне рівняння (3) має розв'язок (1) з показниками $\lambda_k = kh$ і абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$, який є близьким до псевдоопуклої в Π_0 функції.

Висновки. Для рядів Діріхле, абсолютно збіжних у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$, знайдено нові достатні умови близькості до псевдо опуклості і отриманий результат застосовано до дослідження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з експоненціальними коефіцієнтами.

Література:

1. Valiron С. General theory of integral functions.- Toulouse. 1923. – 382 p.
2. Kamthan P.K. A theorem of step functions. 11 // Istanbul univ. fen. fac. месm. A.-1963.-28.-P. 65-69.
3. Галь Ю.М., Шеремета М.М. Принадлежность аналитических функций классу сходимости // Докл. АН УССР, Сер. А. – 1985 - №7. – С.11-14.

4. Shah S.M. Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. anal. and appl.- 1989.- V. 142.- P. 422-430.

5. Головата О.М., Мулява О.М., Шеремета М.М. Псевдозіркові, псевдоопуклі і близькі до псевдоопуклих ряди Діріхле, які задовольняють диференціальні рівняння з експоненціальними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.- мех. поля.- 2018.- Т.61, №1.- С.57-70.

UDC 517.51

Analytic definition of one class of fractal functions by Engel series

Oleksandr Baranovskyi

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine

Mykola Pratsiovytyi

National Pedagogical Dragomanov University

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine

Introduction. Most of continuous on the unit interval functions have complicated local properties. In particular, singular functions (their derivative is equal to zero almost everywhere with respect to Lebesgue measure), nowhere monotonic functions (they do not have any arbitrary small monotonicity interval), and non-differentiable functions (they do not have derivative in any point) are among them.

There exist some methodological problems in development of general as well as individual theory of such functions. First of all the reason is an absence of effective means of their definition and tools for their study.

To model and study such functions we need fine tools and methods. Analytic expressions for these functions contain infinite amount of operations or limiting processes. In particular, infinite series, infinite products, continued fractions and other tools are often used to study classic nowhere differentiable functions or classic singular functions.

Recently systems of functional equations, iterated function systems, various system of representation of numbers (systems of encoding of numbers), and automata with finite memory (converters of digits from one representation to another) are used to this end.

Ideas of theory of fractals also can be effectively used to solve such problems.

Now there are exist several main directions in the study of local and global fractal properties of functions:

- 1) fractal characteristics of essential sets for function;
- 2) properties of level sets of function;
- 3) fractal properties of graphs;
- 4) preservation or transformation of fractal dimension by function.

Results. In the talk, we consider the infinite-parameter family of continuous functions with complicated local properties: singular (monotonic or non-monotonic), nowhere monotonic, non-differentiable or almost everywhere non-differentiable functions are among them. This talk is based on our paper [1].

To this end we use E -representation of real number, i.e., its encoding by infinite alphabet in the form of Engel series (positive series such that their terms are reciprocal to cumulative products of positive integers).

It is well known that for any number x belonging to $(0, 1]$ there exists a unique sequence (g_n) of non-negative integers such that number x can be expressed in the form of series whose general term is reciprocal to the product

$$(2 + g_1)(2 + g_1 + g_2) \dots (2 + g_1 + g_2 + \dots + g_n).$$

This series is called *Engel series*, representation of number x in this form is called its E -representation, and $g_n = g_n(x)$ is n th symbol of this representation.

Let us remark that E -representation of a number is its encoding by infinite alphabet $\mathbf{Z}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Let (u_n) be an infinite sequence of real numbers with the following properties:

- 1) sum of series with general term u_n is equal to 1;
- 2) absolute value of u_n is less than 1 for any n belonging to alphabet \mathbf{Z}_0 ;
- 3) remainder r_n of this series belongs to interval $(0, 1)$.

In the talk, we study the function f defined in the following form. Suppose that number x belonging to $(0, 1]$ is given by its E -representation with symbols $g_n = g_n(x)$. Then the value of the function $y = f(x)$ is defined by a series whose general term is a specific product of terms of above-mentioned sequence (u_n) .

We study local and global properties of function f : structural, extremal, differential, integral, and fractal properties.

Related papers. Similar object related to representation of numbers with finite alphabet and self-similar geometry (s -adic representation, Q -representation) was studied in papers [2, 3]. But E -representation has an infinite alphabet and non-self-similar geometry. So some metric and probabilistic problems are essentially complicated for E -representation than for self-similar and N -self-similar representations. In these papers, they found expression (not only estimation) for integral of function in terms of parameters of initial system of functional equations and described conditions for non-differentiability of function.

In the paper [4] we studied continuous functions such that they are solutions of infinite system of functional equations with countable set of parameters related to representation of real numbers by the first Ostrogradsky series.

References. [1] *Baranovskyi O., Pratsiovytyi M.* One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series // Manuscript.

[2] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Тр. Ін-та прикл. математики и механіки НАН України. — 2011. — Т. 23. — С. 180–191.

[3] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q -зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 3. — С. 405–417.

[4] *Albeverio S., Baranovskyi O., Kondratiev Yu., Pratsiovytyi M.* On one class of functions related to Ostrogradsky series and containing singular and nowhere monotonic functions // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — № 15. — С. 24–41.

Оператори умовної симетрії для нелінійного рівняння реакції – дифузії

Тетяна Баранник

Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г.Короленка

Розглядається таке рівняння:

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (1)$$

де $u = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$f(u)$ - деяка фіксована функція від незалежної змінної u .

Під класичною симетрією [1] рівняння (1) ми розуміємо існування групи перевічених перетворень для залежних і незалежних змінних, що зберігають його форму. Умовна симетрія [2] означає існування такої групи при умові, що u задовольняє і деяка додаткове рівняння. Оскільки рівняння (1) симетричне відносно групи обертань $O(n)$, то рівняння (1) редукується до рівняння:

$$u_t - u_{xx} - \frac{n-1}{x} u_x = f(u) \quad (2)$$

Оператор умовної симетрії даного рівняння шукаємо у вигляді:

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + (-\pi u + \omega) \frac{\partial}{\partial u},$$

де

$$\xi = \xi(t; x),$$

$$\pi = \pi(t; x),$$

$$\omega = \omega(t; x).$$

Цей оператор є генератором умовної симетрії рівняння (2), якщо це рівняння сумісне з умовою $Xu = 0$.

Нехай

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \pi,$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{n-1}{x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Функції ξ, π будемо визначити з умови:

$$[Q, L] = \Lambda L + \varphi + \theta Q, \quad (3)$$

де Λ, φ, θ - функції від t і x .

У результаті нескладних обчислень комутатора $[Q, L]$, який допускає зображення (3), одержимо наступну систему рівнянь для визначення функцій $\Lambda, \varphi, \theta, \xi, \pi$:

$$2 \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\Lambda, \quad \Lambda + \theta = 0$$

$$\xi \frac{n-1}{x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{n-1}{x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \theta \xi - \frac{n-1}{x} \Lambda$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{n-1}{x} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x} = \theta \pi + \varphi.$$

Доведемо таке твердження. Оператор

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \xi \frac{\partial}{\partial x} - \pi u \frac{\partial}{\partial u}$$

є оператором умовної симетрії рівняння (2) у випадку $f(u) = \pm u^k + C_2 u$.

Якщо $\pi(x) = -\frac{2\xi x}{1-k}$, а функція $\xi = \xi(x)$ є розв'язком системи:

$$\begin{cases} \frac{n-1}{x} \xi + \xi^2 + \frac{3+k}{1-k} \xi_x = C_1 \\ \frac{n-1}{x} \xi_{xx} + \xi_{xxx} - 2\xi_x^2 + C_2(1-k)\xi_x = 0 \end{cases}$$

Нехай $n=5, f(u) = -u^{1/3}$. Тоді рівняння (2) має вигляд:

$$u_t - u_{xx} - \frac{u}{x} u_x = -u^{1/3} \quad (4)$$

Це рівняння допускає оператор умовної симетрії:

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{x^2} u \frac{\partial}{\partial u},$$

якому відповідає підстановки: $u = \frac{1}{x^3} \omega(z), z = \frac{x^2}{2} - t$,

що редукує рівняння (4) до рівняння:

$$\omega'' - \omega^{1/3} = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) є рівняння Емдена-Фаулера і його частинний розв'язок має вигляд: $\omega = \frac{\sqrt{6}}{36} z^3$. Тому знаходимо розв'язок рівняння (4):

$$u = \frac{\sqrt{6}}{36} \left(\frac{(x_1^2 + \dots + x_5^2)^{3/2}}{8} - \frac{3}{4} (x_1^2 + \dots + x_5^2)^{1/2} t + \frac{3}{2} \frac{t^2}{(x_1^2 + \dots + x_5^2)^{1/2}} - \frac{t^3}{(x_1^2 + \dots + x_5^2)^{3/2}} \right)$$

Нехай $n=3, f(u) = \pm u^{-1}$. Тоді маємо рівняння

$$u_t - u_{xx} - \frac{2}{x} u_x = \pm u^{-1} \quad (6)$$

це рівняння допускає оператор умовної симетрії

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \left(k' - \frac{1}{x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2} u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Якщо $k' = 0$, то підстановка $u = \frac{1}{x} \omega(z), z = \frac{x^2}{2} + t$

редукує рівняння (6) до рівняння $\omega'' \pm \omega^{-1} = 0$ б загальний розв'язок якого буде $z = \int (\pm 2 \ln \omega + C_1)^{-1/2} d\omega + C_2$

Таким чином, встановлено, що для нелінійного рівняння реакції – дифузії існують оператори умовної симетрії, при чому ці оператори знайдені у явному виді. А це в свою чергу дало можливість побудувати нові точки розв'язки.

Література

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных. – М: Наука, 1978. – 400 с.
2. Фушич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр.мат.журн.- 1991. №11. – с.1456 – 1470.

Математичне моделювання, як один із пріоритетних методів для розв'язання інженерних задач

Оксана Білаш

*Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного*

Вступ. Математичне моделювання – це один із найважливіших методів математики, який використовуються для розв'язання інженерних задач, тому кожний інженер повинен бути обізнаним із ним. Математичне моделювання – це вид моделювання, який ставить у відповідність модельованому фізичному процесу систему математичних співвідношень, розв'язання якої дає можливість дізнатися про ймовірну поведінку об'єкту без його створення. Математична модель – це сукупність математичних співвідношень, нерівностей, рівнянь, що описують основні закономірності, які характерні для досліджуваної системи, об'єкту чи процесу, при цьому використовують фундаментальні закони математики.

Математичне моделювання здійснюється за допомогою різноманітних математичних пакетів, які дають можливість легше провести моделювання систем та об'єктів. Математичні дослідження та розрахунки здійснюють використовуючи пакети Mathematica, Maple, Mathcad, моделювання систем управління та електротехнічних систем – VisSim, моделювання електронних пристроїв – EWB. Однак, найбільше використовують програмний пакет MATLAB, який складається з багатьох спеціалізованих за окремими напрямками чи галузями програмних пакетів.

Матеріали і методи. В процесі дослідження нами було використано теоретичні методи, зокрема було проаналізовано наукові джерела в галузі математичного моделювання для розв'язання інженерних задач та методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали.

Результати. Математичне моделювання найчастіше реалізується за допомогою комп'ютерних технологій. На сьогодні існує велика кількість програм, які дають можливість дослідити об'єкт без його створення. За допомогою математичного моделювання, маючи задані граничні значення та функцію, яка виражає залежність між вхідними параметрами можна отримати кількісні та якісні показники майбутнього об'єкта без його створення.

В інженерній практиці дуже часто використовуються балочні елементи конструкцій. Під час експлуатації чи при їх виготовленні в них можуть виникнути тріщини, які є сильними концентраторами напружень, що значно зменшує надійність їх роботи, тому важливо наперед оцінити граничне навантаження, яке вони можуть витримати з такими дефектами.

В даній роботі досліджена задача згину консольної балки зосередженою силою, прикладеною до її кінця і перпендикулярно до осі балки, за наявності прямолінійної наскрізної тріщини, перпендикулярної до її осі і є несиметрично розміщеною по відношенню до осі балки за допомогою програми Maple. В цьому випадку береги тріщини, в залежності де вона розміщена можуть

повністю або зовсім не контактувати, частково контактувати. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, визначено коефіцієнти інтенсивності напружень, на основі енергетичного критерію знайдено критичне значення сили, при якому балка почне руйнуватися.

В результаті проведеного дослідження було досліджено три випадки. Для першого випадку визначено, що коли береги тріщини не контактують руйнування балки починається з дальньої вершини тріщини, а критична сила зменшується з ростом довжини тріщини. Окрім того, при фіксованій довжині тріщини із віддаленням центру тріщини від осі балки критична сила руйнування балки зменшується. Для випадку, коли береги тріщини частково контактують руйнування балки починається з неконтактуючої вершини і з ростом довжини тріщини критична сила зменшується. Окрім того, з віддаленням неконтактуючої вершини тріщини від осі балки критична сила руйнування балки зменшується.

Для третього випадку, коли досліджувалася повністю контактуюча тріщина було виявлено, що руйнування балки починається з вершини, яка знаходиться ближче до осі балки.

Висновки. Отже, одним із пріоритетних математичних методів є математичне моделювання, яке застосовують для вивчення вихідних об'єктів тоді, коли безпосереднє їх вивчення є неможливе або недоцільне. Існує багато математичних моделей і програмних засобів, що використовуються в інженерії. В результаті розв'язування досліджуваної задачі для неконтактуючої тріщини можна зробити такі висновки: руйнування починається із вершини в зоні розтягуючи напружень, яка найбільш віддалена від осі балки; критична сила руйнування балки зменшується з ростом довжини тріщини та при віддаленні центру тріщини від осі балки. Для консольної балки повністю контактуюча тріщина змінює її напружено-деформований стан на відміну від чистого згину балки з тонкою тріщиною. Основними причинами створення моделей є: підтвердження або спростування різних теорій і гіпотез; економія часу і мінімізація витрат на створення моделі; виявлення залежностей між різними параметрами моделі, характеру їх взаємодії в часі і просторі, знаходження оптимальних співвідношень цих параметрів.

Література

1. Одінцева О. О. Особливості створення математичних моделей задач, що вивчаються в лінійному програмуванні / О. О. Одінцева // Фізико-математична освіта. – 2016. – Vol. 1 (7). – С. 105-113.
2. Delyavskyy M. V. [Bending by Concentrated Force of a Cantilever Strip Having a Through-thickness Crack Perpendicular to Its Axis](#) / M. V. Delyavskyy, V. K. Opanasovych, O. V. Bilash // Applied Sciences . – 2020. – Vol. 10 (6), 2037.

Апроксимаційний метод розв'язування нелінійного диференціального рівняння Абеля

Катерина Божонок

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ. В роботі побудований алгоритм апроксимації многочленами розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння Абеля [1]. Цей алгоритм ґрунтується на а-методі В.К. Дзядика [2, С. 121] із врахуванням нелінійності розглянутого рівняння. Рівняння Абеля є проміжним результатом розв'язування багатьох задач у різних галузях науки, зокрема у мікроскопії, сейсмології, радіоастрономії, радарної радіотехніки, плазмової діагностики. До рівняння Абеля приводять задачі нелінійної оптики при описі надвипромінювальної лавини, теорії пружності, нелінійної дифузії, в нелінійній хвильовій теорії.

Постановка задачі. Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння Абеля 1-го роду виду

$$a(x)y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y^2(x) + d(x)y^3(x) + f(x),$$

де $x \in [-h; h]$,

$$y(x_0) = y_0,$$

де $a(x), b(x), c(x), f(x)$ – алгебраїчні многочлени степенів n_a, n_b, n_c, n_d, n_f відповідно.

Алгоритм. Запишемо загальну схему побудови многочленів:

1. У відповідності до схеми а-методу розв'язування рівняння Ріккати, що була побудована в [3-4], перейдемо від задачі (1)-(2) до еквівалентного рівняння типу Вольтери:

$$a(x)y(x) = a(0)y_0 + \int_0^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y(t) + d(t)y^2(t)) \cdot y(t) + f(t)] dt$$

2. Тепер поставимо у відповідність рівнянню (3) наступне наближене рівняння:

$$a(x)y_n(x) = a(0)y_0 + \int_0^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)) \cdot y_n(t) + f(t)] dt - \varepsilon_N(x),$$

У (4) $y_n(x)$ є наближений розв'язок, що шукається у вигляді алгебраїчного многочлену степеня n :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k,$$

з невідомими коефіцієнтами c_k .

За нев'язку $\varepsilon_N(x)$ беремо многочлен степеня $n + N$ виду:

$$\varepsilon_N(x) = \sum_{i=1}^N \tau_{n+i} T_{n+i} \left(\frac{x}{h} \right), \quad (6)$$

де

N підбирається яктах $(n_a, n_b + 1, n_c + n + 1, n_d + 2n + 1, n_f + 1 - n)$.

Тут $T_k(t) = \cos k \cdot \arccost$ – многочлени Чебишова першого роду, τ_{n+i} – невідомі додаткові параметри.

3. Далі, підставляючи (5)-(6) в (4) і прирівнюючи коефіцієнти при степенях x , отримуємо систему нелінійних рівнянь з якої знаходимо невідомі c_k ($k = \overline{0, n}$) та допоміжні параметри τ_{n+i} ($i = \overline{1, N}$). Для знаходження відповідних параметрів можна запропонувати ітераційні схеми розв'язання рівняння (4), в основу яких покладено метод простої ітерації і схеми із роботи Орліца (див. [5]) для τ –методу розв'язування на нелінійних диференціальних рівняннях типу Ріккати.

Теоретичне обґрунтування. Тепер займемось теоретичним обґрунтуванням побудованого алгоритму. Введемо деякі позначення.

Вважаючи, що

$$\min_{x \in [-h; h]} a(x) \geq c > 0 \quad (7)$$

та розділивши праву і ліву частини (3) на $a(x)$, позначимо:

$$A(x, t) := [a'(t) + b(t)]/a(x), \quad (8)$$

$$B(x, t) := \frac{c(t)}{a(x)}, \quad D(x, t) := \frac{d(t)}{a(x)}.$$

Відхилення наближеного розв'язку $y_n(x)$ від точного розв'язку $y(x)$ задачі (1)-(2) будемо розглядати в $C[-h; h]$ і $L_p^2[-h; h]$ просторах неперервних і сумовних з квадратом при чебишовській вазі $\sqrt{1 - (x/h)^2}$ на $[-h, h]$ функцій.

Має місце наступна теорема щодо оцінок похибок запропонованого методу:

Теорема 1. Нехай число $h > 0$ і для рівняння (4) число n ($n = 1, 2, \dots$) такі, що у кулі $S(\rho) := \{\psi: \psi \in C[-h, h], \|\psi\|_c \leq \rho\}$ існує єдиний розв'язок задачі (1)-(2) $y(x)$ і єдиний розв'язок наближеного інтегрального рівняння (4) $y_n(x)$.

Тоді на $[-h, h]$ справедливі наступні нерівності:

$$\|y(x) - y_n(x)\|_c \leq \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_c e^{hM}, \quad (9)$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_{L_p^2} \leq \left(1 + \frac{\pi}{2} h M e^{hM} \right) \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2}, \quad (10)$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_c \leq \left(1 + \frac{\sqrt{N}}{n+1} A_1(h, \rho) \right) \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_c, \quad (11)$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_{L_p^2} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{N}}{n+1} A_2(h, \rho)\right) \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_{L_p^2}, \quad (12)$$

де

$$M := \|A(x, t)\|_{C(\square)} + 2\|B(x, t)\|_{C(\square)}\rho + 3\|D(x, t)\|_{C(\square)} \cdot \rho^2, \quad (13)$$

$A_1(h, \rho), A_2(h, \rho)$ – деякі сталі, що не залежать від n , $C(\square)$ – простір неперервних функцій $F(x, t)$, де $x, t \in [-h, h]$.

Зауваження. Слід зазначити, що з нерівностей (11) і (12) випливає той факт, що наближення $y_n(x)$ розв'язку $y(x)$ близьке до найкращого $E_n(y)$ в $C[-h; h]$ і $L_p^2[-h; h]$.

Обчислювальний експеримент. Теоретично прогнозовані властивості алгоритму були проілюстровані на наступному прикладі:

Нехай задана задача Коші для рівняння Абеля. Для рівняння

$$xy'(x) = x^3y^3 + (x-1)y, \quad x \in [1; 6/5] \quad (14)$$

задана початкова умова

$$y(1) = 0. \quad (15)$$

Точним розв'язком задачі (14)-(15) буде

$$\frac{yx}{\sqrt{y^2x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^x.$$

Наближений розв'язок на $[1; 6/5]$ будемо шукати у вигляді полінома $y_1(x) = c_0 + c_1x$.

Після реалізації алгоритму і проведення відповідних ітераційних процедур, маємо такі результати:

$$y_1(x) = -1.332297291 + 2.290918678x$$

– наближений розв'язок задачі (14)-(15) (див. Рис. 1).

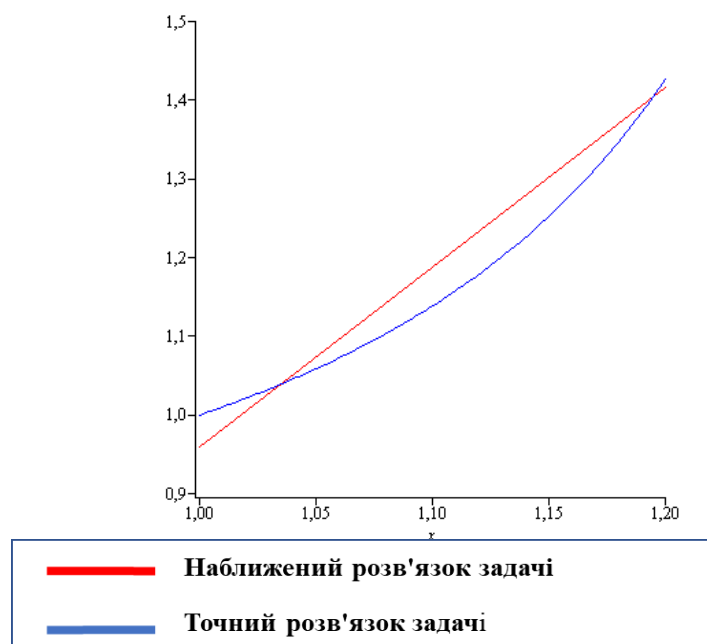


Рис. 1

Висновки. Таким чином, результати обчислювального експерименту дають підстави зробити висновок про можливість запропонованого алгоритму добре доповнити існуючі чисельні методи розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння Абеля.

При цьому ми отримуємо наближений розв'язок в аналітичному вигляді, який, насправді, буде близький до найкращого наближення в рівномірній метриці.

Література.

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В. К. Дзядык. – Киев : Наук. думка, 1988. – 304с.
3. Біленко В.І. Кусково-поліноміальні наближення розв'язків імпульсних диференціальних рівнянь / В.І. Біленко, К.В. Боженок, С.Ю. Дзядик // Укр. мат. журнал. – 2019. – Т.71, № 2. – С. 168-178.
4. Bilenko V.I. Piecewise polynomial algorithms for the analysis of processes in inhomogeneous media / Bilenko V.I., Bozhonok K.V., Dzyadyk S.Yu., and Stelya O.B. // Cybern. Syst. Analysis. – 2018. – Vol.54, N.4. – P. 636-642.
5. Ortiz E.L. On the convergence of the tau method for nonlinear differential equations of Riccati's type / E.L. Ortiz, Ngoc Dinh A. Pham // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. – 1985. – 9, № 1. – P.53-60.

УДК 378:33:519.86

Застосування балансових моделей типу «витрати-випуск» для моделювання наслідків імпульсних скорочень обсягів виробництва окремих галузей економіки України

Яніна Гончаренко, Валентина Мороз

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ. Математична компетентність – одна з найважливіших складових підготовки фахівців економічних спеціальностей. Ключовим результатом математичної підготовки має бути формування у майбутніх економістів вміння будувати і досліджувати математичні моделі економічних явищ і процесів. При цьому важливо, щоб задачі, що розв'язуються засобами математичного моделювання, були максимально наближеними до реальності.

В даній роботі розглядається задача математичного моделювання непрогнозованих імпульсних скорочень обсягів виробництва окремих галузей економіки України, які можуть відбуватись внаслідок крзових ситуацій, в тому числі в умовах військового стану.

Дана задача, її частинні випадки або модифікації може бути запропонована студентам та магістрантам економічних спеціальностей як дослідницьке завдання або завдання для проектної діяльності.

Матеріали і методи. В даній роботі розглянемо як зміняться обсяги товарної продукції за умови імпульсних зменшень обсягів галузевих виробництв. Для цього розглянемо такі галузі, як: «Сільське, лісове та рибне господарство», «Добування сирової нафти та природного газу», «Добування металевих руд, інших корисних копалин», «Виробництво харчових продуктів; напоїв та тютюнових виробів», «Виробництво продуктів нафтоперероблення», «Виробництво хімічних речовин і хімічної продукції», «Металургійне виробництво», «Виробництво комп'ютерів, електронної та оптичної продукції», «Виробництво автотранспортних засобів», «Виробництво інших транспортних засобів», «Будівництво», «Оптова та роздрібна торгівля; ремонт автотранспортних засобів і мотоциклів», «Транспорт, складське господарство», «Комп'ютерне програмування, консультування та надання інформаційних послуг», «Наукові дослідження та розробки», «Державне управління й оборона; обов'язкове соціальне страхування», «Освіта», «Охорона здоров'я та надання соціальної допомоги», «Мистецтво, спорт, розваги та відпочинок».

Для обраних галузей було проаналізовано статистичні дані типу «витрати-випуск» для показників проміжного споживання, ВВП, а також обсягів товарної продукції.

Результати. З статистичних даних [1] ми отримали дані, які представимо у вигляді матриці $\|x_{ij}\|$ – внутрішнього товарообігу, де x_{ij} – кількість продукції i -ої галузі (в грошовому еквіваленті), яка використовується j -ю галуззю (млн. грн.), x_i – загальний обсяг продукції i -ої галузі (млн. грн.), y_i – товарна продукція (млн. грн.).

За умови збалансованості товарообігу має виконуватися умова

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \text{ для } \forall i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

На основі даних отриманої таблиці розраховуємо коефіцієнти повних витрат a_{ij} за формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \quad (2)$$

Отримаємо матрицю коефіцієнтів повних витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, 0 \leq a_{ij} < 1.$$

В дослідженні ми припускали, що матриця коефіцієнтів повних витрат в поточному періоді (2022 р.) співпадатиме (не відрізнятиметься суттєво) з матрицею A , розрахованою на основі даних 2020 р. Це можна пояснити тим, що хоча абсолютні значення досліджуваних економічних показників щороку змінюються, але структура проміжного споживання та товарної продукції є стійкою, оскільки за період 2020-2021 рр. економіка України не зазнала суттєвих реформ, значних криз та суттєвого зростання іноземних інвестицій.

Виконаємо перетворення формули (1) використовуючи рівність (2). Отримаємо: $x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i$, для $\forall i = \overline{1, n}$.

Якщо умова (2) виконується для всіх галузей, то ми отримаємо систему лінійних рівнянь. Цю систему ми можемо записати у матричній формі

$$X = A \cdot X + Y, \quad (3)$$

де X – обсяги виробництва галузі, Y – обсяги товарної продукції, A – матриця коефіцієнтів повних витрат. Систему (3) можемо записати в наступному вигляді:

$$(E - A) \cdot X = Y. \quad (4)$$

Ця система рівнянь дозволяє, використовуючи коефіцієнти прямих витрат, за відомими або прогнозованими значеннями X розраховувати Y , або за бажаними значеннями товарної продукції Y знайти значення обсягів виробництва X , що нам потрібні для цього.

Для визначення обсягів виробництва для забезпечення бажаного рівня товарної продукції систему (4) можемо переписати в наступному вигляді:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \quad (5)$$

Провівши допоміжні розрахунки застосувавши формули (4) та (5) було обчислено матриці $(E - A)$ та $(E - A)^{-1}$.

Розглянемо наступну ситуацію: загальні обсяги виробництва (внутрішнє споживання + товарна продукція) для деяких галузей, насамперед виробничих, зазнають непрогнозованих скорочень. В моделі ми розглядали випадки скорочень на 10%, 25% та 50% для наступних галузей: «Сільське, лісове та рибне господарство», «Добування сирової нафти та природного газу», «Добування металевих руд, інших корисних копалин та розроблення кар'єрів», «Виробництво харчових продуктів; напоїв та тютюнових виробів», «Виробництво продуктів нафтоперероблення», «Виробництво хімічних речовин і хімічної продукції», «Металургійне виробництво», «Виробництво комп'ютерів, електронної та оптичної продукції», «Виробництво автотранспортних засобів, причепів і напівпричепів», «Виробництво інших транспортних засобів», «Будівництво», «Оптова та роздрібна торгівля; ремонт автотранспортних засобів і мотоциклів», «Транспорт, складське господарство».

Дослідимо як зміняться обсяги товарної продукції в усіх досліджуваних галузях. Обчислення проведемо за формулою (4).

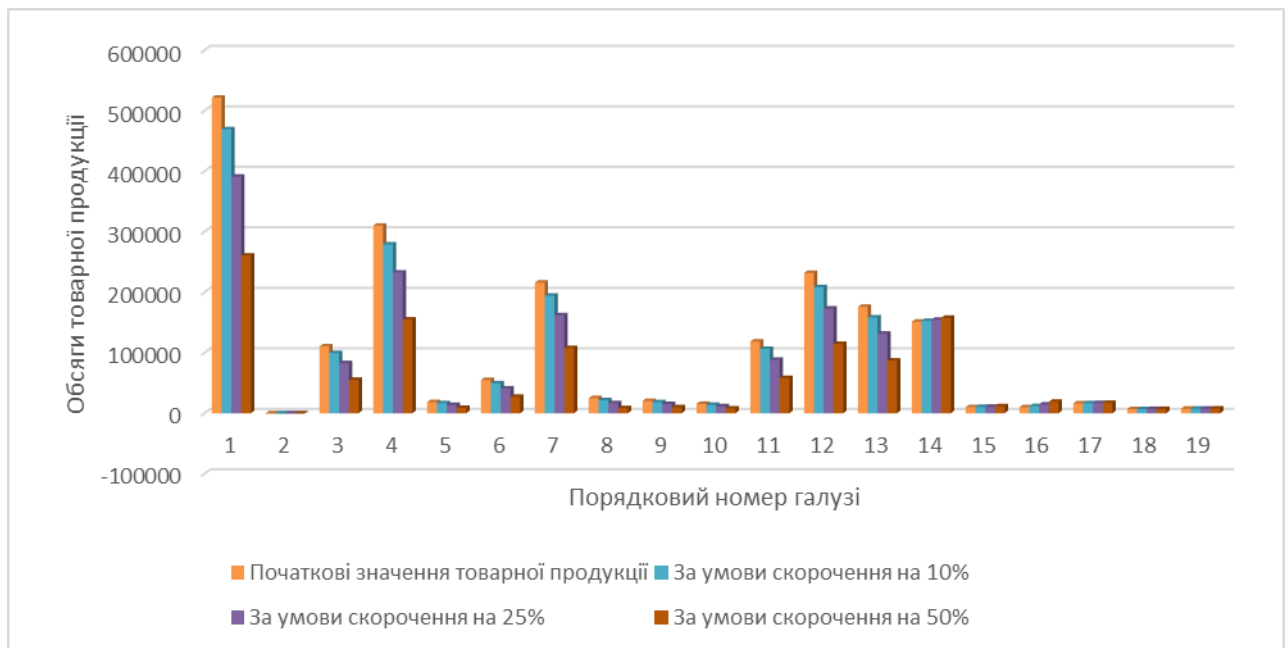


Рис. 1. Обсяги товарної продукції за умов скорочення обсягів виробництва окремих галузей на 10%, 25% та 50 %.

На основі отриманих результатів можемо зробити висновки:

1) Для деяких галузей, а саме «Сільське, лісове та рибне господарство», «Добування металевих руд, інших корисних копалин та розроблення кар'єрів», «Виробництво харчових продуктів; напоїв та тютюнових виробів», «Виробництво хімічних речовин і хімічної продукції», «Металургійне виробництво», «Виробництво автотранспортних засобів, причепів і напівпричепів», «Виробництво інших транспортних засобів», «Будівництво», «Оптова та роздрібна торгівля», «Транспорт, складське господарство» скорочення товарної продукції відбувається на величину близьку до скорочення загальних обсягів виробництва.

2) Для галузі «Добування сирої нафти та природного газу» обсяги товарної продукції скорочуються повільніше ніж обсяги виробництва, але зауважимо, що дана галузь для випадку збалансованої моделі міжгалузевих зв'язків мала би дефіцит товарної продукції, тобто обсягів виробництва цієї галузі недостатньо навіть для покриття міжгалузевих витрат.

3) В галузях «Виробництво продуктів нафтоперероблення» і «Виробництво комп'ютерів, електронної та оптичної продукції» швидкість скорочення товарної продукції вища ніж зменшення загальних обсягів виробництва, це свідчить про те, що дані галузі дуже залежні від інших суміжних галузей, тобто крім власного скорочення на них впливають зміни обсягів виробництва інших галузей.

4) В невиробничих галузях, для яких не моделювалося скорочення, відбувається зростання обсягів товарної продукції, причому це зростання для більшості з них несуттєве крім галузі «Державне управління й оборона; обов'язкове соціальне страхування». Цей ефект можна пояснити тим, що нами моделювався кризовий процес, для виходу з якого необхідно застосовувати соціальні, оборонні або управлінські важелі.

Тепер припустимо, що обсяги продукції галузей «Добування сирової нафти та природного газу», «Добування металевих руд, інших корисних копалин та розроблення кар'єрів», «Виробництво продуктів нафтоперероблення», «Виробництво хімічних речовин і хімічної продукції», «Металургійне виробництво» імпульсно зменшилися, наприклад на 10%. Визначимо чи можна за рахунок інших галузей економіки України компенсувати зменшення падіння обсягів товарної продукції в грошовому еквіваленті.

Для цього розглянемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат для галузей, які не зазнали зменшення обсягів. Обчислимо для неї матриці $E - A$ та $(E - A)^{-1}$, і за формулою (5) визначимо загальні обсяги виробництва.

Отримали такі результати: при скороченні обсягів виробництва обраних 5 виробничих галузей України можливо зберегти обсяги товарної продукції, але для цього доведеться зменшити обсяги внутрішнього споживання для всіх галузей. Найбільше скорочення обсягів відбудеться в таких галузях як «Оптова та роздрібна торгівля; ремонт автотранспортних засобів і мотоциклів», «Транспорт та складське господарство», «Державне управління й оборона; обов'язкове соціальне страхування», «Виробництво автотранспортних засобів, причепів і напівпричепів», «Виробництво інших транспортних засобів» та «Виробництво комп'ютерів, електронної та оптичної продукції». А такі галузі як «Сільське, лісове та рибне господарство», «Виробництво харчових продуктів; напоїв та тютюнових виробів» зазнають найменшого скорочення обсягів виробництва, це говорить про їх досить високу економічну стійкість та їх компенсаторну функцію в кризових умовах. В цілому, зауважимо, що під час непрогнозованих скорочень обсягів виробництва, як це відбувається в умовах війни, економіці України неможливо та недоцільно підтримувати заплановані обсяги товарної продукції, оскільки в подальшій перспективі це приведе до суттєвих скорочень виробництва у всіх галузях за рахунок виведення продукції внутрішнього споживання в товарну.

Література:

1. Державна служба статистики України [Електронний ресурс]. - Режим доступу : <http://www.ukrstat.gov.ua>.

2. Власюк О. С. Економіко-математичне моделювання процесів соціально-економічного розвитку України / О. С. Власюк. – К. : ДННУ “Акад. фін. управління”, 2011. – 520 с.

Моделювання часового ряду з складною локальною будовою

Яніна Гончаренко, Анна Нитник

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ. Дослідження функцій з складними локальними властивостями та їх використання в якості математичних моделей реальних процесів та явищ є актуальною математичною та прикладною задачею [1-3]. В прикладних застосуваннях, в задачах моделювання часових рядів використовується багато різних способів, які ґрунтуються на застосуванні статистичних підходів, різних методів згладжування або апроксимації. В роботі для вирішення поставленої проблеми використовується спосіб аналітичного задання функції зі складними локальними властивостями, що ґрунтується на використанні модифікації Q-зображень дійсних чисел [1].

Матеріали та методи. В роботі запропоновано аналітичне задання функції, що моделює деякий часовий ряд, обґрунтовано коректність цього задання та досліджено деякі властивості отриманої функції.

Результати. Розглянемо деякий дискретний часовий ряд $s_i = s(t_i)$, $i = \overline{0, n}$, заданий таблично. Основними припущеннями для моделювання були наступні: графік функції, яка буде моделлю зміни величини, значення якої задає часовий ряд, має самоафінні властивості; функція є неперервною і немонотонною на області визначення. Знормуємо значення аргумента та функції:

$$x_i = \frac{t_i - t_0}{t_n - t_0}, \quad y_i = \frac{s_i - s_0}{s_n - s_0}.$$

Очевидно, що $x_i \in [0; 1]$, $y_i \in [0; 1]$.

Припустимо, що розглядається часовий ряд, який на першому кроці наближення може бути зображений десятиланковою ламаною (або п'ятьма «хвилями» [2]), а на всіх кроках, починаючи з другого кожна ланка ламаної буде замінюватися на ламану, яка складається з 5 ланок (рис.1). При цьому вершини нових ламаних ділять початковий відрізок в співвідношеннях однакових для всіх кроків побудови (хоча для зростаючих і спадних ланок вони можуть відрізнятись).

Для зображення аргументу використаємо підхід, аналогічний до Q – зображення дійсних чисел [1]. Спроекуємо координати вершин початкової ламаної на вісь Ox . Позначимо довжини проєкцій через q_i , тобто $q_0 = x_1$, $q_1 = x_2 - x_1, \dots, q_9 = x_{10} - x_9 = 1 - x_9$. Очевидно, що $0 < q_i < 1$, $\sum_{i=0}^9 q_i = 1$. Позначимо через

$$b_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i, & \alpha_1 \in \{1, \dots, 9\}. \end{cases}$$

Зазначимо, що b_{α_1} співпадає з точками поділу відрізка $[0, 1]$ по осі Ox .

Співвідношення, на які поділятимуться відрізки, починаючи з 2-го рангу, задамо в матриці \tilde{Q} , де рядочки з парними номерами задають співвідношення для зростаючих ланок, а непарними для спадних:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_{0(2k)} & q_{1(2k)} & q_{2(2k)} & q_{3(2k)} & q_{4(2k)} \\ q_{0(2k-1)} & q_{1(2k-1)} & q_{2(2k-1)} & q_{3(2k-1)} & q_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, k = \overline{0, \infty},$$

$$0 < q_{ij} < 1, \sum_{i=0}^4 q_{ij} = 1, j \in \{0, 1, \dots, 4\}.$$

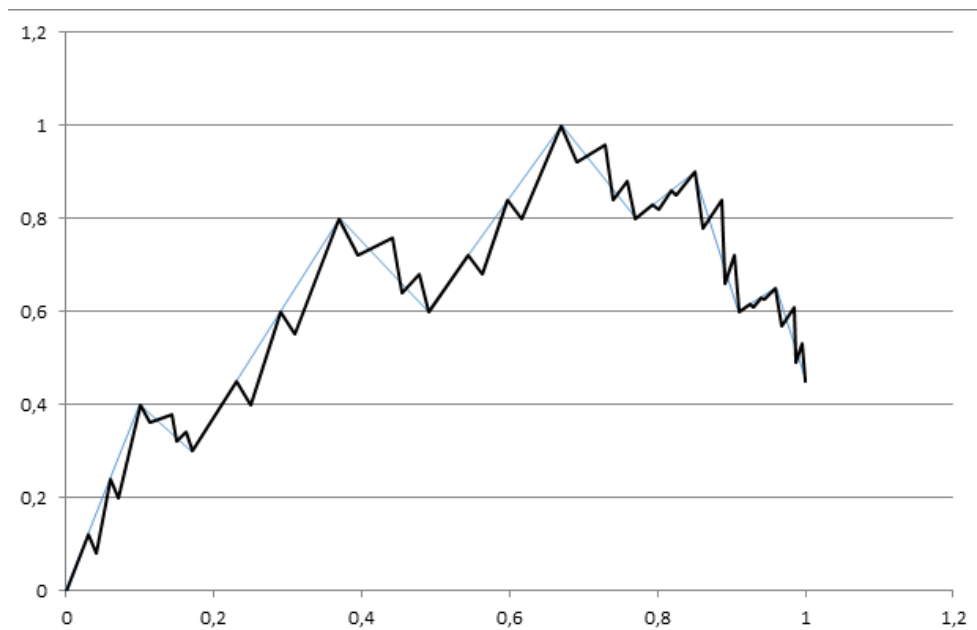


Рис. 1.

Позначимо $b_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_j = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_j-1} q_{ij}, & \text{якщо } \alpha_j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$

Використовуючи підхід, аналогічний до задання чисел в Q -представленні [1], отримаємо наступне задання аргументу $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} x &= b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2 \alpha_1} q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3 \alpha_2} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2 \alpha_1} + b_{\alpha_4 \alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2 \alpha_1} q_{\alpha_3 \alpha_2} + \dots = \\ &= b_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (b_{\alpha_n \alpha_{n-1}} q_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} q_{\alpha_j \alpha_{j-1}}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x}. \end{aligned}$$

Провівши аналогічні міркування для значення функції, можна отримати наступне задання аргументу $y \in [0, 1]$:

$$y = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_1} + d_{\alpha_3 \alpha_2} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} + d_{\alpha_4 \alpha_3} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_3 \alpha_2} + \dots = \\ = d_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} u_{\alpha_j \alpha_{j-1}}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q^y}$$

де $u_0 = y_1, u_1 = |y_2 - y_1|, u_2 = |y_3 - y_2|, \dots, u_9 = |y_{10} - y_9|,$

$$d_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0, \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} u_i, & \alpha_1 \in \{1, \dots, 9\}, \end{cases}$$

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{ccccc} u_{0(2k)} & u_{1(2k)} & u_{2(2k)} & u_{3(2k)} & u_{4(2k)} \\ u_{0(2k-1)} & u_{1(2k-1)} & u_{2(2k-1)} & u_{3(2k-1)} & u_{4(2k-1)} \end{array} \right), k = \overline{0, \infty},$$

$$0 < q_{ij} < u_{ij} < 1, u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 1, 1 - u_5 + u_6 - u_7 + u_8 - u_9 = 1,$$

$$d_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_j = 0, \\ (-1)^{\alpha_j-1} u_{0\alpha_{j-1}}, & \text{якщо } \alpha_j = 1, \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}}), & \text{якщо } \alpha_j = 2, \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}}), & \text{якщо } \alpha_j = 3, \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_{j-1}} - u_{1\alpha_{j-1}} + u_{2\alpha_{j-1}} - u_{3\alpha_{j-1}}), & \text{якщо } \alpha_j = 4. \end{cases}$$

В роботі [4] було обгрунтовано коректність задання функції:

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q^x}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q^y}, \alpha_1 \in \{0, \dots, 9\}, \alpha_j \in \{0, \dots, 4\}, j = \overline{2, \infty}, (1)$$

В даній роботі пропонується результати дослідження деяких властивостей заданої функції.

Властивість 1. $D(f) = [0; 1], E(f) = [0; 1]$.

Ця властивість впливає із задання функції.

Властивість 2. Функція, задана рівністю (1), неперервна на $[0; 1]$.

Для доведення цього твердження спочатку було розглянуто випадок - раціональних точок $x_0 \in (0; 1)$, тобто таких, що мають період $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m(0)}^{Q^x} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_m-1)(4)}^{Q^x}, \alpha_1 \in \{0, \dots, 9\}, \alpha_j \in \{0, \dots, 4\}, j = \overline{2, m}$. Було побудовано дві послідовності $(x_n): x_n \rightarrow x_0 + 0, (x'_n) \rightarrow x_0 - 0$, де $(n \rightarrow \infty)$, і обгрунтовано, що послідовність значень функції $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = f(x_0)$. Після цього було показано, що для будь-якої $(a_n): a_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ за допомогою оцінок a_n через x_n та x'_n буде виконуватись: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$. Аналогічно, було показано справедливості твердження для Q -іраціональних точок.

Властивість 3. Функція, задана рівністю (1), має нескінченну кількість проміжків зростання та спадання.

Для доведення цієї властивості використовується означення монотонності функції. Було розглянуто функцію на окремих класах рангових відрізків $\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^{Q^x}$. Виділялись класи на яких функція зростає і спадає відповідно.

Властивість 4. Функція, задана рівністю (1), є ніде не диференційовною. Властивість доводилась за допомогою означення похідної в точці. При цьому розглядались різні випадки для приросту Δx (в залежності від цифр Q -зображення x_0). В результаті було отримано, що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \infty$ майже всюди (в розумінні міри Лебега).

Висновки. Отже, в роботі досліджено властивості неперервності, монотонності та диференційовності функції, заданої перетворенням цифр аргумента, представленого за допомогою Q -зображення дійсних чисел, в цифри значення функції, яке задано модифікацією Q -зображення. Дана функція може використовуватись як математична модель часового ряду з складними властивостями. Зауважимо, що ряди такого типу часто виникають в задачах фінансового аналізу.

Література:

1. Працевитый Н.В., Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992.
2. Вильямс Б. Торговый хаос. – Альпина Паблишер, 2018. – 310 с.
3. Peters E. E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics. - John Wiley & Sons, Inc, 1994. - 316 p.
4. Нитник А.С. Моделирование часовых рядов за помощью модификаций Q -зображення дійсних чисел. Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2021. — No 21. — 123с.
5. Давидов, М. О. Курс математичного аналізу: підручник для студ. фіз-мат фак-тів пед. інс-тів. Ч.1-3- К. : Вища школа, 1976-1979.

Моделі аксіоматичної теорії кватерніонів: нові результати

Марина Даниленко, Оксана Требенко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Вступ. Комплексні та гіперкомплексні числа використовуються не лише в математиці, а й далеко за її межами: у аеро- та гідродинаміці, теорії пружності, радіотехніці, програмуванні тощо. Нові моделі аксіоматичної теорії можуть давати нові застосування, тому актуальною є потреба в пошуку нових і узагальнення відомих моделей аксіоматичної теорії кватерніонів.

Матеріали і методи. У роботі [1] було узагальнено матричну модель [2, с. 235] та арифметичну модель [3, с. 185] аксіоматичної теорії комплексних чисел.

У даній доповіді пропонується узагальнення моделей аксіоматичної теорії кватерніонів [2, с. 235] та [4, с. 37-38].

Результати. Встановлено наступні основні результати.

Теорема 1. Моделлю аксіоматичної теорії кватерніонів є алгебраїчна система $\langle M; +; \cdot \rangle$, де

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a & mb & kc & tld \\ b & a & ld & kc \\ c & tld & a & b \\ ld & c & mb & a \end{array} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

для довільних $k, l, m, t \in \mathbb{R}, k < 0, m = t < 0, l > 0$, а операції $+$ та \cdot – операції додавання та множення матриць.

Теорема 2. Моделлю аксіоматичної теорії кватерніонів є алгебраїчна система система $(\mathbb{R}^4; \oplus; \odot)$, де $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, операції \oplus та \odot задані за правилами: $(a, b, c, d) \oplus (f, p, g, s) = (a + f, b + p, c + g, d + s)$, $(a, b, c, d) \odot (f, p, g, s) =$
 $= (af + mbp + kcg + mlds, ap + bf + kcs + ldg, ag + bs + cf + mdp, as +$
 $mbg + cp + df)$

для довільних $k, m, l \in \mathbb{R}$ таких, що $k = ml, k < 0, m < 0, l > 0$.

Висновки. Запропоновано узагальнення матричної та арифметичної моделей аксіоматичної теорії кватерніонів. Результати можуть використовуватись у прикладних застосуваннях кватерніонів. Пошук інших моделей триває.

Література

1. *Власик Г. М.* Нові моделі аксіоматичної теорії комплексних чисел // Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013. — № 12. Т. 1. — С. 44-56.
2. *Балк М. Б. и др.* Реальные применения мнимых чисел. — К.: Рад. шк., 1988. — 255 с.
3. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В.К.Григоренко, С.С. Левіщенко.— К. : Вища шк. Головне вид-во, 1988.— 272 с.: іл
4. *Гордеев В.Н.* Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике / В. Н. Гордеев. – Киев: Издательство "Сталь", 2016. – 316 с.

**Математична модель як основа алгоритму розпаралелення
обчислювального процесу**

Тетяна Зінченко

Національний університет харчових технологій

Вступ. Важливою технічною характеристикою сучасних цифрових процесорів є їх швидкодія – швидкість виконання цільової задачі, особливо в системах супроводу в реальному часі. Важливим аспектом підвищення швидкості обчислень є побудова алгоритмів, які забезпечують якомога більшу можливість розпаралелення обчислювального процесу.

Матеріали і методи. При розпаралеленні обчислення повинні виконуватись в певній кількості незалежних блоків одночасно. Математично це можна розділити, використовуючи матричні підходи. Розглянемо це на прикладі реалізації швидких перетворень Фур'є. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) кінечної послідовності вимірів $\{x(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$, визначається формулою (1):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \cdot 2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{nk} \quad (1)$$

де $W = e^{-j \cdot 2\pi/N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$. Послідовність W^{nk} в (1) - періодична з періодом N , тобто $W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk}$, $W_N^2 = W_{N/2}$, $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, $l = 0, \pm 1, \dots$

Технічно розрізняють дві схеми реалізації ДПФ – з прорідженням по часу та з прорідженням по частоті. За першою схемою послідовність $X(k)$ розділяють на дві $N/2$ -точкові послідовності відповідно з парними $x(2n)$ та непарними $x(2n+1)$ елементами. За другою схемою послідовність $X(k)$ розділяють навпіл - на дві $N/2$ -точкові послідовності перших $N/2$ елементів та наступних $N/2$ елементів.

При матричному підході пропонується послідовність N вимірів розташувати у вигляді матриці розміром L на M (L — число рядків, M — число стовпчиків). В такому випадку поточний номер відліку n можна представити $n = Ml + m$, где l — поточний номер рядка, m — поточний номер стовпчика, а поточний номер елемента матриці вихідних сигналів ДПФ представимо як $k = Lr + s$. Тоді математична модель ДПФ набуває вигляду з внутрішньою сумою по рядках [1]:

$$\begin{aligned} X(k) &= X(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) \cdot W^{(Ml+m)(Lr+s)} = \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} (W^L)^{mr} \cdot \left[W^{ms} \cdot \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) \cdot (W^M)^{sl} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо змінити порядок підсумовування на зворотній з внутрішньою сумою по стовпчиках, то математична модель ДПФ набуває вигляду

$$X(s, r) = \sum_{l=0}^{L-1} (W^M)^{ls} \cdot \sum_{m=0}^{M-1} [x(l, m) \cdot W^{ms}] \cdot (W^L)^{rm}. \quad (3)$$

Формули (2) і (3) відповідають алгоритмам БПФ з прорідженням по часу і прорідженням по частоті.

Послідовність операцій для реалізації ДПФ згідно формул (2) та (3) можна представити в матричній формі, зручній для алгоритму практичної реалізації [1,2].

Результати. Згідно з отриманими формулами (2) та (3) внутрішні суми представляють перелік елементів, які можна обчислювати розпаралелено.

Висновки. Використання матричного підходу дозволяє структурувати алгоритми розпаралелення обчислень «ковзних» дискретних перетворень Фур'є в системах супроводу в реальному часі, що дозволяє суттєво скорочувати час обчислень за рахунок максимального використання отриманої інформації на попередньому кроці «вікна вимірів».

В процесі викладання вищої математики необхідно орієнтувати студентів сприймати формули та математичні моделі як схему, за якою потрібно бачити суть обчислювальних процесів та способи обробки інформації.

Література.

1. Зинченко Т.В. Особенности и различия матричных алгоритмов быстрых преобразований Фурье и Хартли в задачах «бегущего» спектрального анализа // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. Проблемы радиолокации». Т.50, 2007, №1-2, с.73-80.
2. T.V.Zinchenko Fast Fourier transform algorithms in the spectral signal processing in real-time systems // Ukrainian food journal. Volume 2, Issue №2, 2014p.-С.265-272.

Вступ. Починаючи розв'язувати будь-яку задачу, насамперед визначають множину об'єктів, які розглядатимуться. Така множина X називається універсальною множиною (для даної задачі). Поняття множин використовується у багатьох математичних теоріях.

Матеріали і методи. Поняття "нечітка множина" ("fuzzy set") вперше з'явилося в 1965, коли професор Лотфі А. Заде з університету в Барклей, USA опублікував статтю під назвою "Fuzzy sets". Воно ґрунтується на припущенні про те, що будь-який елемент лише певною мірою належить даній множині, тому одним з основних способів математичного опису нечіткої множини є визначення ступеня такої належності деяким числом, наприклад, з інтервалу $[0,1]$. У цьому межі інтервалу, тобто. 0 і 1, означають, відповідно, «не належить» та «належить».

Нечітка логіка - це форма багатозначної логіки, в якій справжні значення змінних можуть бути будь-якими дійсними числами від 0 до 1 включно. Вона використовується для обробки концепції «часткової істини», де справжнє значення може змінюватись між повністю істинним і цілком хибним. У той час як у класичній булевій логіці справжні значення змінних можуть бути лише значеннями 0 або 1.

Результати. Підготовка завдання до розв'язування методами нечіткої логіки (фазифікація) дозволяє конвертувати реальні значення змінних на нечіткі. Фазифікація полягає у визначенні ступеня приналежності змінної (вимірювання, наприклад) до нечіткої множини. Ступінь приналежності та ступінь істинності, є схожими поняттями.

Звичайна (чітка) підмножина A множини X , елементи якої задовольняють правилу (властивості) R , визначається як множина впорядкованої пари $A = \{x, \mu_A(x)\}$, де $\mu_A(x)$ – характеристична функція множини A , що задана на універсальній множині X та приймає такі значення

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ задовольняє властивості } R, (x \in A), \\ 0, & \text{якщо } x \text{ не задовольняє властивості } R, (x \notin A). \end{cases}$$

Наприклад, якщо $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; A – множина чисел, які більші за 5.

$$\text{Тоді } \mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 5, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 5. \end{cases}$$

Нечітка підмножина відрізняється від звичайної тим, що для елементів x з X немає однозначної відповіді "ні" відносно властивості R .

Наприклад, при виборі фруктів дуже легко визначити загальний набір яблук. Однак при цьому непросто визначити набір стиглих яблук. Ми розуміємо, що яблука дозрівають поступово і саме поняття набору стиглих яблук, таким чином, не є чітким (розпливчастим).

У зв'язку з цим, нечітка підмножина A універсальної множини X визначається як множина впорядкованої пари $A = \{x, \mu_A(x)\}$, де $x \in X$ а $\mu_A(x)$ – характеристична функція приналежності (або просто функція приналежності). При цьому $\mu_A(x) \in [0;1]$. Функція приналежності вказує ступінь (кількісну міру) належності елемента x до підмножини A . Чим вище ступінь належності, тим більшою мірою елемент універсальної множини відповідає властивостям нечіткої множини.

Використовують спеціальний запис нечітких множин. Якщо X є універсальною множиною з скінченним числом елементів ($X = \{x_i\}, i = \overline{1, n}$), то

нечітку множину A можна представити у вигляді $A = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$.

Якщо X є нескінченною множиною, то A записують так: $A = \int \frac{\mu_A(x)}{x}$.

Під знаком суми та інтеграла розуміють об'єднання, яке розповсюджується на усі елементи x_i множини X .

Мають місце також табличний та графічний спосіб представлення A .

Приклад. Визначити за допомогою нечіткої множини поняття "Людина середнього зросту", якщо $X = \{150, 155, 160, \dots, 190\}$ (зріст заданий у см).

Розв'язання. Виходячи з умови, з позицій *першого* дослідника, який вважає середнім зростом 180-185 см., таке поняття "Людина середнього зросту", може бути визначеним такою нечіткою множиною

$$A = \frac{0}{150} + \frac{0}{155} + \frac{0,1}{160} + \frac{0,15}{165} + \frac{0,3}{170} + \frac{0,9}{175} + \frac{1}{180} + \frac{1}{185} + \frac{0,7}{190}.$$

Інший дослідник, вважаючи, що людина має середній зріст 175-180 см, буде надавати шуканий результат іншою нечіткою множиною

$$B = \frac{0}{150} + \frac{0,1}{155} + \frac{0,4}{160} + \frac{0,6}{165} + \frac{0,9}{170} + \frac{1}{175} + \frac{1}{180} + \frac{0,8}{185} + \frac{0,5}{190}.$$

Таку «характеристичну функцію», яка залежить від експертної оцінки, називають функцією приналежності, а саму множину для якої цю функцію визначають, – нечіткою множиною.

Приклад. Побудувати графік функції належності $\mu_A(t)$ множини моментів часу доби, які відповідають поняттю "день" на універсальній множині

часу від 0 до 24 години $T = \{0 \leq t \leq 24\}$. (рис. 1).

Розв’язання. Під поняттям “день” умовно розумітимемо світлі години доби. Тут ми зустрічаємось, по-перше, з певною суб’єктивністю, оскільки різні люди по-різному вважають, що треба відносити до “світлих годин”. По-друге, початок і закінчення світлого часу залежить від погодних умов. Дійсно, хмарного дня темнішає раніше. Нарешті, по-третє, початок і закінчення дня ще більш істотно залежать від доби року. Так, добре відомо, що в грудні день майже вдвічі коротший, ніж у червні.

Залишаючи дещо осторонь наведені міркування, для визначеності вважатимемо, що день починається о восьмій годині й закінчується десь о вісімнадцятій. Природно, що між восьмою і вісімнадцятою годинами величина $\mu_A(t) = 1$. Вважатимемо також, що ніч починається десь о двадцятій і закінчується о шостій годині. Іншими словами, на часових інтервалах від 0 до 6 та від 20 до 24 годин $\mu_A(t) = 0$. З шостої ж до восьмої години та з вісімнадцятої до двадцятої значення функції належності кожного з моментів множини “день” лежатимуть в інтервалі $0 \leq \mu_A(t) \leq 1$.

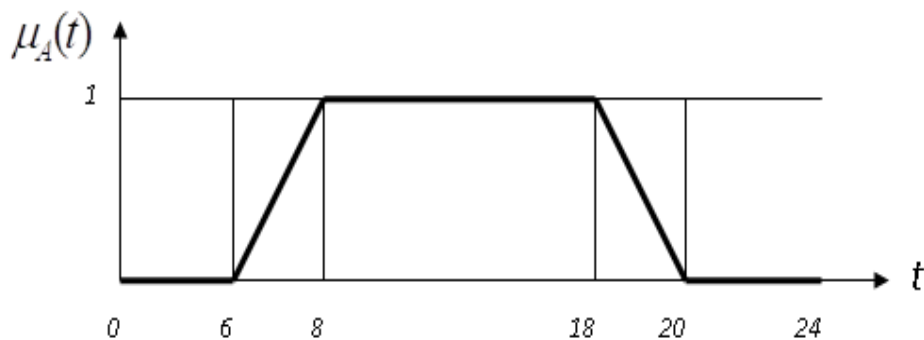


Рис. 1 – Функція належності моментів часу доби нечіткій множині “день”

Декілька нечітких множин можна визначити через одну змінну, наприклад, «зріст людини», яка набуває кількох значень: "маленький зріст", "середній зріст" і "високий зріст". Кожне поняття визначається власною функцією приналежності.

Висновки. Для побудови функцій приналежності можна використати метод, що базується на статистичній обробці думок групи експертів. Функції приналежності також зручно задавати в параметричній формі. Найбільшу популярність отримали трикутна, трапецевидна, гаусова, сигмоїдальна та Пі-подібна функції приналежності.

Оцінка найкращих наближень узагальнених похідних функції банахового простору через найкращі наближення функції

Ірина Ковальська

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Олена Радзівська

Національний університет харчових технологій

Вступ. Нехай $E_n(f)$ – послідовність найкращих наближень елемента f банахового простору B поліномами степеня n за повною мінімальною системою φ_m цього простору. За властивостями послідовності $E_n(f)$ встановлюються диференціальні характеристики самого елемента $f \in B$ і оцінки найкращих наближень для узагальненої похідної.

Матеріали і методи. Нехай у банаховому просторі B задана повна мінімальна система $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, а $\{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$ – спряжена до неї система, яка належить B^* , і $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел.

Означення. Якщо для елемента $f \in B$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(f, \varphi_m^*) \varphi_m$ збігається до деякого елемента $g \in B$, тоді вектор g називається похідною вектора f , яку позначаємо через $\partial_{\varphi}^{\lambda}$, тобто

$$\partial_{\varphi}^{\lambda} f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(f, \varphi_m^*) \varphi_m. \quad (1)$$

Підмножину всіх векторів f із B , у яких існують $\partial_{\varphi}^{\lambda}$ -похідні, будемо позначати через $V(\partial_{\varphi}^{\lambda})$.

Вектор

$$T_n(\varphi) = \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m, \quad (2)$$

де c_m – довільні комплексні числа, назвемо поліномом степеня n за системою φ_m . Відмітимо, що в силу мінімальності системи $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, коефіцієнти c_m в (2) визначаються однозначно по вектору $T_n(\varphi)$ і $c_l = (T_n(\varphi), \varphi_l^*)$.

Введемо величини

$$E_n(f, \varphi_m) = \inf_{T_n(\varphi)} \|f - T_n(\varphi)\|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

які називаються найкращими наближеннями вектора f поліномами степеня n за системою φ_m . Будемо вважати $E_0(f) = \|f\|$.

Очевидно, що $E_n(f) \geq E_{n+1}(f)$, $n=0,1,\dots$ і також в силу повноти системи $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ справедливе співвідношення $E_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто $E_n(f) \downarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Результати. За властивостями послідовності $E_n(f)$ встановлюється висновок про властивості самого елемента $f \in B$ і його $\partial_{\varphi}^{\lambda}$ -похідних, тобто за заданою послідовністю $E_n(f)$ найкращих наближень вектора f поліномами степеня n за системою φ_m встановлюються його диференціальні характеристики. Перші обернені теореми були розглянуті ще на початку минулого століття С. М. Бернштейном [1]. Основним моментом їх доведення є нерівності між нормами поліномів і їх похідних. Такі нерівності називають нерівностями С. М. Бернштейна.

В прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема. Нехай для деякої зростаючої послідовності натуральних чисел $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ збігається ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{n_{l+1}} (\partial_{\varphi}^{\lambda}) E_{n_l}(f, \varphi).$$

Тоді $f \in V(\partial_{\varphi}^{\lambda})$ і

$$E_{n_j}(\partial_{\varphi}^{\lambda} f, \varphi) \leq 2 \sum_{l=j}^{\infty} \mu_{n_{l+1}} (\partial_{\varphi}^{\lambda}) E_{n_l}(f, \varphi).$$

Висновки. Отриманий результат є узагальненням відомого результату у просторах Лебега для (ψ, β) похідної.

Література. Radziyevska O.I., Kovalska I.V. Estimation of the Best Approximations for the Generalized Derivative in Banach Spaces. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матем. науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2021.– Вип.22. – С. 90-96.

Застосування різницевого рівняння першого порядку при моделюванні динамічних процесів в економіці

Валентина Лісовська, Тетяна Кудик

Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана

Вступ та постановка проблеми. В економічних дослідженнях часто зустрічаються задачі, у яких змінні набувають дискретних числових значень, тобто змінна t набуває значень із множини невід'ємних цілих чисел $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ та інтерпретується як номер періоду часу. Оскільки обчислювальні машини оперують тільки з числами, тому при використанні комп'ютерної техніки всі неперервні процеси зводяться до дискретних. В такому випадку, від диференціальних рівнянь, які описують ті чи інші економічні процеси, переходять до різницевого рівняння. Обмежимося надалі викладом моделей, які описуються такими рівняннями.

Диференціальні та різницеві рівняння є ефективним інструментом математичного моделювання. Різницеві рівняння та системи різницевого рівняння відіграють велику роль і мають найбільш широке застосування в економічній теорії. Значну кількість економічних законів доводять саме за допомогою різницевого рівняння чи систем таких рівнянь, тобто рівнянь з дискретним часом.

Матеріали і методи. Розглянемо приклади моделей, що описуються різницево-рівняннями першого порядку.

Розглянемо випадок, коли інвестор буде поповнювати свій внесок або знімати частину внеску для власних потреб (реінвестувати). В цьому випадку його називають активним інвестором.

Активний інвестор. Зростання відсоткового внеску з регулярними внесками визначається за формулою $y(t+1) = (1+p)y(t) + a(t)$, де $a(t)$ – сума грошей, яку інвестор додатково вкладає до банку в період t дискретної моделі. У випадку, коли інвестор знімає деяку суму грошей, будемо вважати $a(t) < 0$. Вивчимо випадок, коли $a(t) = a = const$. Тоді дістанемо рівняння

$$y(t+1) = (1+p)y(t) + a, \quad (1)$$

в якому a – величина щомісячного внеску.

Це лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку (1) розв'яжемо методом варіації довільної постійної. Будемо шукати його розв'язок, C – вважатимемо не довільною постійною, а деякою невідомою функцією $C(t)$, $t = 1, 2, \dots$, тобто

$$y(t) = (1+p)^t C(t). \quad (2)$$

Функцію $C(t)$ знайдемо підстановкою в рівняння (1). Отже, $C(t+1)(1+p)^{t+1} = (1+p)(1+p)^t C(t) + a$, або $C(t+1)(1+p)^{t+1} = (1+p)^{t+1} C(t) + a$, тоді $C(t+1) = C(t) + a(1+p)^{-t-1}$. Виконаємо послідовно підстановки, вважаючи, що задано $C(0) = K$ (K – довільна постійна):

$$\begin{aligned}
C(1) &= C(0) + \frac{a}{1+p} = K + \frac{a}{1+p}, \\
C(2) &= C(1) + \frac{a}{(1+p)^2} = K + \frac{a}{1+p} + \frac{a}{(1+p)^2} = K + \frac{a}{1+p} \left(1 + \frac{1}{1+p} \right), \\
C(3) &= C(2) + \frac{a}{(1+p)^3} = K + \frac{a}{1+p} + \frac{a}{(1+p)^2} + \frac{a}{(1+p)^3} = K + \frac{a}{1+p} \left(1 + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} \right) \dots, \\
C(t+1) &= C(t) + \frac{a}{(1+p)^{t+1}} = K + \frac{a}{1+p} + \frac{a}{(1+p)^2} + \frac{a}{(1+p)^3} + \dots + \frac{a}{(1+p)^{t+1}} = \\
&= K + \frac{a}{1+p} \left(1 + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \dots + \frac{1}{(1+p)^t} \right).
\end{aligned}$$

Отже

$$C(t) = K + \frac{a}{1+p} \left(1 + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \dots + \frac{1}{(1+p)^{t-1}} \right) = K + \frac{a}{1+p} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(1+p)^i}. \quad (3)$$

Підставимо (3) в (2), дістанемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння: $P(t) = (1+p)^t \left(K + \frac{a}{1+p} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(1+p)^i} \right)$. Оскільки

$\left(\sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{(1+p)^i} \right) = S_n$ – сума n членів геометричної прогресії, у якої перший член

$b_1 = 1$, знаменник $q = \frac{1}{1+p} < 1$, тоді за формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ знайдемо

$$\begin{aligned}
P(t) &= (1+p)^t \left(K + \frac{a}{1+p} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+p} \right)^t}{1 - \frac{1}{1+p}} \right) = K(1+p)^t + (1+p)^t \frac{a}{1+p} \frac{(1+p)^t - 1}{p(1+p)^{t-1}} = \\
&= K(1+p)^t + \frac{a}{p} ((1+p)^t - 1).
\end{aligned} \quad (4)$$

Отже, із (4) маємо

$$P(t) = \left(K + \frac{a}{p} \right) (1+p)^t - \frac{a}{p}. \quad (5)$$

Не складно пересвідчитись, що розв'язком останнього рівняння є функція $y(t) = C \cdot e^{pt} - \frac{a}{p}$.

Наведемо ще приклад: відомо, що попит q_k на деяку продукцію у k -му році є лінійною функцією ціни p_k у цьому році: $q_k = ap_k$, а пропозиція s_k також є лінійною функцією ціни p_{k-1} у попередньому році: $s_k = bp_{k-1}$. Визначимо динаміку зміни ціни рівноваги у кожному році.

Оскільки рівноважна ціна визначається з умови, що пропозиція та попит однакові, тобто $q_k = s_k$, тому $ap_k = bp_{k-1}$. Це є різницеве рівняння першого порядку. Застосовуючи метод ітерацій, дістанемо $p_k = C \left(\frac{b}{a} \right)^k$ – загальний розв'язок цього різницевого рівняння.

Вважаємо, що в початковий момент при $k = 0$ рівноважна ціна дорівнює p_0 , тоді знайдемо $C = p_0$. Підставимо знайдене значення C в загальний розв'язок, дістанемо $p_k = p_0 \left(\frac{b}{a}\right)^k$. Звідси видно, що ціна рівноваги описується виразом $\left(\frac{b}{a}\right)^k$. Можливі наступні три випадки:

1. Якщо $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \infty$. Це означає, що ціни p_k

необмежено зростають.

2. Якщо $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}\right)^k = 0$. У цьому випадку говорять, що

коливання цін спадає.

3. У випадку, коли $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$, маємо, що коливання цін є періодичним і

утворюють послідовність $p_0, -p_0, p_0, -p_0, \dots$

Отже, якщо попит перевищує пропозицію, то коливання цін зростає. Найсприятливішим, з економічної позиції, є другий випадок, коли пропозиція перевищує попит і коливання цін спадає.

Модель ринкового регулювання ціни. Введемо позначення: $S(t)$ – величина пропозиції товару, $D(t)$ – величина попиту на товар в період t , $P(t)$ – ціна товару. Модель базується на основних припущеннях:

1) функція попиту лінійно залежить від поточної ціни на товар $D(t) = \alpha + A \cdot P(t)$, де $A < 0$, α – сталі параметри (попит зменшується з ростом ціни);

2) функція пропозиції лінійно залежить від ціни на товар за попередній період: $S(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$, де $B > 0$; β – сталі параметри (пропозиція на сьогодні складається на основі вчорашніх цін);

3) ціна кожного періоду встановлюється в умовах рівності попиту та пропозиції: $D(t) = S(t)$;

4) відома початкова ціна $P(0) = C$, $C = const$.

Виходячи з умови 3), маємо $\alpha + A \cdot P(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$, або

$$P(t) = \frac{B}{A} P(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}. \quad (6)$$

Це лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку із сталими коефіцієнтами. Спочатку розглянемо відповідне (6) лінійне однорідне рівняння

$$P(t) = \frac{B}{A} P(t-1) \quad (7)$$

та застосуємо метод ітерації. Приймемо $t = 0, 1, 2, \dots$. Вважаємо, що задано $P(0) = C$. Маємо

$$P(t) = \frac{B}{A} P(t-1) = \left(\frac{B}{A}\right)^t C.$$

Результати. Отже, загальний розв'язок рівняння (7) описується формулою: $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t C$. Лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку (6) розв'яжемо методом варіації довільної постійної. Будемо шукати його розв'язок у вигляді $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t C(t)$, (8)

де функцію $C(t)$ знайдемо підстановкою (8) в рівняння (6). Отже, $C(t)\left(\frac{B}{A}\right)^t = \frac{B}{A}\left(\frac{B}{A}\right)^{t-1} C(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}$, або $C(t)\left(\frac{B}{A}\right)^t = \left(\frac{B}{A}\right)^t C(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A}$, тоді $C(t) = C(t-1) + \frac{\beta - \alpha}{A} \left(\frac{A}{B}\right)^t$. Виконаємо послідовно підстановки, як і в попередніх прикладах, вважаючи, що задано $C(0) = D$ (D – довільна постійна), знайдемо

$$C(t) = D + \frac{\beta - \alpha}{B} \left(1 + \frac{A}{B} + \left(\frac{A}{B}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A}{B}\right)^{t-1}\right) = D + \frac{\beta - \alpha}{B} \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{A}{B}\right)^i. \quad (9)$$

Підставимо (9) в (8), дістанемо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t \left(D + \frac{\beta - \alpha}{B} \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{A}{B}\right)^i\right)$.

Оскільки $\left(\sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{A}{B}\right)^i\right) = S_n$ – сума n членів геометричної прогресії, то

$$P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t \left(D + \frac{\beta - \alpha}{B} \frac{1 - \left(\frac{A}{B}\right)^t}{\frac{A}{B}}\right) = D \left(\frac{B}{A}\right)^t + \frac{\beta - \alpha}{A} \left(\frac{B}{A}\right)^t - \frac{\beta - \alpha}{A}. \quad (10)$$

Отже, із (10) маємо $P(t) = \left(\frac{B}{A}\right)^t \left(D + \frac{\beta - \alpha}{A}\right) - \frac{\beta - \alpha}{A}$. Тут A і B – кутові коефіцієнти прямих попиту та пропозиції, що задані рівняннями $D(t) = \alpha + A \cdot P(t)$, $S(t) = \beta + B \cdot P(t-1)$.

Висновки. Автори проаналізували та узагальнили матеріали публікацій і скомпонували моделі та подали методи розв'язання різницевого рівнянь, що описують динаміку банківського внеску, ринкове регулювання ціни, тощо.

Література.

1. Коврижных А.Ю., Коврижных О.О. Дифференциальные и разностные уравнения.-Екатеринбург:Изд-во Урал.ун-та, 2014.-148с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов.- М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005.-399 с.
3. Лисовская В.П. Периодические решения сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: дис. на соиск. уч. степ. канд. ф.-м.н. Київ, 1990. 149 с.
4. Пічкур В.В. Теорія динамічних систем: навч. посібник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015.

Деякі функція з фрактальними властивостями пов'язані з
 G_2 – зображення дійсних чисел

Юлія Маслова
 Яніна Гончаренко
 Ірина Лисенко

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ. Сьогодні відомо багато двосимвольних метричних кодувань (зображень) чисел відрізка $[0;1]$ та їх застосувань. Введення нових систем вимагає ґрунтовної аргументації доцільності і підтвердження ефективності в застосуваннях. Нижче ми пропонуємо обґрунтування нової системи кодування чисел, яка використовує дві різнознакові основи 2 і -2 і її застосування у теорії функцій з локально складною структурою і фрактальними структурними властивостями.

Результати. G-зображення чисел. Нехай $A \equiv \{0; 1\}$ – алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць), $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \equiv (\alpha_n) \in L$.

Теорема. Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує $\alpha_n \in L$, така що

$$x = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k (-1)^{\sigma_k}}{2^k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_n \dots \alpha_n}^G, \quad \sigma_k \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}.$$

Символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_n \dots \alpha_n}^G$ ми називаємо G -зображенням числа x і його розкладу в ряд. Оскільки $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k (-1)^{\sigma_k}}{2^k} \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(-2)^{\sigma_k} \cdot 2^{1+k-\sigma_k}}$, то дане кодування чисел (G -зображення) використовує дві основи.

Специфіка G-зображення чисел.

1. Числа зліченної множини мають два зображення

$$\Delta_{c_0 c_1 \dots c_{m-1} 01(0)}^G = \Delta_{c_0 c_1 \dots c_{m-1} 11(0)}^G.$$

Вони називаються G -бінарними. Всі вони належать одній хвостовій множині. Решта чисел мають єдине G -зображення і називаються G -унарними.

2. G -циліндр: $\Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G = \{x: x = \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G a_1 a_2 \dots a_n \dots, a_n \in L\}$, рангу $m + 1$ з основою $c_0 c_1 \dots c_m$ є відрізком з кінцями

$$a = \min \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G = \begin{cases} \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G(0), & \text{якщо } c_1 + \dots + c_m - \text{ парне,} \\ \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G(1(0)), & \text{якщо } c_1 + \dots + c_m - \text{ не парне,} \end{cases}$$

$$b = \max \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G = \begin{cases} \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G(1(0)), & \text{якщо } c_1 + \dots + c_m - \text{ непарне,} \\ \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G(0), & \text{якщо } c_1 + \dots + c_m - \text{ парне.} \end{cases}$$

$$|\Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G| = \frac{1}{2^{m+1}}; \frac{|\Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G i|}{|\Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G|} = \frac{1}{2}.$$

3. Порівняння. Нехай (c_0, c_1, \dots, c_m) – довільний набір цифр, $N_1 = c_0 + \dots + c_m$;
 $u = \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G 0 a_1 a_2 \dots$, $v = \Delta_{c_0 c_1 \dots c_m}^G 1 b_1 b_2 \dots$.

Числа u і v перебувають у відношенні $u \leq v$, якщо N_1 – парне і у відношенні $u \geq v$, якщо N_1 – число непарне, при цьому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $a_1 = 1 = b_1$ і $a_n = 0 = b_n$ для всіх $n > 1$.

Оператор лівостороннього зсуву цифр. Це функція означена рівністю

$$\omega(x = \Delta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^G) = \Delta_{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_n}^G = 2x(-1)^{\alpha_1} - \alpha_1(-1)^{\alpha_1}.$$

Оператор лівостороннього зсуву є неперервною кусково-лінійною функцією.

Оператор правостороннього зсуву цифр. Це функція з параметром i , означена рівність

$$\delta_i(x = \Delta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^G) = x = \Delta_{\alpha_0 i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^G = \frac{\alpha_0}{2} + \frac{i}{2} + \frac{(-1)^i}{2} x.$$

Мають місце рівності:

$$1) \omega(\delta_i(x)) = x; \quad 2) \delta_{\alpha_1}(\omega(x)) = x.$$

Проектор G -зображення чисел в класичне двійкове зображення – це функція, означена рівністю

$$p(x = \Delta_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}^G) = \Delta_{0 \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}^2.$$

Теорема. Проектор $p(x)$ має властивості:

1. Коректність означення проектора p неможливо без домовленості використовувати лише одне з зображень G -бінарних чисел (нехай $\Delta_{c_0 c_1 \dots c_{m-1} 0 1(0)}$).
2. Стрибок p функції $p(x)$ у G -бінарній точці рангу m дорівнює $\frac{1}{2^m}$.
3. Функція p неперервна на множині u всіх G -унарних чисел.
4. Для проектора p виконується рівність $\int_0^{1/2} p(x) dx = \frac{1}{4}$.
5. Множиною значень функцій $p(x)$, $x \in [0; \frac{1}{2}]$, є відрізок $[0; \frac{1}{2}]$.
6. Графік Γ_p функції $p(x)$, $x \in [0; \frac{1}{2}]$ має самоподібну структуру

$$\Gamma_p = \varphi_0(\Gamma_p) \cup \varphi_1(\Gamma_p),$$

де φ_0 і φ_1 - перетворення подібності:

$$\varphi_0: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad \varphi_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Література.

1. *Pratsiovytyi M.V. Lysenko I.M. and Maslova Yu.P.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails G_2 – representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29 (2020). Number 1. pp. 99-108.
2. *Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В.* Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, Т.16, №2. – С.50 – 62.
3. *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.
4. *Працьовитий М.В.* Нега-канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських (нега-s-кові – перекодування s-кових) // Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, Т.14, №4. – С. 167 -177.
5. *Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М.* Нега-двійкова представлення дійсних чисел і його застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2015. - №17. – С. 83-106.
6. *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.* Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел // Збірник праць Інституту математики НАН України 2018, Т.15, №1. – С.132 – 146.

**Оптимальне керування несамоспряженої крайової задачі.
Задача еліптичного типу**

Олег Мазур

Національний університет харчових технологій

Розглянута в роботі задача керування еліптичним рівнянням з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі не допускає ні повного розщеплення ні застосування L^2 -теорії. Її розв'язність в класі розподілених керувань вдається одержати шляхом використання біортонормованих систем функцій та при подальшому аналізі розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма.

В круговому секторі $Q = \{(r, \theta) | r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)\}$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} \Delta y := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(\theta), (r, \theta) \in Q, \\ y(1, \theta) = p(\theta), p(0) = 0, \\ y(r, 0) = 0, r \in (0, 1), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, 0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \pi), r \in (0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

Потрібно знайти таку неперервну функцію $u(r; \theta)$, щоб функціонал

$$J(y; u) = \int_0^1 \|y(r)\|^2 dr + \int_0^1 \|u(r)\|^2 dr \rightarrow \inf \quad (2)$$

Де $p \in C^1([0; \pi])$ — задана функція, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0, \pi)$, еквівалентна стандартній, що задається рівністю

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ де } \forall n \geq 1 v_n = \int_0^{\pi} v(\theta) \cdot \psi_n(\theta) d\theta$$

Потрібно встановити класичну розв'язність (1), (2), тобто знайти оптимальний серед допустимих процесів $\{u, y\} \in C([0, \pi]) \times (C(\bar{Q}) \cap C^2(Q))$ [3]

За допомогою спектрального методу застосовуються біортонормовані і повні в $L^2(0; \pi)$ системи функцій Самарського-Іонкіна [4]

$$\Phi = \left\{ \varphi_0(\theta) = \theta, \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta, \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta \cos 2n\theta \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\Psi = \left\{ \psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2}, \psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi - \theta) \sin 2n\theta, \psi_{2n-1}(\theta) = \frac{4}{\pi^2} \cos 2n\theta \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Доведено існування єдиного розв'язку задачі оптимального керування і обґрунтовано наближену формулу для оптимального керування задачі. Отриманий результат можна поширити на задачі інших типів.

Література.

[2] Капустян В.Е. Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи. // Проблемы управления и информатики. 1999 №6 С. 58-67

[3] В.О.Капустян, О.А.Капустян, О.К.Мазур Задача оптимального керування для еліптичного рівняння з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі.— Журнал обчислювальної та прикладної математики, 2012, №2(108), с. 3-9.

[4] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальным краевым условием.— Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, №2, с. 294-304.

Канонічне представлення логарифму відношення правдоподібності для лічильних процесів

Оксана Ніколаєва

Національний університет харчових технологій

Матеріали і методи. Мета роботи – знайти канонічне представлення логарифму відношення правдоподібності для лічильних процесів.

Результати. Нехай \mathbf{D} - простір траєкторій лічильного процесу $\xi = (\xi_t)$, \mathbf{G} - найменша σ -алгебра, що породжується циліндричними множинами, (\mathbf{G}_t) - фільтрація на (\mathbf{D}, \mathbf{G}) , \mathbf{P} та $\tilde{\mathbf{P}}$ - дві імовірнісні міри на (\mathbf{D}, \mathbf{G}) , а $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}})$, $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{F}, \mathbf{Q})$ – \mathbf{Q} -повний стохастичний базис, $\nu = (\nu_t)$ та $\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_t)$ - компенсатори лічильного процесу ξ відносно (\mathbf{F}, \mathbf{P}) та $(\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{P}})$, відповідно.

Лема. Нехай ξ – лічильний процес, ν та $\tilde{\nu}$ – його компенсатори, та виконуються наступні умови:

I. існує невід'ємний передбачуваний процес $\lambda = (\lambda_t)_{t \in R_+}$ такий, що $\tilde{\nu}_t = \lambda \circ \nu_t$ ($\tilde{\mathbf{P}}$ -м.з.) $\forall t \in R_+$;

II. якщо $\Delta \nu_t = 1$ для деякого $t \in R_+$, то $\Delta \tilde{\nu}_t = 1$ ($\tilde{\mathbf{P}}$ -м.з.);

III. $(1 - \sqrt{\lambda})^2 \circ \nu_t + \sum_{s \leq t} (\sqrt{1 - \Delta \nu_s} - \sqrt{1 - \Delta \tilde{\nu}_s})^2 < \infty$ ($\tilde{\mathbf{P}}$ -м.з.) $\forall t \in R_+$.

Тоді $\tilde{\mathbf{P}} \ll^{loc} \mathbf{P}$ та процес локальної щільності $z = (z_t)$ міри $\tilde{\mathbf{P}}$ відносно міри \mathbf{P} має вигляд:

$$z = e^N \prod_{0 < s \leq \bullet} (1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s},$$

де N – локальний \mathbf{P} - мартингал виду

$$N = \left(\lambda - 1 + \frac{\Delta \tilde{\nu} - \Delta \nu}{1 - \Delta \nu} I(\Delta \nu < 1) \right) * (\xi - \nu).$$

Розглянемо випадковий процес $\Lambda = \ln z$, при чому $\ln 0 = -\infty$. Крім цього, розглянемо дві випадкові міри (R_+, B_+) виду

$$p(A) = \sum_{s \in A} I(0 < \Delta \nu_s < 1) (1 - \Delta \xi_s), A \in B_+,$$

$$q(A) = \sum_{s \in A} I(0 < \Delta \nu_s < 1) (1 - \Delta \nu_s), A \in B_+,$$

де B_+ – борелівська σ -алгебра підмножин з R_+ .

Теорема. Нехай виконуються умови леми та виконуються (\mathbf{P} -м.з.) $\forall t \in R_+$ наступні дві умови:

$$\text{IV. } (\lambda - 1 - \ln \lambda) I(|\ln \lambda| \leq 1) * \nu_t < \infty, (\lambda - 1 - \ln \lambda) I(|\ln \lambda| > 1) * \xi_t < \infty;$$

$$\text{V. } \left(\frac{\Delta \nu - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} - \ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right) I \left(\left| \ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right| \leq 1 \right) * q_t < \infty,$$

$$\left(\frac{\Delta \nu - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} - \ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right) I \left(\left| \ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right| > 1 \right) * p_t < \infty.$$

Тоді для семімартингала Λ має місце наступне канонічне представлення:

$$\Lambda = B^\Lambda + x I(|x| \leq 1) * (\mu^\Lambda - \nu^\Lambda) + x I(|x| > 1) * \mu^\Lambda,$$

де μ^Λ – міра стрибків семімартингала Λ , ν^Λ – її компенсатор, причому $\forall t \in R_+$ и $C \in B_0$ (B_0 – борелівська σ -алгебра підмножин на $R \setminus \{0\}$)

$$\mu^\Lambda((0, t], C) = I_C(\ln \lambda) * \xi_t + I_C \left(\ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right) * p_t,$$

$$\nu^\Lambda((0, t], C) = I_C(\ln \lambda) * \nu_t + I_C \left(\ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right) * q_t,$$

а процес B^Λ має наступний вигляд:

$$B^\Lambda = -(\lambda - 1 - I(|\ln \lambda| \leq 1) \ln \lambda) * \nu - \left(\frac{\Delta \nu - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} - I \left(\left| \ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right| \leq 1 \right) \ln \frac{1 - \Delta \tilde{\nu}}{1 - \Delta \nu} \right) * q.$$

Висновки. Здобуто канонічне представлення логарифму локальної щільності мір.

Наукова школа доктора технічних наук професора Віктора Дуценка

Сергій Пудченко, Іван Горбачук,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ.

Економічний розвиток України значною мірою залежить від сучасних технологій, розроблених науковими установами та викладачами-науковцями закладів вищої освіти, з залученням студентів, - молодого покоління науковців-дослідників. Однак ситуація з науковими кадрами в Україні, на сьогодні, не є задовільною через відсутність мотиваційних стимулів щодо залучення перспективної молоді до наукової діяльності. Повчальним прикладом з цих питань може бути досвід ветерана Другої світової війни, видатного науковця і освітянина професора Віктора Павловича Дуценка (1922-1985). Використання розроблених і впроваджуваних ним методик щодо залучення творчої молоді до наукової діяльності, які добре зарекомендували себе як прогресивні та інноваційні і залишаються не тільки актуальними в наш час, а й варті детального дослідження та практичного впровадження.

Матеріали і методи.

У сучасній науці і техніці характерна діяльність колективу однодумців з ієрархічною організацією, здатною концентрувати досвід кількох поколінь для вироблення наукових і технічних знань під ідейним і практичним керівництвом визнаного науковця й вчителя, лідера, що надихає колектив науковими ідеями, окреслює зміст і методи наукових досліджень. Так визначається термін «наукова школа» у працях учених П. Анохіна, Б. Кедрова, О. Баєва, Ю. Храмова, К. Левківського, Ю. Краснобокого (учня В.П. Дуценка) та інших.

Віктор Павлович Дуценка створив наукову школу в галузі теплофізики дисперсних і полімерних систем. 37 років свого життя він присвятив навчанню і вихованню студентської молоді, підготовці висококваліфікованих кадрів учених і викладачів. Під його керівництвом підготовлено 2 доктори і 37 кандидатів наук. Учні наукової школи Дуценка В.П. стали відомими працівниками освіти: ректорами (професор Б.С. Колупаєв, професор І.М. Кучерук, професор Худай Берен, м. Чарджоу), проректорами педагогічних інститутів і університетів. Докторами наук стали О.Ф. Буляндра, М.І. Шут, Б.С. Колупаєв, П.П. Луцик. Із учнів наукової школи Віктора Павловича академіком Національної академії педагогічних наук України обрано М.І. Шута. Започатковані В.П. Дуценком дослідження продовжили його учні в Україні та за її межами: професори – М.І. Шут, О.Ф. Буляндра, П.П. Луцик, І.М. Кучерук, Б.С. Колупаєв, А.В. Касперський, І.Т. Горбачук, В.М. Барановський, В.В. Левандовський, Т.Г. Січкач, І.А. Романовський, М.В. Клименко, Ю.М. Краснобокий, В.С. Титюченко, М.С. Панченко, В.М. Смола, Орландо Лопес та інші [1].

Науково-педагогічне зростання В.П. Дуценка відбувалось на фізико-математичному факультеті Київського державного педагогічного інституту

імені О. М. Горького (КДП), до якого він вступив у 1946 р. на 2 курс (4 семестр), де першим завідувачем кафедри фізики був видатний фізик, організатор вищої освіти і науки, перший в Україні дослідник дії рентгенівських променів і природної радіоактивності на живі організми професор Г.Г. Де Метц. Зусиллями Г.Г. Де Метца, на кафедрі фізики КДП, було створено музей фізичних приладів, який донині дбайливо зберігається. До 1941 р. на кафедрі фізики КДП вже працювали доценти О.К. Бабенко, М.Ф. Казанський, І.С. Кухтенко, С.Ф. Фещенко. Кафедру фізики після звільнення Києва від окупації очолював О.К. Бабенко, відомий українській фізики-методист. Напрямок науково-дослідницької роботи з теми теплофізики на кафедрі фізики до і після окупації очолював М.Ф. Казанський, майбутній науковий керівник В.П. Дущенко.

Після закінчення аспірантури Дущенко В.П. з 1951 по 1955 роки працював на посаді завідувача кафедри фізики Станіславського педагогічного інституту (нині Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ). В інституті він створив наукову школу в галузі теплофізики дисперсних систем, активно публікував науково-популярні статті в обласній газеті та започаткував в інституті журнал "Наукові записки" [3].

У 1952 р. Дущенко В.П. захистив кандидатську дисертацію на тему "Дослідження фізичного змісту критичних точок кривих швидкості сушіння колоїдних капілярно-пористих речовин". У 1954 р. В.П. Дущенко присвоєно вчене звання доцента по кафедрі фізика.

З 1955 року В.П. Дущенко працює на посаді доцента кафедри фізики Київського технологічного інституту харчової промисловості (КТІХП). Одним з перших учнів школи В.П. Дущенко у КТІХП був О.Ф. Буляндра. У 1967 р. О.Ф. Буляндра захистив кандидатську дисертацію на тему «Теплофизические основы расчета терморрадиационных сушильных установок пищевой промышленности», а 1978 р. під науковим керівництвом В.П. Дущенко захищає докторську дисертацію на тему «Научно-технические основы выбора рациональных режимов сушки и расчета сушильных установок пищевой промышленности» [2].

З вересня 1963 р. В.П. Дущенко працює в КДП спочатку на посаді доцента, а у 1968-1985 роках очолює кафедру фізики. Аспіранти КДП під керівництвом В.П. Дущенко захищають дисертаційні роботи з теплофізики і продовжують наукові дослідження теплофізики не тільки в Україні так і за кордоном. У 1967 р. І.М. Кучерук, під науковим В.П. Дущенко, захищає дисертацію кандидата фізико-математичних наук з теми «Комплексное исследование кинетики процесса сушки типичных дисперсных тел инфракрасным излучением». З 1982 по 1986 рік Кучерук І.М. працював ректором Івано-Франківського педагогічного інституту імені Василя Стефаника, з 1986 по 2002 рік ректором Житомирського педінституту імені Івана Франка. У співавторстві з В.П. Дущенко Кучеруком І.М. написано і підготовлено до друку ряд підручників і навчальних посібників для педінститутів і загальноосвітніх шкіл з курсу загальної фізики. У 1969 р.

М.С. Панченка одразу після захисту ним кандидатської дисертації з теми «Комплексне використання сорбційних і калориметричних досліджень щодо розв'язання деяких задач внутрішнього масо переносу в дисперсних тілах» під науковим керівництвом В.П. Дуценка, повертається до Рівненського державного гуманітарного університету (РДГУ). В РДГУ не було жодного кандидата фізико-математичних наук до приїзду у 1969 р. М.С. Панченка. При кафедрі фізики РДГУ М.С. Панченко створює науко-дослідницьку лабораторію «Теплофізики дисперсних матеріалів», до складу якої увійшли молоді талановиті викладачі кафедри фізики: Мосієвич О.С., Панасюк А.Л. та творчі на той час ще студенти фізико-математичного факультету, - Карпович І.М., Женевський М.С., Єремеев Є.М., Панченко І.М., Поліщук Н.В. та інші. Протягом багатьох років Дуценко В.П. надавав наукову-технічну допомогу не тільки теплофізікам РДГУ, але й теплофізікам Рівненського інституту інженерів водного господарства та теплофізікам філії Інституту легкої промисловості м. Рівного – консультував молодих науковців, проводив спецсемінари з теплофізики дисперсних і полімерних матеріалів для членів лабораторії теплофізики та членів науково-дослідного студентського гуртка, читав лекції з загальної і теоретичної фізики студентам-старшокурсникам фізико-математичного факультету, залучаючи до науково-дослідної роботи в лабораторії теплофізики творчу молодь [1].

Докторську дисертацію з теми "Кинетика и динамика внутреннего тепло-и массопереноса в твердых дисперсных системах" В.П. Дуценко захистив у 1977 р. зі спеціальності "теплофізика". У 1978 р. йому було присвоєно вчене звання професора [2].

Наукову школу в НПУ імені М.П. Драгоманова продовжує учень В.П. Дуценка академік Національної академії педагогічних наук України, академік Академії наук Вищої освіти України, заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної та прикладної фізики факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова Микола Іванович Шут.

Під спільним науковим керівництвом В.П. Дуценка, Г.М. Бартенева та М.І. Шута були захищені перші кандидатські дисертації в галузі теплофізики та молекулярної фізики полімерів Т.Г. Січкарем, А.В. Касперським, М.В. Лазоренком, С.В. Баглюком, Г.Д. Даниленком, М.В. Клименком.

Результати.

Наукова-педагогічна спадщина В.П. Дуценка є вагомою, за 37 років науково-педагогічної діяльності підготовлено 2 доктори і 37 кандидатів наук під його науковим керівництвом, написано більше 400 статей і ряд навчальних посібників, у міжнародних наукометричних виданнях Scopus опубліковано 38 статей, Web of science 14 статей, два авторських свідоцтва, створена власна наукова школа в галузі тепломасопереносу, дослідження, започатковані ним, продовжують його учні в Україні та за її межами.

Його теоретичні праці у галузі колоїдно-теплофізичних процесів сушіння вологих матеріалів отримали світове визнання, його експериментальні дослідження відрізняються оригінальністю і дотепністю, багаторічна співпраця

з Інститутом тепло- і масообміну імені О.В. Ликова НАН Білорусії, з Інститутом технічної теплофізики НАН України, НДІ Хіммаш (м. Москва), НДІ Електрографії (м. Вільнюс), Тираспольським хлібокомбінатом (Молдова), Орґеєвським консервним заводом (Молдова), Коломийським заводоуправлінням будівельних матеріалів (Івано-Франківська область), Київський м'ясокомбінат та інші, призвели до зниження собівартості виготовлення продукції та покращення її якості.

Висновки.

Дущенко В.П. – видатний учений-лідер наукової школи, який згуртував колектив одностудентів з ієрархічною організацією послідовників у багатьох навчальних закладах, науково-дослідницьких установах України та за кордоном. Він розробляв фундаментальні й загальні наукові питання досліджень, продукував нові ідеї та напрямки досліджень. Він був лідером-науковцем, чуйною людиною, талановитим дослідником, мудрим педагогом; ці якості стали об'єднавчими у створенні його наукової школи. Характерними рисами наукової школи Віктора Дущенка є творча атмосфера наукового дослідження, вільного наукового спілкування, ентузіазму, відданості науці, вимогливість до професійного відбору учнів, велика особиста працездатність.

Наукова-педагогічна спадщина В.П. Дущенка потребує подальшого розкриття і дослідження для формування молодого покоління українських науковців з числа старшокласників та студентів.

Література.

1. Віктор Павлович Дущенко: біобібліографічний покажчик / наук. ред.: І. Т. Горбачук, упоряд.: С. А. Пудченко, бібліогр. ред. Н. І. Тарасова; відповідальна за випуск : Л. В. Савенкова. – Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. – 178 с.; іл., портр. – (Серія: Вчені НПУ імені М. П. Драгоманова).

2. Особова справа Дущенко Віктор Павлович, доктор технічних наук, професор. Держ. архів м. Києва, Київський державний педагогічний інститут імені М. Горького, Ф. № Р-346. Оп. № 5. Сп. № 516. 94 Арк.

3. Пудченко С. А. Деякі нотатки наукової і педагогічної діяльності професора В. П. Дущенка / С. А. Пудченко // науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова Сер. 3: Фізика і математика у вищій і середній школі: зб. Наук. Праць. – К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2017. – вип.. 18. С. 81-87. Літ.: 7н.

Коефіцієнти транзитивності ч. в. множини виду $(N, 5)$

Марина Рассадкіна

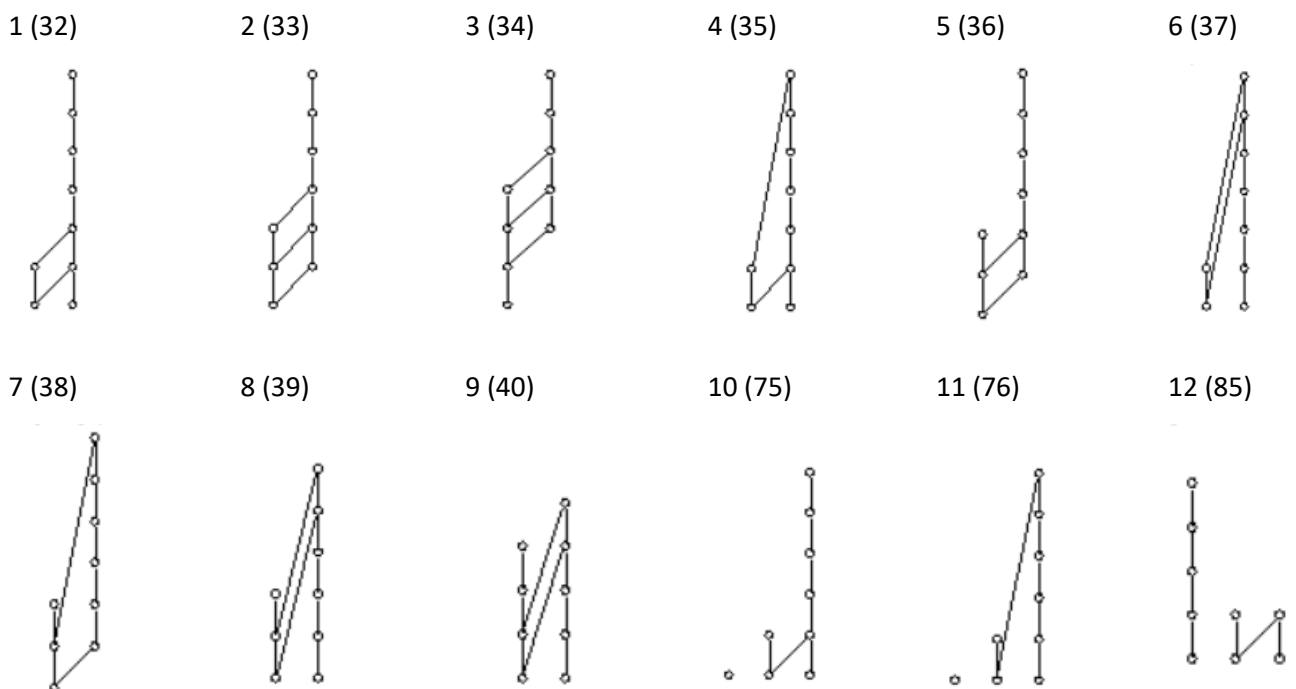
Поліський національний університет

Вступ. М. М. Клейнер довів, що множина S має зображення скінченного типу тоді й тільки тоді, коли вона не містить підмножин виду $K_1 = (1; 1; 1; 1)$; $K_2 = (2; 2; 2)$; $K_3 = (1; 3; 3)$; $K_4 = (1; 2; 5)$ і $K_5 = (N; 4)$, які називаються критичними ч.в. множинами Клейнера. У [2] доведено, що ч.в. множина є P -критичною (тобто критичною щодо додатності форми Тітса) тоді й тільки тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна ч.в. множині Клейнера.

Аналогічна ситуація має місце і для ручних ч.в. множин. Л. А. Назарова довела, що ч.в. множина S є ручною тоді і тільки тоді, коли вона не містить підмножин виду $N_1 = (1; 1; 1; 1; 1)$, $N_2 = (1; 1; 1; 2)$, $N_3 = (2; 2; 3)$, $N_4 = (1; 3; 4)$, $N_5 = (1; 2; 6)$ і $N_6 = (N; 5)$; ці умови еквівалентні слабкій невід’ємності квадратичної форми Тітса. Доведено, що ч.в. множина є критичною щодо невід’ємності форми Тітса тоді й тільки тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна множинам Назарової; всі такі множини були описані в [3].

Матеріали і методи. Список ч.в. множин виду $(N; 5)$. Нехай P — фіксована множина. Ч.в. множина S називається MM -типу P , якщо S є мінімаксною (іншими словами, (\min, \max) -еквівалентною P (поняття (\min, \max) -еквівалентності було введено в [1]; див. також [2]). З результатів роботи [3] випливає, що наведена нижче таблиця містить усі ч.в. множини (аж до ізоморфізму та подвійності) не MM -типу $(N; 5)$, яка є єдиною такою надкритичною ч.в. множиною.

Таблиця 1. Ч.в. множини, (\min, \max) -еквівалентні ч.в. множині $N_6=(N; 5)$



13 (86)



14 (87)



15 (88)



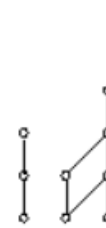
16 (89)



17 (90)



18 (91)



19 (92)



20 (93)



21 (97)



22 (98)



23 (100)



24 (102)



25 (103)



26 (104)



27 (105)



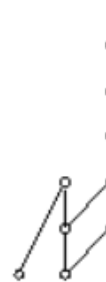
28 (106)



29 (107)



30 (108)



31 (109)



32 (110)



33 (111)



Результати. Нехай S — скінченна множина і $S_{<}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in S, x < y\}$. Якщо $(x, y) \in S_{<}^2$ і немає z , що задовольняє $x < z < y$, то говорять, що x і y є сусідніми. Поставимо $n_w = n_w(S) := |S_{<}^2|$ і позначимо $n_e = n_e(S)$ кількість пар сусідніх елементів. На мові діаграми Хассе $H(S)$ (що представляє S на площині), n_e дорівнює кількості всіх її ребер, а n_w — кількості всіх її шляхів, що йде знизу вгору. Співвідношення $k_t = k_t(S)$ чисел $n_w - n_e$ і n_w ми називаємо коефіцієнтом транзитивності S (див. [4]).

Метою даної роботи є обчислення k_t для всіх множин не MM -типу, тобто ч.в. множин, (\min, \max) -еквівалентних єдиній ч.в. множині $N_5 = (N; 5)$.

Запишемо всі коефіцієнти транзитивності k_t з точністю до другого знака після коми.

Теорема. Для ч.в. множин 1 – 33 (з Таб. 1), (\min, \max) -еквівалентних ч.в.

множині $N_6=(N; 5)$ справедливо:

Таблиця 2. Коефіцієнти транзитивності для ч.в. множин, (min, max)-еквівалентні ч.в. множині $N_6=(N; 5)$

N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t
1	9	33	0,73	12	7	13	0,46	23	8	15	0,47
2	10	33	0,70	13	8	25	0,68	24	8	17	0,53
3	10	33	0,70	14	9	25	0,64	25	8	21	0,62
4	9	29	0,69	15	9	25	0,64	26	8	27	0,70
5	9	29	0,69	16	8	19	0,58	27	8	23	0,65
6	9	25	0,64	17	9	19	0,53	28	8	17	0,53
7	9	25	0,64	18	8	15	0,47	29	8	15	0,47
8	9	21	0,57	19	9	15	0,40	30	9	23	0,61
9	9	19	0,53	20	8	13	0,38	31	9	19	0,53
10	7	21	0,67	21	8	19	0,58	32	9	17	0,47
11	7	17	0,59	22	8	15	0,47	33	9	17	0,47

Доведення здійснюється прямими розрахунками.

Пригадаймо, що елемент множини T називається вузловим, якщо він порівняний з усіма елементами T . Підмножина X множини T називається щільною, якщо не існує $x_1, x_2 \in X, y \in T \setminus X$ таких, що $x_1 < y < x_2$.

Висновки. Ч.в. множина N_6 є єдиною множиною не MM -типу.

Ч.в. множина $NP=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \mid 1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8 < 9, 6 < 9\}$ є єдиною множиною не MM -типу з найменшим коефіцієнтом транзитивності.

Ч.в. множина не MM -типу N_6 має найбільший коефіцієнт транзитивності тоді й тільки тоді, коли вона містить щільну підгрупу з п'ятью вузловими елементами.

Література.

1. *Bondarenko, V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // *Visn. Kyiv Univ., Ser. Fiz. Mat.* – 2005. – no. 1. – pp. 24–25.
2. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form // *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr./Problems of Analysis and Algebra/*. – K.: Institute of Mathematics of NAN of Ukraine, 2005. – 2, No. 3. – pp. 18 – 58 (in Russian).
3. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form // *Ukrainian Math. J.* – 2009, – vol. 61, no. 5. – pp. 734–746.
4. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* Coefficients of transitivity of P -critical posets // *Analysis and application, Inst. Math. NAN Ukraine.* – 2017. – vol. 14, no. 1. – pp. 46–51.

Математична модель економічної ефективності вирощування картоплі

Вікторія Романенко

Національний університет харчових технологій

Вступ. Рослини відіграють ключову роль у всіх екосистемах світу. Коли рослини заражені з вірусом інфекція може мати вплив як на самі рослини, так і на екосистему, від якої залежать рослини.

Найпоширеніша культура в Україні – картопля. Ми посідаємо четверте місце у світі за обсягами її врожаїв – 22 млн тон на рік. Однією з основних проблем у вирощуванні картоплі є боротьба з ураженням вірусними хворобами посадкового матеріалу.

Математичне моделювання стало важливим інструментом для розуміння динаміки передачі хвороби та прийняття рішень щодо контролю захворювань та аналізу економічної ефективності вирощування культури. В роботі запропонована модель вірусної хвороби картоплі, оптимізація якої за принципом максимуму Понтрягіна дає найкращу економічно ефективну стратегією ефективності вирощування цієї культури.

Матеріали і методи. У процесі дослідження використано системний аналіз наукових та методичних джерел, теоретичний аналіз, спостереження та обробка статистичних даних. Дослідження базується на принципі максимуму Понтрягіна, математичному моделюванні, чисельному аналізі та інтегрованому контролі.

Результати. У цій роботі представлено модель, що описує популяції переносників вірусів материнським посадковим матеріалом і комахами, що передають збудник $P(t)$ в середовище.

Таким чином, відбувається передача захворювання популяцією материнського матеріалу $N_1(t)$ і популяцією комах-переносників збудника $N_2(t)$.

За час t материнська популяція ділиться на дві сукупності, $S(t)$ позначимо сприйнятливую до вірусу частину материнського матеріалу, а $I(t)$ позначимо інфіковану частину картоплі.

Аналогічно, популяція комах-переносників збудника ділиться на сукупність сприйнятливих до вірусу та сукупність інфікованих, позначимо їх $H(t)$ і $Y(t)$ відповідно.

Материнська популяція зростає разом із внутрішньою швидкістю росту r і передачею вірусу у навколишнє середовище ємністю $K(K > 0)$. Якщо інфікований і посадковий матеріал і комахи, що з ним контактують, то поширення вірусу в навколишнє середовище збільшується з ємністю $K(K > 0)$.

Комахи сприятливі до зараження, народжуються і поповнюють відповідну популяцію зі швидкістю q . Інфікування таких комах відбувається

двома шляхами: при контакті з вже інфікованою картоплею зі швидкістю β_2 і шляхом безпосередньої взаємодії зі збудником з навколишнього середовища (трави або інших рослин) зі швидкістю β_3 . Смертність сприйнятливих і заражених комах представлені μ_2 і μ_3 відповідно. Сприйнятлива картопля рухається до сукупності інфікованої культури після контактів із зараженою комахою зі швидкістю β_1 . Заражена картопля, ніколи не видужає і дає відсутність або дуже низьку врожайність в подальшому. Інфіковані рослини картоплі мають рівень загибелі μ_1 . Захворювання не може передаватися горизонтально і вертикально в обох популяціях і це не успадковується генетично. Збудник вірусу, залучений до зараження популяція картоплі зі швидкістю γ і його смертність становить μ_4 . Швидкість інкубаційного періоду всередині інфікованої картоплі приймається з розрахунку δ .

Так враховуючи наведені міркування і на основі наших припущень, модель буде керуватися системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \frac{\beta_1 SY}{A+S} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta_1 SY}{A+S} - (\mu_1 + \delta)I \\ \frac{dH}{dt} &= q - H\left(\frac{\beta_2 I}{S+I} + \frac{\beta_3 P}{D+P}\right) - \mu_2 H \\ \frac{dY}{dt} &= b_1 H\left(\frac{\beta_2 I}{S+I} + \frac{\beta_3 P}{D+P}\right) - \mu_3 Y \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma + \delta I - \mu_4 P \end{aligned} \tag{1}$$

З початковою умовою

$$S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, H(0) = H_0 \geq 0,$$

$$Y(0) = Y_0 \geq 0, P(0) = P_0 \geq 0, \tag{2}$$

Висновки. Виведення детермінованої моделі вірусної хвороби картоплі та оптимального контролю цієї моделі з використанням стратегій боротьби з вірусами, що включає профілактику, карантин та хімічну обробку, дало змогу отримати характеристики елементів керування та системи оптимальності моделі. В роботі було використано принцип максимуму Понтрягіна та проведено чисельне моделювання системи оптимальності з урахуванням інтегрованих стратегій. В результаті було визначено найкращу економічно ефективну стратегією з точки зору вартість, а також користь для здоров'я.

Література.

1. Okosun KO, Makinde OD. Optimal control analysis of hepatitis c virus with acute and chronic stages in the presence of treatment and infected immigrants. *Int J Biomath.* 2014;7(2):1450019.
2. Hugo A, Lusekelo EM, Kitengeso R. Optimal control and cost effectiveness analysis of tomato yellow leaf curl virus disease epidemic model. *Appl Math.* 2019;9(3):82–88.

Про одне із узагальнень трикутника Паскаля

Людмила Трубайчук, Оксана Требенко

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Ідея побудови арифметичних трикутників, які є узагальненнями трикутника Паскаля, не є новою. Огляд результатів можна знайти, наприклад, в монографії [Помилка! Джерело посилання не знайдено].

У даній доповіді ми вводимо узагальнення, яке базується на послідовності чисел Фібоначчі. В такому числовому трикутнику елементи задовольняють рекурентну умову:

$$a_{i,j} = a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq i, \quad (1)$$

з початковими значеннями: $a_{i,1} = a_{i,i} = u_i$, де u_i – i -ий член послідовності Фібоначчі: $u_1 = u_2 = 1$, $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$. Отриманий числовий трикутник назовемо трикутником Паскаля-Фібоначчі.

Будемо називати k -ою лівою діагоналлю трикутника Паскаля-Фібоначчі послідовність чисел

$$a_{k,1}, a_{k+1,2}, a_{k+2,3}, \dots \quad (2)$$

(рис.1).

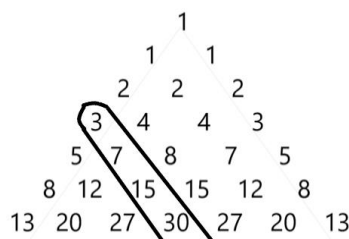


Рисунок 1

а k -ою правою діагоналлю – послідовність

$$a_{k,k}, a_{k+1,k}, a_{k+2,k}, \dots \quad (3)$$

(рис.2).

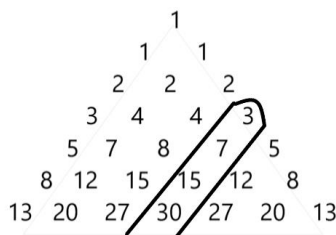


Рисунок 2

Зауважимо, що різниця індексів елементів k -ої лівої діагоналі є сталою і дорівнює $k-1$, а у елементів $a_{i,j}$ k -ої правої діагоналі другий індекс j дорівнює k .

Будемо також говорити, що число $a_{i,j}$ розміщене на j -му місці i -го рядка. І покладемо $u_0 = u_{-1} = u_{-2} = 0$.

Встановлено наступні властивості.

Властивість 1. Для довільного числа $a_{i,j}$ ($1 < j < i$) трикутника Паскаля-Фібоначчі справедливо, що

$$a_{i,j} = a_{i-j,1} + a_{i-j+1,2} + a_{i-j+2,3} + \dots + a_{i-1,j} + u_{i-j-1} = \sum_{\alpha=1}^j a_{\alpha+(i-j-1),\alpha} + u_{i-j-1}.$$

Іншими словами, число $a_{i,j}$ дорівнює сумі чисел лівої $(i-j)$ -ої діагоналі та $(i-j-1)$ -го члена послідовності Фібоначчі.

Властивість 2. Для довільного числа $a_{i,j}$ ($1 < j < i$) трикутника Паскаля-Фібоначчі справедливо, що:

$$a_{i,j} = a_{j-1,j-1} + a_{j,j-1} + \dots + a_{i-2,j-1} + a_{i-1,j-1} + u_{j-2} = \sum_{\alpha=j-1}^{i-1} a_{\alpha,j-1} + u_{j-2}.$$

Іншими словами, число $a_{i,j}$ дорівнює сумі чисел правої j -ої діагоналі, та $(j-2)$ -го члена послідовності Фібоначчі.

Властивість 3. Для довільного числа $a_{i,j}$ ($1 < j < i$) трикутника Паскаля-Фібоначчі справедливо, що:

$$a_{i,j} = S_{i,j} + u_{i-(j-1)} + r_{j-2},$$

де $S_{i,j}$ – сума всіх чисел, що заповнюють «паралелограм», обмежений лівою і правою діагоналями, що містять елемент $a_{i,j}$ (числа цих двох діагоналей не враховуються), $u_{i-(j-1)}$ – $(i-(j-1))$ -ий член послідовності Фібоначчі, r_{j-2} – сума перших $(j-2)$ членів послідовності Фібоначчі.

Властивість 4. Сума чисел у i -му рядку ($i \geq 2$) трикутника Паскаля дорівнює:

$$S_i = 2(u_i - u_{i-1} + S_{i-1}).$$

Висновки. Введено поняття числового трикутника Паскаля-Фібоначчі, виділено деякі його властивості, аналогічні до властивостей трикутника Паскаля. Результати можуть бути використані в подальших дослідженнях числових трикутників та їхніх застосуваннях.

Література. 1. Bondarenko Boris A. Generalized Pascal triangles and pyramids, their fractals, graphs and applications. – 1993. – Режим доступу: <https://www.fq.math.ca/pascal.html> (дата звернення: 12.05.2022).

Математична модель онтологічних графів для інтерпретації досліджень

Євгеній Шаповалов, Віктор Шаповалов,
Національний центр «Мала академія наук України»
 Шаповалова Ірина Миколаївна,
СШЗ №69

Дані сьогодні генеруються з величезною інтенсивністю. Завдяки цьому зараз обробка Big Data є трендом. Обробка Big Data у реальному житті ускладнюється високим приростом публікації наукових досліджень.

Враховуючи те, що більшість досліджень написані на основі IMRAD, він використовувався для забезпечення інтеграції різних досліджень в єдину структуру онтологічного графу [1,2]. Представимо структуру графу як сукупність наступних рівнів:

SS – наукове дослідження (scientific study); L1 – загальна назва батьківського вузла «Наукові звіти»; L2 – назва поля звітів; L3 – частина IMRAD; L4 – Конкретне представлення IMRAD (конкретний метод, використані матеріали, специфічний тип результатів); L5 – конкретні світи звіти, де були використані конкретні концепти IMRAD L4.

Отже, ієрархія на конкретному дослідженні матиме вигляд $SS=\{L2, L3, L4, L5\}$, а для сукупності робіт— у вигляді $\sum SS=\{L1, L2, L3, L4, L5\}$. Альтернативним і більш зрозумілим способом надати абстракцію є повернення цієї моделі і початок з L5 і закінчення L1. У цьому випадку онтологія матиме таку структуру $\sum SS=\{L5, L4, L3, L2, L1\}$. А рівень L4 буде власне описувати структуру IMRAD і описуватиметься рівнянням:

$$\{I, M, R, P\} \in SS$$

Запропонований підхід реалізовано на базі функціоналу КІТ «Поліхедрон». Він дозволяє представити онтологію у об'єктній, табличній, тасономічній формі та формі онтологічної призми. Об'єктний вигляд онтології дослідницьких робіт представлено на рисунку 1, а таксономічний вигляд онтології дослідницьких робіт представлено на рисунку 2.



Рис. 1. Об'єктний вигляд онтології дослідницьких робіт

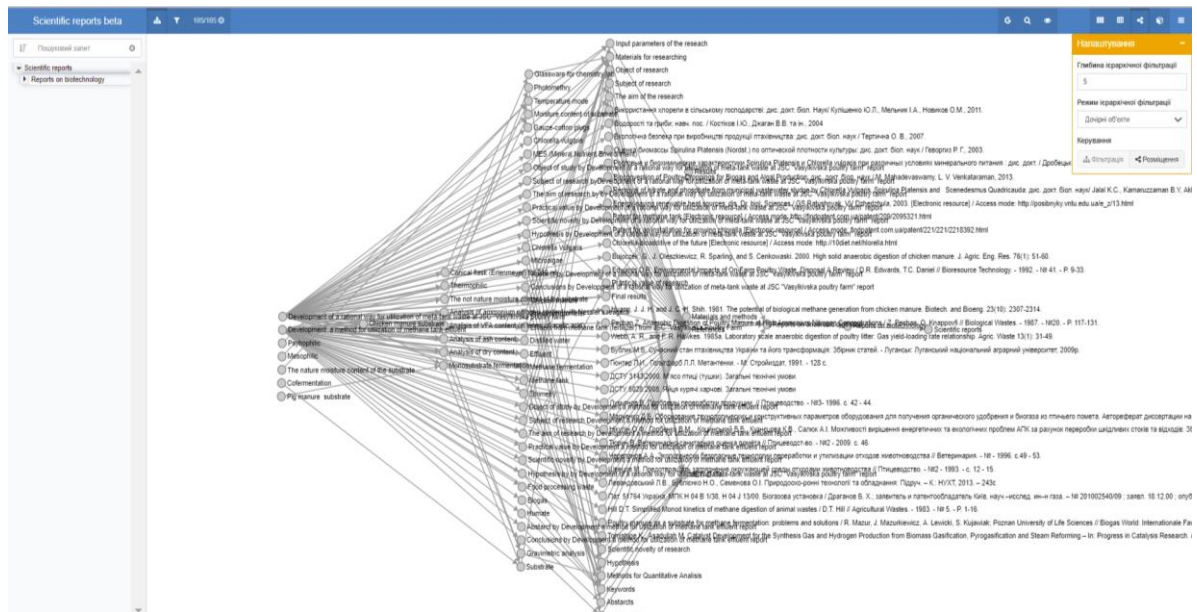


Рис. 2. Таксономічний вигляд онтологій дослідницьких робіт

Подальші рівні будуть описувати концепти що є складовими IMRAD та описують конкретні роботи (L3) та конкретні роботи, до яких відносяться ці концепти (L2) і назву галузі до якої відносяться такі роботи.

Анотація: запропоновано використання онтологічних графів для структуризації наукових робіт за IMRAD

Ключові слова: онтологія, наукові роботи, IMRAD, таксономія

Література:

1. Sharovalov, V. B., Sharovalov, Y. B., Atamas, A. I., & Bilyk, Z. I. (2017a). Інформаційні онтологічні інструменти для забезпечення дослідницького підходу в STEM-навчанні (Information ontological tools to provide a research approach in STEM-education). *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference on Gifted Children—the Intellectual Potential of the State*, 366–370.
2. Шаповалов, В. Б., Шаповалов, Є. Б., & Білик, Ж. І. (2019b). Побудова занять у закладах вищої освіти з використанням єдиного мережецентричного навчального інформаційного середовища на базі іт-платформи «ТОДОС» у контексті євроінтеграційних процесів. *Сучасні Тенденції Розвитку Інформаційно-Комунікаційних Технологій в Освіті*, 72–74.

Оцінка результатів вимірювання магнітної індукції в нерівномірному повітряному проміжку електродинамічного гальма

Ганна Циганкова

Національний університет харчових технологій

Вступ. При експериментальному дослідженні розподілу вектора магнітної індукції, розкладеного на компоненти по осях циліндричної системи координат в робочій зоні електродинамічного гальма з нерівномірним повітряним проміжком в напрямку кутової координати при відсутності ротора, виникає потреба оцінити похибку вимірювання магнітної індукції.

Матеріали і методи. Для дослідження була використана модель електродинамічного гальма, яка дозволяла розміщувати необхідні датчики в робочій зоні [1].

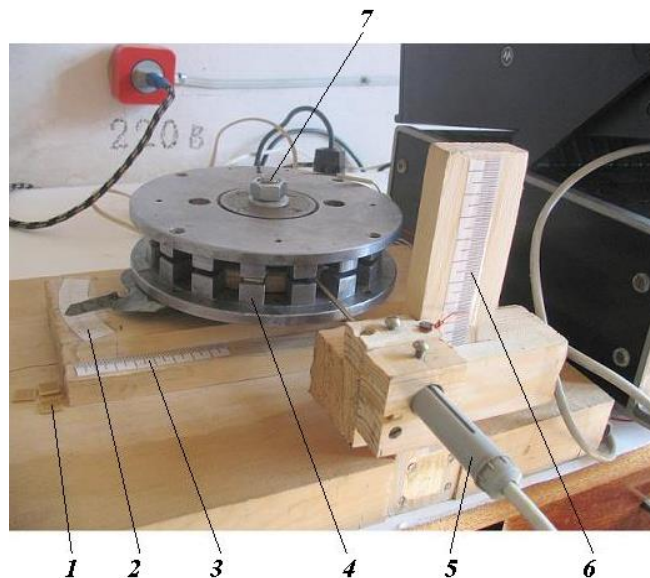


Рис. 1. Стенд для вимірювання осьової та кутової компонент вектора магнітної індукції.

1 – дистанційна прокладка; 2 – шкала кутової координати; 3 – шкала лінійної координати в напрямку обертання; 4 – індуктор; 5 – датчик Холла; 6 – шкала осьової координати.

Результати. На стенді (Рис.1) проведено 4 серії вимірювання осьової та кутової компонент вектора магнітної індукції для різних значень повітряного зазору 5,1 мм, 3,4 мм та 1,7 мм.

Похибка вимірювань пов'язана як з класом точності цифрових вимірювальних приладів, так і обумовлена суб'єктивною систематичною похибкою при знятті показань, неточністю позиціонування датчика в робочій

зоні електродинамічного гальма. Для зменшення цієї похибки значення відповідної компоненти індукції приймалось як половина суми значень цієї компоненти в симетричних точках області вимірювання. В цих точках інша компонента індукції має взаємно протилежні напрямки. Для компоненти з протилежними напрямками в симетричних точках приймалось значення, що дорівнює половині різниці значень в симетричних точках, в яких інша компонента індукції має однакові напрямки.

Компоненти вектора магнітної індукції в робочій зоні електродинамічного гальма вимірювались тесламетром універсальним 43205/1 №1339575 з датчиком Холла до нього ПІП РАД №890008. Для таких вимірювальних приладів класу точності k_k/k_n межа допустимої відносної похибки розраховується за формулою:

$$\delta_x \% = \left[k_k + k_n \left(\frac{X_k}{X} - 1 \right) \right],$$

де k_k – зведена похибка (клас точності) наприкінці діапазону вимірювання; k_n – зведена похибка (клас точності) на початку діапазону вимірювання; X_k – кінцеве значення діапазону вимірювання; X – вимірювана величина [2].

Згідно технічних характеристик приладу для вказаного тесламетра універсального цифрового 43205/1 зведені похибки на початку та наприкінці діапазону вимірювання мають значення $k_k = 1$ та $k_n = 1$. Виміряна індукція знаходиться в діапазоні від 0 до 199,9 *мТл* і абсолютна похибка складе:

$$\Delta X = \left[k_k + k_n \left(\frac{X_k}{X} - 1 \right) \right] \frac{X}{100} = 1,999 \approx 2 \text{ мТл.}$$

Висновки. Для вимірюваних значень магнітної індукції в повітряному проміжку в діапазоні від 20 до 180 *мТл* відносна похибка вимірювань становить від 10% до 1% відповідно. Невиключна систематична похибка результату вимірювання магнітної індукції становить 2 *мТл*.

Література.

1. Циганкова Г. А. Експериментальне дослідження магнітного поля в дископодібному електродинамічному гальмі / Г. А. Циганкова // Праці Інституту електродинаміки НАН України, 2007. – №2(17). – С.112 - 116.
2. Головка Д.Б. Основи метрології та вимірювань / Д.Б. Головка, К.Г. Рего, Ю.О. Скрипник. – К.: Либідь, 2001. – 408 с.

СЕКЦІЯ 2.

МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

Типові задачі при підготовці до ЗНО з математики: раціональні числа і вирази

Олександр Школьний

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ. Актуальність досліджень, присвячених методиці підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) якості знань з математики нині не викликає сумнівів, оскільки це випробування нині стало єдиною формою обов'язкової державної підсумкової атестації (ДПА) з математики та єдиним способом конкурсного відбору при вступі на програми підготовки бакалаврів українських університетів.

Наш авторський колектив (у складі автора цих тез, Юрія та Ліліани Захарійченків та Олени Школьної) протягом останніх 18 років плідно працює над методичним забезпеченням підготовки до ЗНО з математики. Теоретичні основи та окремі практичні аспекти такої підготовки висвітлено в монографії [1]. Для реалізації запропонованої нами методики ми використовуємо власні навчальні посібники [2]-[4], із яких методичний комплект [2]-[3] більш доречно використовувати для роботи з більш математично підготовленими учнями, а посібник [4] – для роботи з учнями, що мають нижчий рівень такої підготовки.

Цією доповіддю ми розпочинаємо серію публікацій, присвячених типовим задачам, які, на нашу думку, варто використовувати вчителям під час підготовки до ЗНО з математики. Безумовно, цими задачами підготовка до незалежного тестування не повинна обмежуватися, але саме на них ми пропонуємо звернути особливу увагу учнів.

Матеріали і методи. Для досягнення поставлених цілей ми використовуємо загальні теоретичні методи наукового пізнання (аналіз, синтез, узагальнення, систематизація), зокрема, аналіз методичної літератури з досліджуваної тематики та узагальнення педагогічного досвіду колег. Також ми застосовуємо емпіричні методи, зокрема, спостереження за навчальним процесом учнів під час навчання на курсах підготовки до ЗНО з математики та аналіз результатів їхніх досягнень.

Результати. Весь курс математики під час систематизації знань і умінь у процесі підготовки до ЗНО нами розбито на 10 тематичних блоків (розділів): «Числа і вирази», «Функції», «Рівняння», «Нерівності», «Текстові задачі», «Елементи математичного аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія», «Координати і вектори», «Елементи стохастики». Така послідовність вивчення матеріалу зумовлена ідеєю спірального повторення: кожен новий тематичний блок використовує матеріал більшості попередніх блоків. Це дозволяє постійно повторювати попередній матеріал і не дає його забувати при переході до нового тематичного блоку.

Розділ «Числа і вирази» природним чином розбивається на підтеми «Раціональні числа і вирази», «Ірраціональні числа і вирази», «Тригонометричні вирази» та «Логарифмічні вирази». Розглянемо дві типові

задачі першої з цих підтем, подані в двох різних формах тестових завдань – із альтернативами та з короткою відповіддю.

Задача 1. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} =$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x-3}{x+3}$	$x+3$	$\frac{1}{x-3}$	$-6x$	$\frac{x+3}{x-3}$

Розв’язання. Виконаємо перетворення виразу, використовуючи формули скороченого множення: $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+3}{x-3}$. Отже, правильною є відповідь Д.

Методичний коментар. Формули скороченого множення є основними під час вивчення раціональних виразів. Від того, наскільки добре учні їх знають та вміють ними користуватися, залежить якість засвоєння не лише цієї теми, а й усіх наступних тем розділу «Числа і вирази», а також подальших розділів. Тому не варто шкодувати часу на розв’язування належної кількості вправ на використання формул скороченого множення.

Зауважимо, що альтернативи до цього тестового завдання містять типові учнівські помилки: дистрактор А відображає помилку, пов’язану з неправильним знаком квадрата двочлена в чисельнику; дистрактор Б оберуть ті, хто забуває про знаменник після скорочення; дистрактор В розрахований на тих, хто забуває про чисельник після скорочення; дистрактор Г отримують як результат ті, хто скорочує доданки, а не множники.

Задача 2. Обчисліть: $0,6 : \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$.

Розв’язання. Спочатку виконаємо дії в дужках: $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{12} = \frac{5}{12}$.

Потім перетворимо десятковий дріб у звичайний: $0,6 = \frac{3}{5}$. Далі виконаємо ділення: $\frac{3}{5} : \frac{5}{12} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$. Оскільки відповідь до завдання слід записати десятковим дробом, то використаємо основну властивість дроби і помножимо чисельник та знаменник дробової частини мішаного числа на 4: $1\frac{11}{25} = 1\frac{44}{100} = 1,44$. Отже, шуканим числовим значенням виразу буде **1,44**.

Методичний коментар. Це тестове завдання спрямоване на перевірку вміння виконувати дії з раціональними числами, котре є одним із ключових для подальшого перетворення виразів, розв’язування рівнянь та нерівностей тощо. Традиційно багато труднощів у учнів викликають дії зі звичайними дробами, а також перетворення звичайних дробів у десяткові й навпаки.

Оскільки в тестових завданнях ЗНО з математики відповідь слід записувати саме десятковим дробом, то варто приділити час на вироблення відповідних навичок в учнів шляхом розв’язування достатньої кількості таких вправ. При цьому наведений у розв’язанні спосіб з використанням основної властивості дроби часто є більш ефективним і швидким, ніж

традиційне ділення чисельника на знаменник у стовпчик.

Висновки. Під час підготовки до ЗНО з математики важливо звертати увагу учнів на суттєві особливості розв'язування задач кожної окремої теми шкільного курсу математики. Для цього варто серед усіх задач теми чи підтеми виокремити типові задачі та добитися від учнів уміння їх впевнено розв'язувати. Це дозволить у подальшому, спираючись на такі задачі, розвинути успіх, закріпити матеріал і добитися впевненості у власних силах у майбутнього учасника тестування.

Слід зауважити, що такі типові задачі не можуть бути універсальними для кожного учня, їх вибір суттєво залежить від рівня сформованості його математичної компетентості, а також від педагогічного стилю та методики, яку використовує той чи інший вчитель. У даній доповіді, обираючи типові задачі з теми «Раціональні числа і вирази», ми орієнтувалися на власний педагогічний досвід і методику підготовки до ЗНО, орієнтуючись на учня середнього рівня навченості.

Наш авторський колектив вважає систематизацію знань з математики під час підготовки до незалежного оцінювання важливим етапом навчання в школі і прикладає всіх можливих зусиль для забезпечення її належної якості. Тому ми зацікавлені в фахових дискусіях із фахівцями в галузі методики навчання математики на цю тему і будемо раді конструктивним пропозиціям щодо вдосконалення методики підготовки до ЗНО.

Література

1. Шкільний О.В. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: Монографія. / О.В. Шкільний. – К.: вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 424 с.
2. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 1: Різномірні завдання / Ю.О. Захарійченко, О.В. Шкільний, Л.І. Захарійченко, О.В. Шкільна. – 11 вид. – Х.: Вид-во «Ранок», 2021.– 496 с.
3. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 2: Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести / Ю.О. Захарійченко, О.В. Шкільний, Л.І. Захарійченко, О.В. Шкільна. – 4 вид. – Х.: Вид-во «Ранок», 2020.– 192 с.
4. Сучасна підготовка до ЗНО з математики / Ю.О. Захарійченко, О.В. Шкільний, Л.І. Захарійченко, О.В. Шкільна.– 2-ге вид., змін. і доповн. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2021. – 232 с.

Навчальний Maple-тренажер з обчислень за розширеним алгоритмом Евкліда

Володимир Михалевич, Оксана Тютюнник,
Олександр Корінний

Вінницький національний технічний університет

Вступ. Науковці та викладачі з різних країн світу постійно проводять пошуки шляхів підвищення ефективності впровадження та використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема, систем комп'ютерної математики (СКМ), у процесі навчання студентів різних спеціальностей [1]. Досвід багаторічного використання СКМ у процесі навчання вищої математики студентів ВЗО [2-5] показав, що одним з найефективніших шляхів адаптації таких систем полягає в створенні та використанні навчальних Maple- тренажерів (НМТ).

Сама концепція адаптації системи Maple, що надає можливість більш повного використання потенціалу цієї системи під час навчання вищої математики студентів нематематичних спеціальностей, розкриття сутності поняття типових задач вищої математики, введення поняття навчальних Maple-тренажерів та обґрунтування необхідності їх створення, впровадження та використання здійснено в працях [6, 7].

В наших працях було запропоновано різні НМТ. Зокрема, в [8] – реалізацію методу числового інтегрування; в [9] – реалізацію застосування диференціала функції однієї змінної до наближених обчислень; в [10] - реалізацію числового генерування методом ВBS псевдовипадкових послідовностей для криптографічних застосувань; в [11] – реалізацію обчислень значень функції Ейлера на основі використання властивостей цієї функції та багато інших.

Ця праця присвячена розробці НМТ для опанування обчислень відповідно алгоритму Евкліда.

Матеріали і методи. НМТ створено у вигляді процедури `My_Euclid` в середовищі СКМ Maple. Використовувати цей тренажер можливо також тільки в середовищі цієї СКМ. Під час розробки тренажера не використовувались стандартні процедури `igcd` – обчислення найбільшого спільного дільника двох цілих чисел та `igcdex` – розширений алгоритм Евкліда для цілих чисел.

Результати. Розширений алгоритм Евкліда для цілих чисел — це розширення алгоритму Евкліда, в якому передбачено обчислення не тільки найбільшого спільного дільника для цілих a і b , а й знаходження цілих x і y , що задовольняють рівнянню Безу.

$$x \cdot a + y \cdot b = \text{НСД}(a, b).$$

Запропонована процедура призначена для висвітлення покрокового ходу обчислень відповідно розширеного алгоритму Евкліда для будь-яких додатних цілих значень аргументу.

Розширений алгоритм Евкліда базується на властивості

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - q \cdot b), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $b \mid a$, то $\gcd(a, b) = b$, якщо ж $b \nmid a$, величина q вибирається так, щоб задовольнити умови $0 < a - q \cdot b < b$.

Відповідно алгоритму задаються початкові значення

$$r_0 = a, r_1 = b; \quad x_0 = 1, x_1 = 0; \quad y_0 = 0, y_1 = 1.$$

Далі починаючи з $k=1$ здійснюються ітераційні обчислення в такій послідовності: спочатку обчислюємо q_k , що дорівнює цілій частині дробу $\frac{r_{k-1}}{r_k}$, після чого визначаємо

$$\begin{pmatrix} r_{k+1} \\ x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{k-1} \\ x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} - q_k \cdot \begin{pmatrix} r_k \\ x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Зупиняються обчислення як тільки виконується умова $r_{k+1} = 0$.

Приклад. За даними [12], поставлена задача знаходження мультиплікативного оберненого числа 1297 за модулем 2080.

Розв'язання. Застосуємо розширений алгоритм Евкліда **My_Euclid(1297, 2080)**;

$$\begin{aligned} a &= 2080, b = 1297 \\ 'r'_0 &= 2080, 'x'_0 = 1, 'y'_0 = 0, [2080 = (2080)] \\ 'q'_1 &= 1, 'r'_1 = 1297, 'x'_1 = 0, 'y'_1 = 1, [1297 = (1297)] \\ 'q'_2 &= 1, 'r'_2 = 783, 'x'_2 = 1, 'y'_2 = -1, [783 = (2080) - (1297)] \\ 'q'_3 &= 1, 'r'_3 = 514, 'x'_3 = -1, 'y'_3 = 2, [514 = -(2080) + 2 (1297)] \\ 'q'_4 &= 1, 'r'_4 = 269, 'x'_4 = 2, 'y'_4 = -3, [269 = 2 (2080) - 3 (1297)] \\ 'q'_5 &= 1, 'r'_5 = 245, 'x'_5 = -3, 'y'_5 = 5, [245 = -3 (2080) + 5 (1297)] \\ 'q'_6 &= 10, 'r'_6 = 24, 'x'_6 = 5, 'y'_6 = -8, [24 = 5 (2080) - 8 (1297)] \\ 'q'_7 &= 4, 'r'_7 = 5, 'x'_7 = -53, 'y'_7 = 85, [5 = -53 (2080) + 85 (1297)] \\ 'q'_8 &= 1, 'r'_8 = 4, 'x'_8 = 217, 'y'_8 = -348, [4 = 217 (2080) - 348 (1297)] \\ 'q'_9 &= 4, 'r'_9 = 1, 'x'_9 = -270, 'y'_9 = 433, [1 = -270 (2080) + 433 (1297)] \\ \gcd &= 1, -270 (2080) + 433 (1297) = 1 \end{aligned}$$

Отже, $1297^{-1} \equiv 433 \pmod{2080}$.

Висновки. Запропонований навчальний Maple-тренажер надає можливість зрозуміти сутність обчислень за розширеним алгоритмом Евкліда і не вимагає від студента здійснення рутинних громіздких обчислень.

Література.

1. Бедратюк Л. П. Використання системи комп'ютерної алгебри Maple в елементарній теорії чисел / Л. П. Бедратюк, Г. І. Бедратюк // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. - 2013. - № 6(4). - С. 10-13. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vejpte_2013_6%284%29__3

2. Михалевич В. М. Навчально-контролюючий Maple — комплекс з вищої математики / В. М. Михалевич // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2004. — № 1. — С. 74–78.

3. Михалевич В. М. Розробка електронних освітніх ресурсів в середовищі СКМ Maple [Текст] / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, Ю. В. Добранюк // Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-практ. конф., 18-19 травня 2017 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. - Вінниця : ФОП Рогальська І. О., 2017. - С. 69-72. Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/index/pages/view/zbirn2018> Дата звернення: Черв. 2018

4. Михалевич В. М. Курс математики для слухачів-іноземців в середовищі СКМ Maple. Алгебраїчні рівняння і системи рівнянь: Електронний освітній ресурс / В. М. Михалевич, Н. Б. Дубова, І. А. Клеопа – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 64 с.

5. Михалевич В. М. Електронний освітній ресурс з курсу математики для слухачів-іноземців в середовищі СКМ Maple [Текст] / В. М. Михалевич, Н. Б. Дубова, І. А. Клеопа // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті ХХІ сторіччя», м. Краматорськ, 15–16 травня 2019 р. – Краматорськ : ДДМА, 2019. – С. 193-195.

6. Михалевич В. М. Розвиток системи Maple у навчанні вищої математики майбутніх інженерів-механіків : монографія / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський. — Вінниця: ВНТУ, 2013. — 236 с. ISBN. — 978-966-641-539-7.

7. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання лінійного програмування студентів ВНЗ: монографія / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник. – Вінниця: ВНТУ, 2016. – 279 с. ISBN 978-966-641-670-7.

8. Михалевич В. М. Електронний ресурс в середовищі Maple як елемент дистанційного навчання у процесі опанування методом числового інтегрування / В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, О. І. Тютюнник // Матеріали Міжнародної науково- методичної Інтернет - конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності» (18-20.05.2020р.) / Вінниця, ВНТУ, 2020. — Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc20/paper/viewFile/10227/8563> . Дата звернення: Травень 2022.

9. Михалевич В. М. Навчальний Maple-тренажер із застосування диференціала функції однієї змінної до наближених обчислень [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, В. О. Гнідунець, В. С. Ланова // І Науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, м. Вінниця. – 2021. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2021/paper/view/11425/9539>. Дата звернення: Травень 2022.
10. Михалевич В. М. Математичні моделі та програмні засоби генерування псевдовипадкових послідовностей для криптографічних застосувань [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник, Є. С. Дремлюга, К. В. Медведєва // І Науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, м. Вінниця. – 2021. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2021/paper/view/11617/9718>. Дата звернення: Травень 2022.
11. Михалевич В. М. Навчальний Maple-тренажер з обчислення функції Ейлера [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Д. Б. Рогачевський, Д. Ю. Желнитський, Б. А. Балух // ІІ Науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, м. Вінниця. – 2022. – Режим доступу: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2022/paper/view/15034/12681>.
12. Стасюк М. М. Скінчені ланцюгові дроби та їх застосування в криптографії [Текст] / М. М. Стасюк, Р. М. Тацій, О. Ю. Пазен // Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті ХХІ сторіччя», 15 – 16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, м. Краматорськ. – Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 26-28. <https://sci.ldubgd.edu.ua/bitstream/123456789/4296/1/Скінчені%20ланцюгові%20дроби%20та%20їх%20застосування%20в%20криптографії%20%281%29.pdf>– 350 с.

**Про науково–методичні проблеми математичного моделювання
в теорії оболонок**

Володимир Максимюк, Євген Сторожук
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Вступ. Спосіб використання ЕОМ та стратегія побудови чисельних методів залежали від обчислювальних потужностей та вимог до точності розрахунків. Першими були розрахунки за аналітичними розв'язками задач математичної фізики, тобто аналітично-чисельні підходи. Проте виявилось, що для деяких значень параметрів обчислити спеціальну функцію важче, ніж чисельно розв'язати диференціальне рівняння, що її породжує. Зі зростанням потужності ЕОМ стало можливим безпосередньо розв'язувати задачі механіки чисельними методами. Це призвело до розвитку суто чисельних методів [1]: методу скінченних різниць (МСР), методу скінченних елементів (МСЕ), варіаційно-різницевого методу (ВРМ). Однак і ці методи виявилися також не всесильними. Триумфальне поширення МСЕ зіткнулося з так званою проблемою замикання (locking) [2]. А розрахунки тонких оболонок складної форми з отворами чи включеннями ускладнюються ще однією проблемою безпосередньої реалізації гіпотези прямої нормалі [1]. Широке застосування сучасних анізотропних композитних нелінійно-пружних матеріалів вимагає крім належної теорії [3], яка описує їх нелінійні властивості, ще й методіку врахування цих властивостей у чисельному методі [1].

Методологія математичних понять. Перелічені та інші проблеми призводять до зміни ролі використовуваних у чисельних методах теорії оболонок математичних понять, розділів, методів. Зазначимо деякі аспекти таких змін у математичних концепціях.

1. Функція. З розвитком чисельних методів зростає значення поняття функції, заданої алгоритмічно. Функція може бути задана аналітично, таблично, графічно, алгоритмічно. З погляду чисельних методів немає особливої різниці, як задана функція. Проте методично у початківця дослідника можуть виникнути певні понятійні труднощі. Буває, вважають, що задача є принципово нерозв'язною, якщо функція задана не аналітично. Більше того, іноді розв'язаність пов'язують з явним виглядом функції.

Наприклад, застосування методу додаткових напружень для розрахунку пружно-пластичних оболонок на основі деформаційної теорії пластичності дозволяє записати вирази для нелінійних складових напружень явно, що на перший погляд, спрощує подальшу побудову алгоритму. А коли таких явних виразів немає, то може сформуватися помилкове з погляду чисельних методів враження про нерозв'язність задачі. Так, у теорії пластичності анізотропних середовищ [3] повні деформації за простого навантаження виражаються через напруження складним чином, що не дозволяє їх аналітично обернути. Це знову ж не дає можливості записати явно нелінійні складові напружень. А проблема легко розв'язується шляхом чисельного обернення [1].

2. Заміна змінних. При переході від однієї системи координат до іншої можна перетворювати такі математичні об'єкти: незалежні змінні, функції, оператори (диференціальні, інтегральні). У часи домінування аналітичних методів перетворення координат застосовувалося до всіх трьох об'єктів. Спочатку така традиція мала місце й у чисельних методах. Проте, очевидно, що можна перетворювати лише окремі об'єкти. Наприклад [1], перетворення тільки незалежних змінних і операторів без заміни функцій дозволяє уникнути складних понять диференціальної геометрії (символів Крістофеля) і спростити постановку і алгоритм розв'язання задач теорії оболонок в криволінійних, можливо, косокутних системах координат. Такий підхід давно використовується у МСЕ під час переходу від глобальної криволінійної системи координат до локальної у межах елемента [1]. Але цей підхід ще не набув популярності серед інших чисельних методів.

3. Матрична алгебра. Зі зростанням потужності ЕОМ дедалі доцільнішим стає запис основних співвідношень теорії та алгоритмів у матричній формі, яка веде до матричних операцій [1]. При застосуванні кількох перетворень координат виникає потреба множення відповідних матриць. За незначного сповільнення алгоритми стають надійнішими та мобільнішими щодо постановки задач.

4. Векторна алгебра. Традиційно геометричні співвідношення для деформацій $(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij})$ записуються у скалярному вигляді через компоненти вектора переміщень (u, v, w) . У декартовій системі координат це не призводить до якихось ускладнень, а в криволінійній системі координат може призвести до явищ типу замикання (мембранне замикання або жорстке зміщення), які виявляються в сповільненій, але стійкій збіжності чисельних методів. Подання деформацій у векторній формі [4] безпосередньо через вектори переміщень $\vec{U} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ і кутів повороту $\vec{\varphi} = \varphi_1\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2$ з подальшим застосуванням чисельного методу також у векторній формі спрощує складання розв'язувальних рівнянь у контурних вузлах і на лініях зламу серединної поверхні оболонки і дозволяє уникнути негативного впливу жорстких зміщень на збіжність результатів. Важлива особливість співвідношень для деформацій у векторній формі полягає також у відсутності в них коефіцієнтів другої квадратичної форми та символів Крістофеля.

5. Множники Лагранжа. Множники Лагранжа є ефективним засобом постановки й розв'язування математичних задач на умовний екстремум. Вони використовуються для формулювання варіаційних принципів та побудови функціоналів з додатковими умовами в теорії оболонок і пластин. Цей потужний апарат широко застосовується, наприклад, для задання крайових умов, умов поєднання конструкцій. Вкажемо на ще одне поле оригінального його застосування в теорії тонких оболонок.

Гіпотези Кірхгофа–Лява в теорії тонких оболонок реалізуються, як правило, шляхом підстановки відповідних співвідношень у формули для розподілу переміщень за товщиною оболонки, тобто аналітично. Тоді в аналітичних, аналітично-чисельних методах ніяких ускладнень не виникає. На

відміну, застосування такого способу у ВРМ чи МСЕ приводить до появи у функціоналах похідних від переміщень вище першого порядку, що є небажаним, оскільки ускладнює побудову дискретного аналога.

Це привело до широко розповсюджених спроб пристосування зсувних моделей для розрахунку тонких оболонок з відмовою від гіпотез Кірхгофа – Лява. Проте пряме застосування зсувних моделей МСЕ до тонкостінних конструкцій нашоується на проблему зсувного замикання. Ці обставини привели до пошуку інших способів реалізації гіпотез Кірхгофа – Лява, серед яких дискретне задання гіпотез в окремих точках елемента, метод штрафних функцій, застосування дельта-функції Дірака для інтерполяції множників Лагранжа, часткове врахування гіпотез та деякі евристичні підходи.

Ідея запропонованого [1] алгоритмічного підходу полягає в накладенні за допомогою множників Лагранжа обмежень, що впливають з геометричної частини гіпотез Кірхгофа–Лява, на теорію оболонок Тимошенка. Отриманий таким способом функціонал для тонких оболонок не містить похідних вище першого порядку, а множники Лагранжа, на відміну від інших подібних підходів, є такими ж варійованими функціями, як і основні розв’язувальні функції задачі (переміщення, кути повороту).

6. Варіаційне числення. З досвіду [1] розв’язування задач теорії оболонок було практично встановлено, що вибір належним чином системи незалежних варійованих функцій дозволяє уникнути небажаних явищ типу замикання і прискорити збіжність чисельних методів. Аналіз, здавалося б різних, причин замикання у ряді задач статички тонких оболонок [2] дозволив сформулювати загальну причину цього обчислювального явища.

Внаслідок невдалого вибору системи координат, системи варійованих функцій або деяких особливостей деформування конструкції між функціями, що варіюються, може виникнути деякий зв’язок. Саме він призводить до обчислювального явища замикання. Причина лежить не в алгебраїчній площині, як це вважалося раніше, а в площині варіаційного числення. Вона полягає в наявності зв’язку в алгебраїчному або диференціальному вигляді між функціями, що варіюються. Відповідно існує загальний метод подолання замикання шляхом додаткового варіювання апріорно малих функцій. Цей підхід є досить універсальним.

Особливо цікавим є залежність прояву мембранного замикання від характеру навантаження в лінійних задачах. Як правило, сіткові обчислювальні методи механіки оболонок в лінійній постановці після дискретизації зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Очевидно, алгебраїчна сторона такого процесу була причиною усталеної думки, що збіжність чисельних методів визначається виключно обумовленістю сформованої матриці і не залежить від правих частин. Тобто збіжність залежить від геометрії та властивостей матеріалу оболонки, але не залежить від навантаження. Зазвичай це дійсно так. Проте сповільнення збіжності може відбуватися ще й за певних особливостей деформування оболонок, які визначаються не тільки конструкцією оболонки, а і її навантаженням.

Вплив навантаження на збіжність було показано на прикладах задач [2] про деформування довгої циліндричної оболонки еліптичного перерізу під дією в одному випадку внутрішнього тиску, а в другому – таких поверхневих сил, що викликають розтяги за відсутності згинів. В першому випадку для досягнення збіжності максимальних угинів до двох значущих цифр потрібно було чверть дуги еліпса (з невеликим, на перший погляд, співвідношенням півосей, рівним 0,9) розбити на 2560 вузлових точок.

В другому випадку в оболонці має виникнути практично безмоментний напружено-деформований стан. Належні поверхневі сили можна легко знайти з рівнянь рівноваги, в яких задати відсутність дотичного переміщення та сталий угин. Компоненти навантаження змінюватимуться вздовж дуги еліпса. Тоді для досягнення збіжності достатньо було всього 11 вузлових точок.

На перший погляд може здатися дивним, що за однієї і тієї ж матриці збіжність залежить від правих частин. Проте, як вже було відмічено, проблема лежить не в алгебраїчній, а в площині варіаційного числення. Хоча, дійсно, є аналогія між лінійною залежністю рядків матриці і зв'язками серед варійованих функцій. Розглянутий випадок має важливе методологічне значення.

7. Функціонал. Заслужують на увагу методичні аспекти побудови лінеаризованих функціоналів [1] у нелінійній теорії оболонок. Так, при застосуванні методу послідовних наближень (МПН) для розв'язування фізично нелінійних задач теорії тонких оболонок можна в кожному наближенні використовувати лінеаризований функціонал $\Pi^{LN} = \Pi^L + \Pi^N$, який хоча і не є істинним функціоналом Π , але має задовольняти варіаційному рівнянню $\delta \Pi^{LN} = \delta \Pi = 0$. Звернемо увагу на відсутність множника $1/2$ перед інтегралами в Π^N на відміну від Π^L .

Висновки. На завершення зазначимо, що в університетах математика викладається фактично в безрозмірних величинах, а інженер-механік повинен мати уявлення про масштаби розмірних фізичних величин. Замість горезвісного геометричного сенсу похідної (тангенс кута нахилу дотичної) він повинен розуміти про розмірний коефіцієнт нахилу. Вважаємо, що у вищій школі потрібно приділити увагу наведеним концептуальним поняттям математики, які, очевидно, є суттєвими і в інших суміжних областях.

Література

1. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Using mesh-based methods to solve nonlinear problems of statics for thin shells // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – 45, N 1. – P. 32–56.
2. Maksimyyuk V.A. Locking Phenomenon in Computational Methods of the Shell Theory // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – 56, N 3. – P. 347 – 350.
3. Ломакин В.А. О теории пластичности анизотропных сред // *Вестн. Моск. ун-та. Математика и механика.* – 1964. – № 4. – С. 49 – 53.
4. Сторожук Є.А. Варіаційний векторно-різницевий метод у нелінійних задачах теорії тонких оболонок з криволінійними отворами // *Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки.* – Дніпропетровськ, 2009. – № 3 (62). – С. 149–156.

**Формування дослідницької компетентності
студентів аграрних ЗВО: використання
методів навчання у процесі вивчення вищої математики**

Наталія Борозенець

Сумський національний аграрний університет

Вступ. Дослідницька компетентність є складовою професійної компетентності, високий рівень якої має забезпечувати високі результати на аграрному виробництві, та невід'ємною частиною практичної діяльності фахівця-аграрія. Уміння, навички, набутий початковий дослідницький досвід, які формуються у процесі вивчення вищої математики, трансформуються з математичної площини в дослідницьку.

Формування дослідницької компетентності студентів аграрних ЗВО у процесі вивчення вищої математики реалізується різними методами, серед яких, на нашу думку, результативними є методи, що спираються на рівні пізнавальної активності та самостійності студентів. Серед них репродуктивний, проблемний, метод проектів, частково-пошуковий (евристичний), пошуковий (дослідний), метод математичного моделювання, метод конкретних ситуацій (case-study).

Матеріали і методи. Теоретичні методи: аналіз, систематизація й узагальнення результатів педагогічних досліджень, законодавчих і нормативних документів; емпіричні методи: педагогічне спостереження за освітнім процесом, аналіз досвіду роботи.

Результати. Зупинимось коротко на кожному із запропонованих методів.

Репродуктивний метод ґрунтується на відомих студентам фактах, на раніше отриманих знаннях. Студенти виконують завдання за зразком, застосовуючи раніше чи безпосередньо засвоєні знання. Ці завдання сприяють відпрацюванню практичних умінь і навичок, виконанню вже визначених алгоритмів. Знання алгоритмів та способів дій дає можливість сконцентруватися на розв'язанні основної проблеми, формуванні методу чи способу її розв'язування, визначенні відповідних теоретичних основ, плануванні дослідної діяльності, прогнозуванні її результату. Найбільш ефективним застосування цього методу є в тих випадках, коли зміст навчального матеріалу має інформативний характер, є описом способів практичних дій. Зазначений метод збагачує знання, формує навички та вміння, створює змістово-операційний фонд навчальної діяльності.

Під час використання проблемного методу навчання викладач ставить проблему, формулює пізнавальну задачу та, розкриваючи систему доказів, показує логічний шлях її вирішення студентам, демонструє прийоми та методи дослідження, теоретичні засади, завдяки яким одержуються нові знання та способи діяльності. Таким чином демонструються зразки наукового пізнання, наукового розв'язання проблеми, а студенти слідкують за логікою міркувань, основними етапами розв'язування, доведення чи дослідження.

Метод проектів - це система навчання, у процесі якої студенти здобувають знання, формують навички та вміння шляхом планування і виконання практичних завдань, які поступово ускладнюються; це спосіб, що дає змогу ефективно спланувати дослідження для того, щоб досягти результату в оптимальний спосіб. У зазначеному методі домінують дослідницька, пошукова, творча, прикладна та інші види діяльності. Він завжди орієнтований на самостійну діяльність студентів, яку студенти виконують протягом певного відрізка часу. Метод проектів передбачає розвиток у студентів вміння конструювати свої знання, презентувати результати своєї роботи, формує навички самоорганізації, забезпечує ознайомлення їх з різними способами опрацювання інформації, сприяє підвищенню мотивації до отримання нових знань, розвитку вмінь продукувати, аргументувати та доводити свої ідеї, передбачає розвиток творчих і дослідницьких здібностей, формує комунікативні уміння та навички, розвиток критичного мислення, формує вміння працювати з інформацією, аналізувати, систематизувати, узагальнювати, встановлювати асоціації з раніше вивченим, робити висновки, висувати ідеї, знаходити варіанти розв'язання проблеми, передбачати можливі наслідки рішень, обґрунтовувати власну думку, прогнозувати результати своєї діяльності, забезпечує усвідомлення власних дій щодо самодисципліни та відповідальності.

Під час використання частково-пошукового методу навчання викладач ставить перед студентами пізнавальне пошукове завдання. Ці завдання спонукають до аналізу фактів і підводять до самостійних висновків, тобто організовується активний навчальний пошук, який при цьому поетапно контролюється і спрямовується викладачем. Частково-пошуковий метод навчає визначати проблему, здійснювати аналіз її змісту та походження, визначати понятійний апарат, систему категорій, принципів, методологічну основу, робити висновки з одержаних фактів, переформулювати завдання, висувати гіпотези, здійснювати рефлексію виконаної діяльності. Вказаний метод націлює на активну самостійну пізнавальну діяльність, актуалізує наявні знання, навчає здійснювати аналіз, самоконтроль, рефлексію в процесі виконання певної дії та операції, дозволяє конструювати, проектувати власну діяльність.

Сутність дослідницького методу навчання можна визначити як спосіб організації самостійної пізнавальної діяльності з метою розв'язування професійно-спрямованих завдань. Після постановки проблеми, формулювання завдання і короткого інструктажу, студенти самостійно працюють над літературою, проводять спостереження, висувають гіпотезу, шукають і знаходять шляхи їх розв'язання. Головне завдання дослідницького методу полягає в тому, щоб навчити студента самостійно оволодівати теоретичними знаннями, досліджувати предмет, явище, процес, розв'язувати прикладні задачі, що можуть пропонуватись у освітньому процесі, майбутній професійній діяльності. Дослідницький характер діяльності студентів виявляється у цьому випадку найбільш повно, методи навчальної роботи безпосередньо зближуються з методами наукового дослідження. Отже, саме цей метод найбільшою мірою забезпечує виконання поставлених цілей розвитку

дослідницьких якостей, формування суб'єкта навчально-професійної та науково-дослідної діяльності.

Метод математичного моделювання в процесі навчання є важливим інструментом формування нових знань і творчих здібностей студентів; ефективного засвоєння нового матеріалу, систематизації і наочного втілення знань; освідомлення і фіксації суттєвих властивостей і зв'язків досліджуваних об'єктів і явищ; формування професійних умінь; розвитку самостійної діяльності студентів. Математичне моделювання – засіб вивчення реальних професійних ситуацій шляхом їх заміни зручнішою для експериментального дослідження моделлю, яка зберігає істотні риси оригінала. Дослідження об'єкту моделювання і складання його математичного опису полягають у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень. Метод математичного моделювання дозволяє вивчати поведінку об'єкту моделювання при різних значеннях параметрів, прогнозуючи характер її змін з аналізу математичної моделі; аналізувати можливість застосування різних елементів; отримувати характеристики і показники, які складно отримувати експериментально. У процесі вирішення професійно-спрямованих завдань розвивається вміння виявляти причинно-наслідкові зв'язки між показниками, які виникають у процесі сільськогосподарської діяльності, і їх математичним описом, що сприяє поглибленню та систематизації знань як з математики, так і з фахових дисциплін. Застосування методу математичного моделювання допоможе сформувати у студентів цілісну систему математичних знань студентів.

Метод конкретних ситуацій або case-метод являє собою спеціальну методику навчання, яка передбачає використання конкретних ситуацій для аналізу, обговорення або знаходження рішення з певної проблеми чи теми навчального курсу, дає змогу наблизити навчання до реалій сільськогосподарської діяльності. Він передбачає розбір або вирішення конкретних ситуацій аграрного виробництва, який включає і самостійну роботу студентів, і «мозковий штурм» в межах малої групи, і публічний виступ із представленням і захистом висунутого рішення. Суть методу полягає в тому, щоб, детально вивчивши один або декілька випадків, розкрити зміст процесів, що протікають в аграрному виробництві, краще зрозуміти явище, що вивчається, і запропонувати множину інтерпретацій. У методологічному плані метод конкретних ситуацій ґрунтується на якісних методах збору та аналізу емпіричного матеріалу. Кейс-метод орієнтований більшою мірою на розвиток аналітичних здібностей й уміння приймати адекватні рішення, ніж на розширення кола теоретичних знань і умінь. Основними цілями кейс-методу є розвиток навичок аналізу і критичного мислення; зв'язок теорії і практики; подання прикладів прийнятих професійних рішень; подання різних точок зору; формування навичок оцінки альтернативних варіантів в умовах невизначеності.

Висновки. На нашу думку, саме вище перераховані методи навчання найбільш ефективно формують дослідницьку компетентність студентів аграрних ЗВО у процесі вивчення вищої математики.

**Використання мови Python для розв'язування деяких задач з курсів
«Математичне програмування» та «Лінійна алгебра»**

Ольга Бондаренко, Яніна Гончаренко

*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова***Вступ.**

На сьогодні використання систем комп'ютерної математики (СКМ), онлайн калькуляторів, спеціальних програмних засобів та мов програмування в навчанні математичних дисциплін є розповсюдженою практикою. Достатньо добре розроблені і описані теоретико-методичні основи створення і застосування комп'ютерно-орієнтованих методик (методичних систем) навчання окремих дисциплін [1].

Існує величезна кількість програмних засобів, які допомагають розв'язувати окремі класи математичних задач: автоматизувати обчислення, здійснювати візуалізацію побудов, проводити дослідження. Це безперечно є позитивним фактором, оскільки дозволяє кожному користувачу знайти «свій» програмний продукт, функціонал якого найкращим чином допомагатиме вирішити поставлену задачу. В той же час в такій великій кількості програмних продуктів може бути складно розібратись користувачу-початківцю, та навіть викладачу або студенту.

Найчастіше в навчанні математичних дисциплін в використовуються наступні програмні пакети: MathCAD, MatLab, Maple, Mathematica, Maxima, Sage [2]. MathCAD, MatLab – це системи автоматизованого проектування, що дозволяють автоматизувати обчислення та виконати візуалізацію. Maple і Mathematica – безперечні лідери серед систем комп'ютерної математики, оскільки здатні розв'язувати широкий спектр математичних задач, в тому числі виконувати символічні перетворення. Основним їх недоліком є те, що вони є комерційними. Безкоштовними аналогами перелічених СКМ є зокрема Maxima, Sage, Аxiom, які також мають досить зручний інтерфейс та потужний функціонал.

На нашу думку, одним з перспективних напрямків створення та застосування СКМ є використання мови Python. Мова Python – сучасна об'єктно-орієнтована мова програмування високого рівня, яка легко підійде для роботи як початківцям, так і професіоналам. За допомогою неї можна створювати ігри, розв'язувати математичні задачі та створювати складні проекти. Ця мова простіша в синтаксисі (менше слів, дужок, символів) та є зрозумілою для тих, хто вивчав, хоча б трохи, англійську мову. Велика кількість провідних університетів світу (близько 80%) використовують саме Python для вступних курсів з програмування. Надбанням є наявність великої кількості бібліотек та модулів, що надають необхідний інструментарій для введення Python-розробок у безлічі сфер, зокрема, для наукових обчислень.

Матеріали та методи.

В даній роботі обґрунтовано доцільність та проілюстровано на прикладах можливість використання мови програмування Python для розв'язання задач з лінійної алгебри та математичного програмування.

Результати.

Доцільність використання мови Python в навчанні студентів математичних дисциплін, зокрема «Лінійної алгебри» та «Математичного програмування», обумовлюється рядом чинників, зокрема:

- 1) в багатьох школах України на уроках інформатики учні вивчають саме мову Python;
- 2) ця мова є простою для опанування та має багато математичних бібліотек;
- 3) Python працює на різних платформах (Windows, Mac, Linux, Raspberry Pi тощо);
- 4) Python має простіший синтаксис, ніж у більшості інших мов програмування;
- 5) з офіційного сайту можна завантажити безкоштовний інтерпретатор для Python – IDLE, використання якого спрощує написання та налагодження програми, або працювати з командним рядком.

Розглянемо приклад застосування мови Python для розв'язання задачі лінійного програмування.

Зазначимо, що спочатку студенти мають навчитись розв'язувати задачі подібного типу симплекс-методом. Переходити до написання коду в Python можна після того, як у студентів буде сформовано: знання математичної моделі задачі лінійного програмування, знання умов, що задовольняють опорний та оптимальний розв'язки задачі, вміння розв'язувати таку задачу симплекс-методом, вміння зводити задачу до канонічної форми та виконувати жорданові виключення.

Задача 1. Розв'язати задачу лінійного програмування:

$$z = 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 10, \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі ми обрали бібліотеку Python `Scipy.optimize.linprog`, яка дозволяє знайти найменше значення цільової функції за умови, що система обмежень складається з лінійних рівнянь або нерівностей.

За допомогою функції

`scipy.optimize.linprog(c, A_ub=None, b_ub=None, A_eq=None, b_eq=None, bounds=None, method='interior-oint', callback=None, options=None, x0=None)`

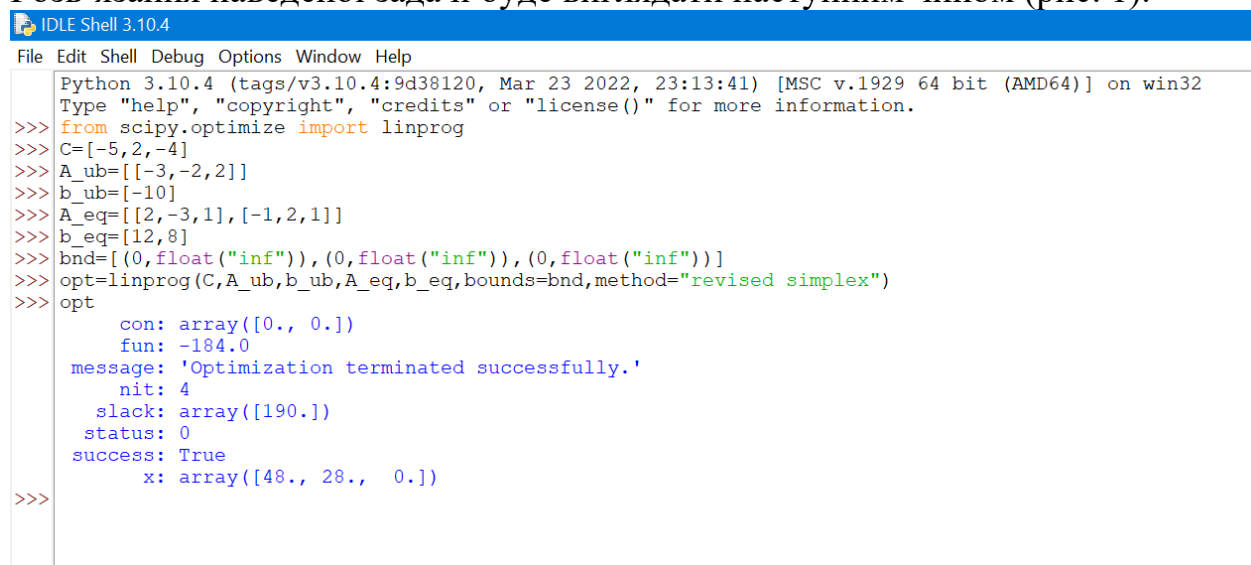
можна розв'язати лінійну оптимізаційну задачу виду:

$$\min z = cX,$$

$$\begin{cases} A_{ub}X \leq b_{ub}, \\ A_{eq}X = b_{eq}, \\ l \leq X \leq u, \end{cases}$$

де c – матриця-рядок коефіцієнтів цільової функції, X – вектор незалежних змінних, A_{ub} та A_{eq} – матриці коефіцієнтів при змінних в нерівностях та рівняннях відповідно системи обмежень, b_{ub} та b_{eq} – матриці вільних членів, l, u – матриці обмежень для значень незалежних змінних. В команді *method*= вказується алгоритм, який буде використовуватись при розв'язанні задачі: «highs-ds», «highs-ipm», «highs», «interior-point» (за замовчуванням), «revised simplex» (рекомендуємо).

Розв'язання наведеної задачі буде виглядати наступним чином (рис. 1).



```

IDLE Shell 3.10.4
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.10.4 (tags/v3.10.4:9d38120, Mar 23 2022, 23:13:41) [MSC v.1929 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.optimize import linprog
>>> C=[-5,2,-4]
>>> A_ub=[[-3,-2,2]]
>>> b_ub=[-10]
>>> A_eq=[[2,-3,1],[-1,2,1]]
>>> b_eq=[12,8]
>>> bnd=[(0,float("inf")), (0,float("inf")), (0,float("inf"))]
>>> opt=linprog(C,A_ub,b_ub,A_eq,b_eq,bounds=bnd,method="revised simplex")
>>> opt
      con: array([0., 0.])
      fun: -184.0
  message: 'Optimization terminated successfully.'
       nit: 4
      slack: array([190.])
      status: 0
      success: True
         x: array([48., 28., 0.])
>>>

```

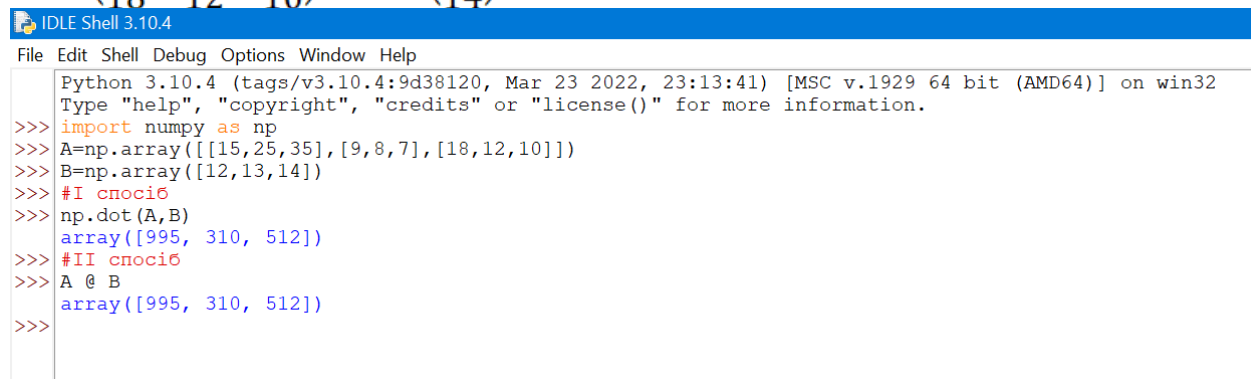
Рис.1.

Бачимо, що всього дев'ять рядків програми і задача розв'язана.

Наведемо приклади застосування Python для розв'язання деяких задач з лінійної алгебри.

Задача 2. Знайти добуток двох матриць A і B , якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 35 \\ 9 & 8 & 7 \\ 18 & 12 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$



```

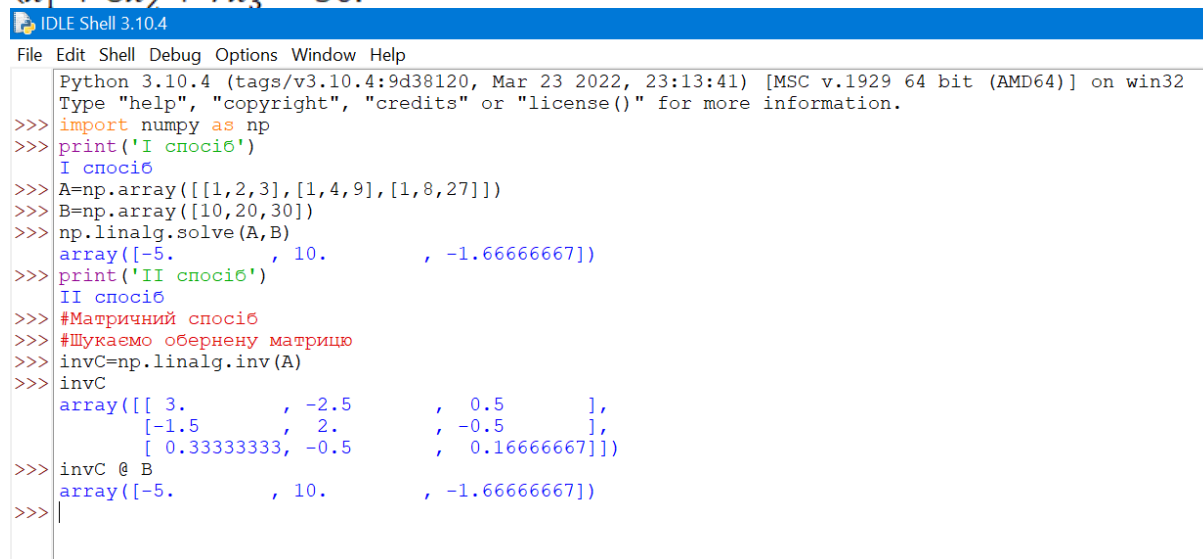
IDLE Shell 3.10.4
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.10.4 (tags/v3.10.4:9d38120, Mar 23 2022, 23:13:41) [MSC v.1929 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> import numpy as np
>>> A=np.array([[15,25,35],[9,8,7],[18,12,10]])
>>> B=np.array([12,13,14])
>>> #I спочи6
>>> np.dot(A,B)
array([995, 310, 512])
>>> #II спочи6
>>> A @ B
array([995, 310, 512])
>>>

```

Рис.2.

Задача 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь, якщо:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 20, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 30. \end{cases}$$



```
Python 3.10.4 (tags/v3.10.4:9d38120, Mar 23 2022, 23:13:41) [MSC v.1929 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> import numpy as np
>>> print('I спосіб')
I спосіб
>>> A=np.array([[1,2,3],[1,4,9],[1,8,27]])
>>> B=np.array([10,20,30])
>>> np.linalg.solve(A,B)
array([-5.         , 10.         , -1.66666667])
>>> print('II спосіб')
II спосіб
>>> #Матричний спосіб
>>> #Шукаємо обернену матрицю
>>> invC=np.linalg.inv(A)
>>> invC
array([[ 3.         , -2.5        ,  0.5         ],
       [-1.5        ,  2.         , -0.5         ],
       [ 0.33333333 , -0.5         ,  0.16666667]])
>>> invC @ B
array([-5.         , 10.         , -1.66666667])
>>> |
```

Рис. 3.

Висновки.

Застосування математичних бібліотек Python в навчанні математики дозволяють суттєво збільшити кількість та розширити коло задач, які можуть розв'язати студенти. При цьому студенти зможуть сконцентрувати увагу на основних ідеях, концепціях, ключових фактах та методах, а не на громіздких алгебраїчних обчисленнях і перетвореннях.

Використання Python в математичних обчисленнях не є складним і не вимагає суттєвої додаткової підготовки. В той же час при такому підході у на заняттях з математики у студентів формуються не тільки математичні, а й цифрові та загальні компетентності.

Завдання на використання Python в курсі математичного програмування або лінійної алгебри можна пропонувати студентам в розрахункових роботах, а також на практичних заняттях.

Література:

1. Триус Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання: монографія / Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.
2. Гап'як І.В. Методичні вказівки до застосування математичних пакетів для чисельноаналітичного розв'язування задач : для студентів механіко-математичного факультету / І. В. Гап'як, Б.П. Довгий, Є.С. Вакал, А.В. Ловеїкін. – К., 2021. – 135 с.
3. Гончаренко Я. В. Математичне програмування / Я.В.Гончаренко. – К.: вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – 144 с.
4. <https://edu.cbsystematics.com/ua/blog/python-start-blog>
5. <http://www.plugin.org.ua/documentation/about-python>

Особливості дистанційно форми організації навчального процесу

Юлія Васютинська

Національний університет харчових технологій

Вступ. Сьогодення ставить перед системою вищої освіти нові завдання, що полягають у зміні змісту, форм і методів навчання. Все більшого поширення набуває використання інформаційного простору, сучасних освітніх технологій дистанційного та електронного навчання. В силу обставин, що складаються у світі, постає необхідність готовності до дистанційної форми навчання.

Матеріали і методи. В умовах запровадження в систему вищої освіти України зарубіжного досвіду, насамперед визначеного Болонською конвенцією, є актуальним вивчення аспектів розвитку дистанційної освіти, як прогресивного навчання. Традиційно, дистанційне навчання є формою освітнього процесу, що орієнтоване на індивідуалізацію освітнього процесу. За даними ЮНЕСКО дистанційне електронне навчання одного студента приблизно втричі дешевше очного навчання в системі освіти тієї ж країни. В Україні дистанційна форма освіти було запроваджена ще в 2000 році і регулюється Концепцією розвитку дистанційної освіти в Україні і Положенням про дистанційну освіту МОН України [3].

В сучасному світі, з швидким темпом розвитку технологій та змін вимог до спеціаліста, дистанційні технології навчання можна розглядати як природний етап еволюції традиційної системи освіти від дошки з крейдою до електронної дошки й комп'ютерних навчальних систем, від звичайної аудиторії до віртуальної. В багатьох країнах дистанційна освіта є пріоритетним напрямом реорганізації традиційної системи.

Застосування технологій дистанційного навчання підвищує та вдосконалює ефективність освітнього процесу, що значною мірою залежить від рівня підготовки педагогів до реалізації дистанційного навчання, а також від готовності самих студентів навчатися в умовах дистанційної освіти. Не менш важливим для ефективного освітнього процесу в умовах дистанційного навчання є науково-методичне та матеріально-технічне забезпечення [1].

Дистанційне навчання може реалізовуватися у двох варіантах: – дистанційне навчання як окрема форма здобуття освіти (дистанційна) – здобувачі освіти не відвідують заклади вищої освіти і опановують навчальні предмети лише віддалено; – застосування технологій дистанційного навчання за будь-якої форми здобуття освіти (очна, заочна, екстернатна) – здобувачі освіти навчаються частково офлайн, частково онлайн («змішане навчання»). Саме за поєднанням очної форми навчання та технологій застосування дистанційного навчання з'явився термін «змішане навчання» [1,4].

Результати. Основними переваги дистанційного навчання є:

- 1) значно більший вибір навчального закладу та освітніх можливостей, незалежно від місцезнаходження та фінансових можливостей.
- 2) навчання у відповідності до власного темпу та часу засвоєння знань та організації життя.

3) потреба у використанні під час процесу навчання нових сучасних технологій, програм підвищує рівень майбутнього фахівця.

Основні недоліки:

1) необхідність наявності у студента вміння навчатися самостійно, здатність до самоорганізації та вчасного виконання завдань.

2) відсутність або обмеженість живого спілкування між викладачем та студентом (відбувається менш ефективна, безособистісна передача знань).

3) забезпечення достатнім технічним обладнанням та постійним доступом до мережі Інтернет.

Висновки. Дистанційне навчання сприяє формуванню таких особистісних якостей як активність, самостійність, креативність, творчість, відповідальність, цілеспрямованість. Тому здобувач освіти має вчитися працювати у команді дистанційно, підвищити власну інформаційно-цифрову компетентність, вміти виокремити та опрацювати необхідний зміст навчальної дисципліни, мотивуватися до здійснення освітньої діяльності. Дистанційна форма навчання передбачає інше розуміння сутності навчання, ролі викладача і студентів у цьому процесі. Для ефективності такого навчання необхідна відповідна технічна база, програмне забезпечення та технічна підтримка організації навчального процесу забезпечена ВЗО.

Варто зважати на глобальні зміни в освіті, що їх спричинили різні зовнішні фактори. Світ змінився незворотно, тож потрібно адаптувати систему освіти до роботи з більш інтенсивним використанням дистанційної та змішаної форм навчання [2]. Це може стати можливістю вирішити деякі з проблем української освіти, такі як нестача кваліфікованого персоналу та навчальних матеріалів, проблеми з доступом до освіти студентів з ізольованих населених пунктів у ЗВО.

Література.

1. Ткаченко Л. В. Особливості впровадження дистанційного навчання в освітній процес закладу вищої освіти / Ткаченко Л. В., Хмельницька О. С // Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах. - 2021. - № 75. Т.3. – С. 91-96. - Режим доступу: <https://doi.org/10.32840/1992-5786.2021.75-3.18>

2. Гнедкова О.О. Педагогічні умови формування фахових знань майбутніх учителів іноземних мов у процесі дистанційного навчання: дис. канд. пед. наук: 13.00.04. Херсон, 2017.

3. Самолюк Н. Актуальність і проблемність дистанційного навчання / Н. Самолюк, М. Швець // Нова педагогічна думка. - 2013. - № 1.1. - С. 193. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Npd_2013_1_50

4. Сайт Українського центру дистанційного навчання. Режим доступу: www.distance-learning.com.ua

Застосування інтерактивних методів навчання

Лев Величко, Надія Гузик,
Христина Ліщинська

*Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного*

Умови сьогодення диктують нові вимоги до професійної підготовки майбутніх фахівців, зокрема військових. Найбільші зусилля сьогодні спрямовано на підготовку не просто високоосвічених працівників, а професіоналів, які здатні нестандартно мислити, самостійно приймати рішення, мобільні, конкурентоспроможні. Це означає, що основне завдання педагога сьогодні – бути спеціалістом з людського розвитку, а не просто викладачем-предметником, тобто фахівцем окремої галузі знань.

Одним зі шляхів впровадження інновацій є застосування інтерактивних методів у навчальному процесі. Мова йде не про відмову від використання відомих класичних методів, а про їх поєднання у навчальному процесі з більш сучасними, орієнтованими на особистість, здатну до саморозвитку. Застосування різноманітності методів приведе до вміння розв'язувати складні завдання на основі аналізу вихідних даних, визначати протиріччя, висловлювати альтернативні думки, приймати виважені рішення, брати участь у дискусіях, моделювати різноманітні ситуації, вчитися будувати конструктивні відносини в колективі, визначати своє місце в ньому, уникати або ж розв'язувати конфлікти, прагнути до постійного спілкування, розвивати навички творчої діяльності.

Слово "інтерактивний" означає здатний до взаємодії, діалогу, а, отже, інтерактивне навчання – це така форма організації навчальної діяльності, яка передбачає активну взаємодію курсантів між собою та з викладачем. Воно передбачає виконання таких принципів: активності, зворотного зв'язку, експерименту, довіри, рівності поглядів. В умовах інтерактивного навчання забезпечується формування в його учасників таких умінь, як аналіз, порівняння, виділення головного, а також критичне мислення та здатність приймати відповідальні рішення, конкурентоспроможність, готовність до ризику, що особливо актуально для військовослужбовців під час проходження служби.

Наведемо приклади застосування інтерактивних методів при викладанні окремих тем з курсу вищої математики для курсантів вищих військових навчальних закладів.

Найпростішими у застосуванні та найбільш вживаними вважаються методи «питання-відповідь» та «мікрофон». Використовуються вони для апробації знань попередніх тем чи на завершальному етапі заняття, коли курсанти дають короткі відповіді на запитання викладача чи навпаки викладач відповідає на питання курсантів. Так, наприклад, вміння курсантів визначати координати вектора за відомими координатами його початку і кінця, елементи матриці, транспонованої до заданої, похідні елементарних функцій легко перевірити за допомогою методу «питання-відповідь».

Для постійної підтримки уваги курсантів пропонується використання «матеріалів з задалегідь запланованими помилками». Для прикладу, цей метод добре ілюструється при вивченні різних типів рівнянь прямої на площині чи у просторі, рівнянь площини.

«Брейнстормінг» застосовується у процесі обговорення конкретної ситуації, яка потребує колективного прийняття ефективного рішення. Цей метод спрямований на спонтанне генерування великої кількості ідей для вирішення конкретної проблеми і вибір з наявних пропозицій найбільш вдалих. Для прикладу, це може бути вибір методу для розв'язування системи лінійних рівнянь (Гауса, Крамера, матричний), найефективнішої заміни змінної, для обчислення інтеграла, правильних гіпотез для застосування формули повної ймовірності тощо. Завдання викладача полягає у вмінні спрямувати ці ідеї у правильне русло, відділити істину від ілюзій, конструктивні рішення, які будуть працювати, від тих, які будуть неефективними і, таким чином, наблизити курсанта до результату.

Важливим також є впровадження елементів гри в процес навчання – метод «гейміфікації». Це дає можливість проявити фантазію, покращити навички швидкого реагування та комунікабельності, логічного мислення, вчить особистої відповідальності та вміння працювати в колективі з метою прийняття усвідомлених рішень заданих проблем, розвиває навички пунктуальності, уваги до оточуючих, взаєморозуміння та взаємоповаги до кожного з учасників колективу, почуття солідарності й рівності.

Метод «інтенсифікації» передбачає досягнення в навчанні бажаних результатів за рахунок напруження розумових можливостей особистості, передання курсантам більшого обсягу навчальної інформації при незмінній тривалості навчання без зниження вимог до якості знань. Він передбачає, що викладач приділятиме увагу кожному курсанту окремо, оскільки рівень підготовки та індивідуальні особливості у кожного із них є різні, відповідно й питання, які виникають у них при розв'язуванні задач відрізняються. Контролюючи хід розв'язання завдань, викладач має можливість відповідати на ці питання й допомагати подолати свої перешкоди. Метод інтенсифікації забезпечує високу якість засвоєння навчального матеріалу, сприяє розвитку логічного мислення, творчих здібностей та активному мотивованому процесу засвоєння знань.

Застосування інтерактивних методів навчання сприятиме підвищенню якості військової освіти, що, очевидно, сприятиме примноженню професійних, інтелектуальних, культурних здібностей майбутніх військових фахівців.

Методичні аспекти надання рекомендацій щодо вдосконалення навчально-освітньої діяльності

Вячеслав Горборуков, Олег Франчук

Національний центр "Мала академія наук України"

Вступ. Результати навчально-освітньої, як і будь-якої іншої людської діяльності, на практиці можуть оцінюватися за багатьма показниками – критеріями. До таких, наприклад, можна віднести: рівень інтелектуального розвитку особистості, обсяг і якість набутих навчальних компетентностей, практичні вміння та навички та багато інших. У випадках коли за подібними показниками здійснюється оцінювання успішності здобувачів освіти може виникнути задача виявлення тих складових освітньої підготовки даного індивіда, що фактично занижують його загальну оцінку і на які потрібно звернути увагу в першу чергу. Таким чином виникає математична задача, яка полягає у необхідності з мінімальними витратами (зусиллями) поліпшити критеріальні значення суб'єкта для досягнення певного наперед заданого якісного рівня.

Постановка задачі. Розглядається задача ранжування альтернатив $a \in A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ (A – множина альтернатив) за сукупністю показників $f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)$ [1]. Кожна функція $f_j(a)$, $j \in J = \{1 \dots m\}$ задає значення j -го критерія, які є зліченною множиною, позначимо її, як Q_j :

$$Q_j = \left\{ f_j^{(1)}, f_j^{(2)}, f_j^{(3)}, \dots, f_j^{(n_{j-1})}, f_j^{(n_j)} \right\},$$

Для встановлення порядку

$$a_{i_1} \succ a_{i_2} \succ \dots \succ a_{i_n} \quad (1)$$

по кожному елементу множини A береться до уваги деякий узагальнений показник $G(a)$:

$$G(a) = G(f(a), W), \quad (2)$$

де $a \in A = \{a_1, \dots, a_n\}$, W – є нормованим вектором вагових коефіцієнтів кожного критерія [2, 3] ($W = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$, $\omega_j > 0$).

Значення $G(A_i)$ обчислюються за певним правилом (алгоритмом), причому

$$G(a_{i_1}) \geq G(a_{i_2}) \geq \dots \geq G(a_{i_n}) \quad (3)$$

Отже, після розв'язку задачі (1) – (3) виникає інша задача – при яких мінімальних змінах значень $f_j(A')$, $j \in J$ можна покращити узагальнений показник обраної альтернативи A' до заданого значення G' .

Для кожного критерія $j \in J$ розглянемо впорядковану множину $\Theta_j = \{\theta_j^0, \theta_j^1, \theta_j^2, \dots, \theta_j^{l_j}\}$:

$$\tilde{Q}_j = \{f_j(A') + \theta_j^0, f_j(A') + \theta_j^1, \dots, f_j(A') + \theta_j^{l_j}\} \subset Q_j, \theta_j^0 < \theta_j^1 < \dots < \theta_j^{l_j},$$

$$\theta_j^0 = 0.$$

Множина \tilde{Q}_j утворена такими значеннями показника f_j , які є більшими від $f_j(A')$, l_j – кількість перших таких значень серед усіх можливих, $0 \leq l_j \leq |\hat{Q}_j| + 1$, \hat{Q}_j – множина всіх значень критерія f_j більших ніж $f_j(A')$:

$$\hat{Q}_j = Q_j \setminus \{f_j^{(1)}, f_j^{(2)}, f_j^{(3)}, \dots, f_j(A')\}$$

Визначається новий вектор переваг $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $\sum_{j=1}^m v_j = 1$ з таких міркувань. Чим складніше для альтернативи A' по j -му показнику досягти покращення значення, тим більший коефіцієнт v_j , $j \in J$. Зауважимо, що в кожному конкретному випадку може існувати своя специфіка в залежності від типу початкової задачі (1)-(3).

Таким чином математична модель задачі, що розглядається, має вигляд:

$$h(\theta, V) = \sum_{j=1}^m v_j \theta_j \rightarrow \min \quad (4)$$

$$G(f(A', \theta), W) \geq G', \quad (5)$$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta = (\Theta_1 \times \dots \times \Theta_m) \quad (6)$$

де $f(A', \theta) = (f_1(A') + \theta_1, f_2(A') + \theta_2, \dots, f_m(A') + \theta_m)$, $\theta \in \Theta$

Приведемо алгоритм розв'язку цієї задачі, що базується на ідеології методу послідовного аналізу варіантів (ПАВ) [4]. У відповідності з цим методом необхідно розробити конструктивні процедури відсіву варіантів, що дозволить покращити часову характеристику алгоритму шляхом зменшення множини допустимих розв'язків задачі.

Розглянемо випадок, коли для розв'язку задачі (1) – (3) використовується лінійно-адитивна згортка критеріїв [2, 3]. Тоді обмеження (5) буде мати вигляд.

$$\sum_{j \in J} \omega_j (f_j(A') + \theta_j) \geq G'$$

$$\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j \geq G' - \sum_{j \in J} \omega_j f_j(A')$$

$$\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j \geq G' - G(A')$$

$$\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j \geq G^*,$$

де $G^* = G' - G(A') = \text{const}$ – це саме той бар'єр, який треба подолати альтернативі A' , щоб у підсумку досягнути необхідного результату.

Користуючись термінологією методу ПАВ сформулюємо дві теореми:

Теорема 1. Величина

$$d_j = G^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m w_k \cdot \max\{\theta_k \mid \theta_k \in \Theta_k\} \quad (7)$$

є допуском для множини Θ_j за обмеженням (5).

Нехай на деякому кроці алгоритму розв'язку задачі (4) – (6) отримано допустимий розв'язок θ^* і $h^* = h(\theta^*, V)$

Теорема 2. Величина

$$c_j = h^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m v_k \cdot \min\{\theta_k \mid \theta_k \in \Theta_k\} \quad (8)$$

є допуском для множини Θ_j за цільовою функцією (4).

За обмеженням (5) і допусками (7) відсіювання елементів з множин $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ відбувається знизу. Якщо у підсумку множина допустимих розв'язків суттєво не зменшилась, необхідно розглянути допуски за цільовою функцією (4).

На відміну від (7), за допуском (8) відбувається відсіювання елементів з множин $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m$ зверху, тобто з Θ_j вилючається множина всіх таких елементів $\{\theta_j^0, \theta_j^1, \theta_j^2, \dots, \theta_j^{s'}\}$, для яких $v_j \theta_j^s > c_j$, $s = \overline{0, s'}$.

Таким чином, алгоритм розв'язку задачі (4)–(6) полягає в ітераційному відсіюванні елементів множини $\Theta = (\Theta_1 \times \dots \times \Theta_m)$ за допусками (7), (8) [1].

Висновки. Наведена математична модель задачі виявлення показників, що негативно впливають на узагальнену оцінку успішності суб'єктів, які беруть участь у навчально-освітньому процесі. Подібні задачі можуть виникати, наприклад, і на етапах проектування технічних систем, коли дослідна система, що проектується порівнюється за багатьма критеріями з існуючими зразками. Після проведення оцінювання і розв'язання задачі (4)–(6) стає можливим визначити саме ті показники, покращення значень яких вимагатиме найменших виробничих зусиль і, разом з тим, дозволить підвищити якість системи, що проектується, до заданого більш якісного рівня. Для розв'язання задачі розроблений алгоритм, що базується на ідеології методу послідовного аналізу варіантів.

Література

1. Gorborukov V., Franchuk O. The inverse ranking problem and the algorithm for solving it. *Information Models and Analyses*. 2018. Вип. 7, № 2. С. 52–62.
2. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the art Surveys*. Boston: Springer Science and Business Media, Inc, 2005.

1045 с.

3. Ishizaka A., Nemery P. Multi-criteria decision analysis: methods and software. John Wiley & Sons, 2013. 312 с.

4. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. Москва:Наука, 1982. 286 с.

УДК 37.015

Формування мотиваційної компоненти навчання

Олексій Зінкевич

Національний університет харчових технологій

Валентина Лісовська, Тетяна Кудик

Київський національний економічний університет

імені Вадима Гетьмана

Вступ. Деякі студенти мають викривлене уявлення про роль математичної підготовки в їх майбутній професійній діяльності, але суспільство потребує спеціалістів з чітким логічним мисленням, глибокими математичними знаннями й умінням бачити й реалізовувати можливості застосування математики в різних конкретних ситуаціях.

Можливо вивчати математику, і не маючи визначеної цілі. Цей стиль викладання є дуже популярним серед викладачів математики, які відкидають важливість мотивування. Але такий підхід не прийнятний ні для дослідження, ні для викладання. Врешті-решт, мотивування є одним із важливіших джерел інтересу до навчання, а також важливим засобом для розкриття обдаровання.

Матеріали і методи. Проблематика дослідження у контексті визначення важливості мотивації при вивченні та викладанні математики висвітлювалась у публікаціях В.Т. Білоус, О.Е. Коваленко, Е.Э. Коваленко, О.В. Співаковський, О.Г. Фомкіна та ін.

Результати. Перед вищою освітою постають все нові завдання, у тому числі виховання компетентної особистості фахівця, із розвитком таких її якостей, як високий професіоналізм, активність, ініціативність, мобільність, почуття відповідальності, уміння працювати, швидко орієнтуватися в ситуації, приймати самостійні рішення, формувати потребу в постійному оновленні знань і самовдосконаленні. Очевидно, що важливу роль у формуванні такої особистості відіграє позитивна мотивація студентів до навчання.

Механізмом учбової мотивації є вдале формулювання викладачем цілей і завдань навчальної діяльності в умовах професійної спрямованості, які мають прийняти студенти і спрямувати свою діяльність на їх досягнення. В цій роботі важливе значення має правильна організація педагогічної взаємодії між викладачами і студентами. Мотивація у вивченні математичного матеріалу повинна здійснюватися у всіх формах навчання: лекції, практичні завдання, самостійна робота; в цілеспрямованому поєднанні цілей, змісту, методів, засобів, форм організації навчальної діяльності студентів та форм контролю.

Мотивація [2] – це елемент навчального процесу, результатом якого є навчальна діяльність, яка набуває для тих, хто навчається, конкретного змісту.

При цьому формується стійкий інтерес до неї, і зовнішні задані цілі перетворюються у внутрішні потреби особистості.

Мотивація відноситься до людських чинників, які штовхають студента вперед; це нерозривний динамічний процес фізіологічного та психологічного стану, який керує поведінкою особистості, визначає її організованість, активність та стійкість, здатність діяльно задовольнити свої потреби.

На математичній підготовці сьогодні базується професійна підготовка фахівців більшості галузей, оскільки, крім фактичних знань, які дає спеціалістові вивчення математичних дисциплін, сама математика посідає важливе місце у формуванні їхнього наукового світогляду, розвитку логічного та абстрактного математичного мислення, логічної строгості в судженнях, уявлень і уяви, умінь математизувати ситуації, пов'язані з майбутньою професійною діяльністю.

Часто стверджується, що математика – суто логічна структура. Крім того, громадська думка не ігнорує і естетичні аспекти цієї науки, що пов'язані з гармонією та узгодженістю її складових. В окремих випадках математику розглядають і як цікаву інтелектуальну гру. Математика часом виглядає як добірка безглузвих міркувань, але якщо розглянути її в історичній перспективі, то виявиться, що навіть найабстрактніші її розділи на перший погляд далекі від застосувань, тісно пов'язані з конкретними розділами, близькими до застосувань. Саме ці зв'язки в підсумку і виправдовують існування абстрактних розділів.

Більше того, щоб зрозуміти математику, необхідно досягти повної прозорості на кожному етапі. Але саме в цьому відношенні математика не відрізняється від інших галузей науки. В той же час неможливо вивчити математику, не маючи уявлення про те, для чого вона потрібна. Як відомо, в процесі розуміння ціль є суттєвою потребою. Студенти навчаються швидше і краще, якщо вони вчаться з визначеною ціллю.

Наявність більш-менш визначеної мети вказує на правильний шлях, підсилює інтерес, допомагає виокремити головне і відкласти до найкращих часів другорядне. Чим конкретніше визначені цілі, тим більше проявляється їхній спонукальний вплив. Загальні, неконкретизовані цілі часто мають характер декларацій і не стимулюють до діяльності. Конкретизація мети, розробка проміжних цілей і засобів їх досягнення — важливий мотиваційний фактор.

Мета, яка ставиться людиною самостійно, підсилює мотивацію, створює позитивний настрій і утримується довше. Мета, яка задається ззовні, викликає меншу активність людини, має меншу спонукальну силу. Коли людина отримує від інших завдання, це ще не означає, що вона їх автоматично приймає і виконує. Але перетворення зовнішніх завдань в індивідуальні цілі один з варіантів цілеутворення, тобто завдання від інших для суб'єкта виступають як вимоги, які він неодмінно має виконати. Загальні цілі, суспільні норми, завдання, отримані від викладачів, можуть стати індивідуальними цілями суб'єкта за умови, що вони є етапом або засобом задоволення потреб особистості. Щоб зовнішня вимога була прийнятою, стала наміром студента,

необхідна його участь не тільки в постановці завдання, але й в аналізі, обговоренні умов його досягнення, у плануванні тощо. У такому разі людина виступає не пасивним виконавцем, а активним суб'єктом діяльності, що сприяє їхній більшій активності.

Якщо мета відсутня, то вивчаються випадкові теми, матеріал здається нудним та одноманітним – саме таким чином в студентів складається враження про математику як про нагромодження важких і нудних міркувань. Не даремно кажуть, що чітка постановка задачі – найважливіша частина її рішення.

Отже, при викладанні математики дуже важливо ставити перед студентами близькі і віддалені цілі з максимально можливою чіткістю. Іншими словами, студентами потрібна мотивація. Часто через недостатність знань студенти можуть зрозуміти віддалені цілі тільки приблизно. Але навіть це приблизне розуміння корисне: завдяки цьому студенту легше зрозуміти проміжні цілі, а головне, ціль вимальовується все чіткіше в міру засвоювання предмета – як за орієнтування на незнайомій місцевості.

Вивчення математики передбачає, що студент повинен вміти виконувати набуті знання при розв'язуванні конкретних прикладних задач. Цьому повинне сприяти застосування математичних методів у спеціальних економічних курсах, тобто повинно бути ефективне співробітництво у сферах, де сходяться інтереси математичних і спеціальних кафедр. В сучасних умовах успішна робота економіста неможлива без застосування математичних методів.

Через ці причини оволодіння методами і розуміння того, до чого їх можна застосувати, більш важливе, ніж накопичення знань та інформації: методи, на відміну від ізольованих теорем і результатів, володіють динамікою. Як же вивчають методи? Щоб відповісти на це запитання, необхідно пам'ятати про те, що методи – інструмент для дослідження певних цілей. Методи – це робочий інструмент, і так само, як неможливо опанувати ремесло, вивчаючи каталоги та відвідуючи виставки, так неможливо вивчати математику, перебуваючи стороннім спостерігачем. Методами потрібно користуватися. Але краще, якщо студенти хоча б частково відкривають їх самі. Як наявність інструменту не робить людину майстром, так і накопичення знань не робить її математиком. Важливішим є вміння їх використовувати як при розв'язуванні конкретних практичних задач, так і при проведенні різноманітних теоретичних досліджень. Наявність комп'ютерів [5] відкриває нові можливості для використання математичних методів, а тому треба розуміти як правильно поставити математичну проблему, як правильно підійти до її розв'язання.

Необхідно усвідомити, що навчання математики або математичних методів напружене на вивчення певних алгоритмів і навчання пошуку. Часто на адресу викладачів математики лунають докори, що вони вчать знаходити похідні, інтеграли, тощо, що все це анахронізм, оскільки якщо їм на практиці трапиться подібна задача, вони просто скористаються комп'ютером або довідником. Це не завжди так, бо студента треба навчити основних методів аналітичних перетворень, вмінню проявляти в них винахідливість, розвинути певне аналітичне чуття, а без цих вправ цього досягти не можна. Крім того, треба

пам'ятати, що використання комп'ютера і всяких довідників передбачає певний рівень знань, тобто треба знати, що шукати і де це можна знайти.

Реалізація професійної спрямованості [1;4] навчання математики і застосування її засобів в сфері виробництва, економіки, фінансів, менеджменту відбувається шляхом впровадження в навчальний процес економічних задач і завдань для відповідних розділів курсу згідно навчального плану, з урахуванням відведеного часу та можливостей студентів. При цьому домінуючими повинні бути задачі методологічного обґрунтування необхідності і корисності вивчення математики та задачі усвідомлення предмету як науки і його спеціальних методів. Наступними повинні бути задачі, що демонструють особливості економіко-математичних та математично-економічних інтерпретацій та сприяють формуванню прикладних математичних знань.

Виходячи з цього, важливою є психологічна установка про доцільність та значення вивчення математичних дисциплін та їх особливого місця в комплексі навчальних дисциплін професійно-орієнтованого напрямку.

Задачі економічного [3] змісту сприяють реалізації багатьох завдань практичного заняття з математики. Вони дають змогу розкрити методологічні питання взаємозв'язку теорії з практикою, переконуючи студентів в тому, наскільки важливе вивчення математичних дисциплін для обраної ними економічної спеціальності. Економічні задачі однаково можна використовувати як для мотивації теми, цілей і завдань практичного заняття шляхом постановки проблеми, так і для розкриття наукового і практичного значення нового матеріалу. Їх навчальні функції одночасно спрямовані на підвищення математичної підготовки студентів і на вироблення вмінь застосовувати математичний апарат для дослідження економічних процесів і явищ, будувати моделі економічних ситуацій, знаходити математичні залежності в реальних виробничих процесах, передбачати очікуваний результат як наслідок аналізу величин, що характеризують дану економічну ситуацію.

Актуальними являються деякі специфічні задачі вищої математики, які і формують математичний стиль мислення – строгий, послідовний, оперуючий чітко визначеними поняттями, що в свою чергу суттєво впливає на розвиток інтелекту сформованого, є основою дивергентного мислення, необхідного для творчої діяльності.

До таких задач відносяться проблемні ситуаційні задачі – задачі, що не мають однозначного розв'язання і вимагають творчого застосування раніше засвоєних знань і умінь. Деякі з таких задач можуть бути розв'язані як елементарним шляхом, так і методом, що потребує більших розумових витрат. Все залежить від планування розумових дій студента, які власне є механізмом мислення і являються результатом об'єднання та переробки інформації. Ситуаційні задачі вимагають від студента не тільки глибоких теоретичних знань конкретної теми, а й умінь застосовувати уже відомий математичний апарат. При цьому основне завдання студентів полягає у застосуванні цих знань до комплексного аналізу ситуації і прийняття рішення в її межах.

Розв'язання задач збагачує студента цікавим досвідом; він зустрічається з труднощами і вчиться їх оцінювати; він пізнає можливості і обмеження свого

математичного інструментарію. Розв'язання задач дає нам можливість відкрити нові істини, про існування яких ми навіть і не здогадувались. Такий досвід складає враження на молодий розум і сприяє пробудженню прихованих здібностей, побачити нові аспекти уже відомих фактів.

Іншими словами, таке викладання математики дає і активні динамічні знання. Саме знання такого типу відрізняє розум від книги. Доки йдеться про накопичення інформації, наш розум не може змагатися з папером. Але знання, зафіксовані на папері, – це закам'янілі знання. Накопичувальний підхід до навчання шкодить найціннішому з того, чим усі в тій або іншій мірі володіють – безпосередністю, оригінальністю, творчими здібностями. Цікаво, що дуже часто запас знань обернено пропорційний здібностям відкривати щось нове, і вчені набагато більше цікавляться відкриттями, ніж знаннями.

Висновки. Враховуючи тенденції розвитку науки і техніки, економіки й виробництва, важко віднайти таку галузь діяльності людини, яка б не потребувала певної математичної підготовки. Розглядаючи економіку як головний напрям входження держави у цивілізований світ, можна без перебільшення сказати, що підготовка фахівців для різних галузей стає фактором першорядного значення. І не останню роль в процесі їх підготовки відіграють математичні дисципліни, які сприяють виробленню навиків логічного і самостійного мислення, забезпечують професійне володіння математичними засобами аналізу та прогнозування економічних ситуацій, знаходять своє застосування в конкретних предметних галузях.

Саме у навчальному закладі розвивається особистість, а завдання викладачів математики – підтримати її, дати поштовх до пізнання нових знань, сформулювати організованість, активність та стійкість, здатність студента задовольняти свої потреби через соціально схвалювану діяльність, допомогти отримати гарну освіту, а в подальшому цікаву роботу.

Література.

1. Дутка Г.Я. Особливості фундаментальної підготовки майбутніх економістів / Г.Я. Дутка // Гуманізація навчально-виховного процесу. Випуск LVI. Слов'янськ: СДПУ, 2011. С. 60-70.
2. Коваленко Е.Э. Методика профессионального обучения: инженерная педагогика. – Харьков: УИПА, 2002.- 158 с.
3. Солодовников А.С. Математика в экономике: [учебник: в 2-х ч.] / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. – М.: Финансы и статистика, 2000. – Ч. 1 – 224 с.
4. Семеряков С.О. Теоретико-методичні основи фундаменталізації навчання інформативних дисциплін у вищих навчальних закладах: дис. ...доктора пед.наук: 13.00.02 / С.О. Семеряков; Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова. – К., 2009. – 536 с.
5. Співаковський О.В. Теорія й практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей: Монографія. – Херсон: Айлант. - 2003- 229 с.

Математика у коміксах – ретроспектива і перспектива

Ганна Мамонова

*Київський національний економічний університет**імені Вадима Гетьмана*

Вступ. При вивченні дисциплін математичного напрямку та природничих наук у більшості учнів та студентів виникає відчуття, що цей процес нудний, важкий та не пов'язаний з творчістю. І тут у нагоді можуть стати комікси, так звані мальовані історії. Аналіз існуючих на українському та світовому ринку математичних освітніх коміксів та перспективи цього напрямку – тема нашого дослідження.

На сайті українських видавництв та книгарень ринок мальованих коміксів представлений рядом всесвітньо відомих освітніх коміксів, це перш за все серія «Наука в коміксах» авторства Ларі Гоніка (від філософії до різних розділів математики та фізики) [1-4] та японська Манга серія під назвою «Освітня марга» із вражаючою кількістю книжок з вищої математики, інформатики, криптографії та фізики [5-8]. Для дітей молодшого шкільного віку (6-8 років) є англійська серія «RYAN'S MATH ADVENTURE» від Корейського національного університету освіти. На базі серії коміксів розроблено комп'ютерну гру [9]. Поза увагою лишаються діти середнього та старшого шкільного віку (10-16 років), для більшості з них японська манга та комікси Ларі Гоніка занадто складні, адже переважна кількість тем, що розглянуті у цих мальованих коміксах вивчаються у коледжах та університетах, тоді як Пригоди Райяна – це про давно відомі підліткам математичні факти. На сьогодні перспективним на нашу думку є такий комікс, що зможе зацікавити підлітків не лише у математиці, але і у вивченні історії, іноземних мов та біографії великого вченого. Саме цю мету переслідують автори мультидисциплінарного коміксу «Блез Паскаль і Комбінаторика» [10] -першого мальованого коміксу серії VAL (Voyage, Adventure, Learning). Розвитку ринку коміксів присвячено ряд статей українських авторів та дисертаційне дослідження [10-13]

Матеріали і методи. При підготовці даної роботи нами було використано такі методи наукового пізнання як історичний, діалектичний та абстрактно-логічний методи, метод збору та обробки інформації. Метод порівняльного аналізу було використано для опрацювання методів візуального аналізу інформації. Аналіз проведено для двох серій освітніх коміксів «Наука в коміксах» [1-4], «Освітня манга» [5-8], наукових статей та досліджень [10-13].

Результати. Історичний екскурс у культуру коміксів починається із наскальних малюнків, а з минулого століття мальованими почав захоплюватися весь світ. Зрозуміло, що використання такого захоплення мало реалізуватися і у сфері освіти та науки. Шкільні підручники з іноземних мов, зі сторінок яких до нас зверталися кумедні герої, були улюбленими серед учнів та викладачів, адже вони допомагали нам опановувати інші мови з гумором та оригінальністю. Ідея вивчати науку в коміксах було реалізовано щонайменше у двох серіях американського професора Ларрі Гоніка та «Наука в коміксах» та японських авторів у серії «Освітній комікс». Актуальною на сьогоднішній день вбачаємо

вивчення питання особливостей освітніх коміксів, що вивчають дисципліни математичного циклу.

У серії «Наука в коміксах» цей напрямок представляють Математичний аналіз (Матан), Алгебра та Фізика [1-3]. Ларі Гонік автор і сценарію і малюнку, комікси чорно-білі, цільова аудиторія старшокласники, студенти та дорослі. Подано все методично та науково обгрунтовано, складається повна картинка тієї науки про яку написано комікс, картинки і текст часто викликають посмішку і роблять настрій. Наприклад по всій книжці присвяченій математичному аналізу можна прослідкувати кумедні ситуації з героями Ньютоном та Лейбніцем, це явно має спрямувати читача до вивчення історії цього наукового конфлікту. Звісно використовуючи ці книги зробити чітке уявлення про відповідну дисципліну легше ніж використовуючи університетський чи шкільний підручник і в рази швидше. Але так швидко як звичайний комікс прочитати цю серію буде важко, у знаки вдається досить складна наукова інформація.

Серія японської «Освітньої манги», нажаль доступна українському читачеві лише російською, мало хто з читачів в змозі прочитати ці книжки мовою оригіналу. Варто зауважити, що ці комікси також реалізовані у чорно-білому, у кожній манзі своя цікава історія, що є основою для вивчення певного розділу математики, інформатики, фізики чи криптографії. [5-8]. Ця серія освітніх коміксів буде цікавою студентам технічних та ІТ спеціальностей або ж викладачам університетів, оскільки автори приводять на сторінках своїх книг дуже оригінальні та яскраві приклади використання математики у повсякденному житті. Про інтелектуальне навантаження при читанні цих коміксів годі говорити, сама тема, скажімо, Рядів Фур'є наявна у програмах лише кількох спеціальностей в університеті і як правило вивчається на спеціальностях Математика, Прикладна математика, Системний аналіз, Фізика.

Для викладачів та студентів класичних та педагогічних університетів читання таких коміксів однозначно є корисним та цікавим, адже поряд з уже відомою теорією наведено велику кількість оригінальних прикладів та практичних застосувань. Вивчаючи перелічені роботи стає зрозумілим, що поза увагою залишаються школярі і є вільна ніша – кольорові комікси з не складною математикою, цікавою, захопливою прикольною. Потрібна історія, яку можна прочитати за вечір і при цьому отримати знання не з одного предмету. Саме так виникла ідея створення серії освітніх коміксів, базовими темами яких мають стати певні розділи математики. Стартувати було вирішено з такого розділу дискретної математики як комбінаторика, вивчення цієї теми у програмі предмету Математики проводиться у 6, 9 та 11 класах загальноосвітньої школи. Звісно ця дисципліна вивчається і в університеті.

Комбінаторика; біографія відомого вченого; життя, науку та культуру французів середини XVII сторіччя та усталені фрази французькою – всі ці різні теми поєднує мультидисциплінарний комікс «Блез Паскаль і Комбінаторика», перший мальопис у серії VAL (Voyage, Adventure, Learning). Двоє сучасних школярів знайомляться з професором математики, який пропонує їм фантастичну подорож до Франції у 1654 рік, а в якості гіда запрошує відомого

вченого Блеза Паскаля. Лише за один день Катя і Марко вивчають основи комбінаторики, знайомляться з життям Парижу та його околиць – потрапляють у містя, що є значущими для Паскаля. Це звісно його дім, потім монастир Пор Рояль, площа перед Собором Нотр дам де Парі, латинський квартал Парижу та салон відомої сучасниці пана Блеза - Маркізи де Буазьє. Для того, щоб повернутися додому, діти мають показати, що всі формули та правила засвоєні та правильно розв'язати поставлені задачі. У коміксі є ще один персонаж – собачка Леда: вона підказує юним друзям чи правильно виконані етапи місії та веде діалоги з місцевими мешканцями. Серед її співрозмовників кіт та миші, голуби, коні та вишукана болонка маркізи. Ці сторінки мальопису піднімуть читачам настрій та ближче познайомлять із побутом французів того часу.

Оригінальна подача матеріалу дає можливість читачу зробити вивчення та практичне використання комбінаторних формул захопливим та цікавим. Ця книга не є підручником з математики і головна мета коміксу поглянути на комбінаторику з іншого ракурсу та зробити її вивчення яскравим та зрозумілим.

Для тих, хто захопився розповіддю і, власне, комбінаторикою, автори підготували вкладку «Для тих, хто має час і натхнення». У ній читач знайде багато історичних фактів і цікавинок, які подані у формі комбінаторних задач.

Це ефективно, коли з одного коміксу читач дізнається і про біографію відомого вченого і про розділ математики, і про життя людей у певну епоху, знайомиться з рядом цікавих історичних фактів та ще й має можливість вивчити кілька десятків фраз іноземною мовою. Мета освітнього коміксу – розвиток логічного мислення, вміння використовувати комбінаторні поняття та формули у конкретних життєвих ситуаціях, заглиблення у життя французів різних верств (вчені, монахи, придворна знать, селяни) у період середини сімнадцятого століття, знайомство із життям та науковими здобутками французького письменника, філософа, математика, фізика та винахідника Блеза Паскаля, вивчення найпоширеніших французьких слів та усталених виразів.

Висновки. Останнім часом спостерігається зменшення зацікавленості багатьох школярів до навчання, читання, пізнавального процесу, вивчення нового, розв'язання практичних задач та кейсів. І тут у нагоді стають освітні комікси, де матеріал подано у незвичній для математики, природничих та технічних наук формі з малюнками, гумором та несподіваними сюжетами. Серед виданих мальописів популярною у всьому світі є серія «Наука в коміксах» від Ларі Гоніка та «Освітня манга» від групи японських авторів. На сайті українського видавництва коміксів VOVKULAKA анонсовано вихід мультидисциплінарного коміксу «Блез Паскль і Комбінаторика»[14], метою якого є підвищення мотивації до вивчення природничих наук, зокрема математики, історії, іноземної мови та біографії вчених. Він вчить сучасного підлітка бути допитливим, чесним, толерантним, творчим, логічним та послідовним. Серія мультидисциплінарних коміксів VAL стане у пригоді учням середніх та старших класів, вчителям математики та історії, студентам педагогічних спеціальностей, а також тим, хто має почуття гумору та захоплюється математикою або історією.

Література

1. Ларрі Гонік Алгебра Серія «Наука у коміксах». Київ: РІДНА МОВА, 2019. – 240 с.
2. Ларрі Гонік Математичний аналіз. Серія «Наука у коміксах». Київ: РІДНА МОВА, 2020. – 220 с.
3. Ларрі Гонік, Арт Гафман. Фізика. Серія «Наука у коміксах». Київ: РІДНА МОВА, 2020. – 212 с.
4. Ларрі Гонік Всесвітня історія: т.1: Від великого вибуху до походів Александра Македонського. – Київ: РІДНА МОВА. Серія «Наука у коміксах». 2017. – 358 с.
5. Мітані Массакі, Сато Синьїті Хінокі Ідеро. Криптографія. Серія «Освітня манга» . – М.: ДМК Пресс, 2019. – 238 с.
6. Сін Такахасі, Іроха Іноуе. Лінійна Алгебра. Серія «Освітня манга». – М. ДМК Пресс, 2018. – 270 с.
7. Мініо Сібубя, Хірокі Харусе. Аналіз Фур'є. Серія «Освітня манга». – М ДМК Пресс, 2014. – 256 с.
8. Мана Такахасі, Секо Адзума. Бази даних. Серія «Освітня манга». – М. ДМК Пресс, 2014. – 238 с.
9. Режим доступу: <https://mathadventure.net/en/home/>
10. Насалевич Т. В., Рябуха Т. В., Лопушанський І. О. Становлення коміксу як жанру сучасної літератури// Вчені записки ТНУ імені В. І. Вернадського. Серія: Філологія. Соціальні комунікації № 4, ч.3, т.31 (70) С.144-149. DOI <https://doi.org/10.32838/2663-6069/2020.4-3/26>
11. Марія Лавренова Практичне застосування коміксів на заняттях мовно-літературної освітньої галузі// Педагогічні інновації: ідеї, реалії перспективи. Серія «Педагогічні науки». 2018 С. 41-46.
12. Гудошник О.В. Комікс в українському комунікаційному просторі Вісник Дніпропетровського університету Серія «Соціальні комунікації» 2017 випуск 17. С.19-24.
13. Белов Д.О. Український комікс: бібліотечно-інформаційний вимір. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з інформаційної ,бібліотечної та архівної справи. Київ. 2021. 221 с.
14. Видавництво VOVKULAKA режим доступу: <https://www.vovkulaka.net/comics/blez-pascal-i-combinatoryka/>

Реалізація метода трапецій в Google Таблицях як методичний прийом при вивченні інтегралів

Олександр Пархоменко, Єлизавета Понурко

Тетяна Велика

Миколаївський національний університет

імені В. О. Сухомлинського

Вступ. З поняттям визначеного інтеграла здобувачі освіти знайомляться на уроках алгебри в 11 класі під час вивчення теми «Інтеграл і його застосування» [1]. В шкільній програмі обчислення визначених інтегралів обмежується застосуванням формули Ньютона-Лейбніца [2]. Однак в університеті студенти дізнаються, що існують чисельні методи обчислення визначених інтегралів, які дають можливість отримати порівняно точні результати. На заняттях з математичного аналізу ми розглядаємо основні методи чисельного інтегрування функцій, серед яких метод прямокутників, трапецій, Сімпсона та інші, більш складні алгоритми. Названі методи є відносно простими, та не викликають труднощів у більшості студентів, натомість сприяють більш ґрунтовному розумінню поняття визначеного інтеграла. Саме тому до їх вивчення ми повертаємось і в курсі методики навчання математики, як до одного з способів ширше поглянути на інтеграли, зрозуміти їх геометричну інтерпретацію. Однак аналітичним обчисленням за заданими формулами процес навчання не обмежується. Ми пропонуємо нашим студентам виконати цілий клас цікавих та творчих завдань: реалізувати чисельні алгоритми обчислення визначених інтегралів в одному з табличних процесорів з подальшим їх дослідженням та обговоренням. Одним з таких завдань є реалізація методу трапецій в Google Таблицях.

Матеріали і методи. Реалізувати чисельні методи можна в будь-якому табличному процесорі, але перевагу ми надаємо саме онлайн сервісам, серед яких найбільш популярними є Excel Online та Google Таблиці, яким притаманні ряд переваг. Насамперед, це безкоштовний доступ через обліковий запис, а також всі плюси хмарних технологій: можливість створювати та зберігати файли на онлайн диску, мати до нього доступ з різних приладів, автоматичне збереження та історія змін, простий та інтуїтивно зрозумілий інтерфейс. Ми активно використовуємо в навчальному процесі можливість працювати над одним файлом декільком користувачам в режимі реального часу, що дуже зручно при організації дистанційного навчання, в тому числі при роботі в групах. Це також значно полегшує комунікацію між викладачем та студентами.

Метод трапецій є одним з найвідоміших методів чисельного інтегрування, насамперед, через порівняну простоту та зрозумілу геометричну інтерпретацію [3]. Метод базується на розбитті відрізка інтегрування на декілька проміжних відрізків, при цьому графік підінтегральної функції

наближається ламаною лінією, а, площа, обмежена графіком функції та віссю абсцис, наближається до суми площ трапецій. Розглянемо визначений інтеграл:

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (1)$$

де $f(x)$ – функція, неперервна на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних відрізків: $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, $[x_2;x_3]$, ..., $[x_{n-1};x_n]$. При цьому $x_0 = a$, а $x_n = b$. Тоді заданий визначений інтеграл (1) обчислюється за формулою трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \cdot h, \quad (2)$$

де $h = \frac{b-a}{n}$ – довжина кожного з маленьких відрізків, або крок, а $f(x_i)$ –

значення підінтегральної функції в точках розбиття, або вузлах.

Більш детально формулу трапецій (2) можна записати так:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right) \cdot h. \quad (3)$$

Результати. Як приклад, покажемо реалізацію в Google Таблицях алгоритму обчислення визначеного інтеграла:

$$\int_0^5 \frac{x}{x^4 + 4} dx. \quad (4)$$

Слід зазначити, що спочатку студенти обчислюють даний інтеграл аналітично, підставляючи числові значення в формулу трапецій, а також за формулою Ньютона-Лейбніца, і порівнюють отримані результати. А вже потім реалізують весь процес обчислення в сервісі Google Таблиці. При цьому жодних обмежень на спосіб, підхід та логіку реалізації алгоритму не накладається. Єдиною вимогою є правильність і коректність обчислень та вірна відповідь. Також немає і вимог до форматування, однак важливим критерієм є естетичне оформлення всіх елементів таблиці. Такий підхід призводить до унікального програмного продукту у кожного студента, що значно ускладнює роботу викладача при перевірці виконаних завдань, але розвиває творчий підхід, ініціативу та логічне мислення здобувачів освіти.

На рис. 1 наведено скріншот можливого інтерфейсу онлайн-сервісу Google Таблиці, в якому реалізовано алгоритм обчислення заданого інтегралу за допомогою формули трапецій. Значення в комірці H17 обчислюється за формулою: =E8*(((B12+V12)/2)+SUM(C12:U12)). В інших комірках формули також математично не складні, тому ми їх не наводимо.



Рис. 1. Реалізація методу трапецій в онлайн сервісі Google Таблиці

Як можна побачити на рис. 1, реалізувати алгоритм обчислення визначеного інтегралу в Google Таблицях за формулою трапецій порівняно просто, тому не займає у студентів дуже багато часу. Значно більше часу ми витрачаємо на аналіз отриманих результатів та їх обговорення. Серед тем для додаткових міні досліджень та обговорення можуть бути:

- вплив кількості точок розбиття на точність обчислень;
- точність обчислень інтегралів від різних функцій (слід зазначити, що при зміні підінтегральної функції необхідно повністю змінювати формули в інтервалі комірок B12:V12, але це проста задача);
- точність обчислень однієї і тієї ж функції на різних відрізках;
- порівняння з результатами, отриманими з використанням інших чисельних методів.

Це лише незначна частина питань, більшість з яких під час дискусії, як правило, формулюють самі студенти. З методичної точки зору доцільно не зупинятись на одному методі, а реалізувати в електронних таблицях алгоритми декількох з них, наприклад, методу прямокутників, трапецій, Сімпсона, з подальшим порівнянням результатів.

Для проведення оцінки точності отриманих результатів ми обчислюємо даний інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца з точністю до чотирьох цифр після коми. Так, в нашому прикладі:

$$\int_0^5 \frac{x}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_0^5 \frac{d(x^2)}{(x^2)^2 + 4} = \left(\frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \frac{1}{4} \arctan \frac{25}{2} \approx 0,3727 \quad (5)$$

Як можна побачити, результат обчислення заданого визначеного інтеграла за методом трапецій в сервісі Google Таблиці $\int_0^5 \frac{x}{x^4 + 4} dx = 0,3714$

(значення в комірці N17) співпадає з точністю до третього знаку після коми з отриманим за формулою Ньютона-Лейбніца, похибка при розбитті відрізка $[a;b]$ на 20 маленьких відрізків становить приблизно 0,35%, а це дуже гарний

показник точності обчислень. Зазначимо, що зменшення кількості відрізків, на які розбивається інтервал $[a;b]$, зменшує точність, в деяких випадках суттєво.

Висновки. Отриманий програмний продукт завдяки автоматизації обчислень можна застосовувати для дослідження інтегралів, але значно більшу цінність для студентів становить сам процес реалізації алгоритму, який дає можливість ще раз детально переосмислити поняття алгоритму, дослідити його математичну суть та геометричну інтерпретацію, виявити пробіли в своїх знаннях, а отже, засвоїти матеріал більш глибоко та ґрунтовно. Це особливо важливо при підготовці вчителів математики та фізики. Крім того, під час такої діяльності формується інформаційна компетентність, розвивається математичне та логічне мислення, вдосконалюється вміння працювати з сучасним програмним забезпеченням, в тому числі, з онлайн-сервісами, усвідомлюється можливість використання електронних таблиць для розв'язання прикладних задач. А все це навички, які є обов'язковими для сучасного вчителя.

Література

1. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків: Гімназія, 2019. 352 с.
2. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків: Гімназія, 2019. 208 с.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule.

УДК 372.8:51

Проблеми математичної підготовки майбутніх економістів в умовах дистанційного навчання

Олена Поплавська, Наталія Самарук

Хмельницький національний університет

Вступ. У зв'язку із спрямованістю курсу України на євроінтеграцію, перед сучасною вищою економічною освітою постає задача, яка полягає у підвищенні якості підготовки економістів до рівня, що відповідає вимогам європейського та світового ринку праці, та міжнародним стандартам. Тому у процесі навчання фахівця-економіста, на нашу думку, необхідно ставити акцент на його математичну підготовку, під час якої формується математична компетентність як невід'ємна складова професійної компетентності економіста. Саме математика має широкі можливості для розвитку аналітичного та логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, формування умінь встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації, спонукає до творчості і розвитку інтелектуальних здібностей.

Матеріали і методи. Підвищення рівня математичної підготовки майбутніх економістів вимагає проведення модернізації змісту математичної освіти шляхом упровадження у навчальний процес новітніх технологій, ефективних форм і методів навчання, зокрема, дистанційних. До розвитку наукових досліджень проблем математичної підготовки, дистанційного навчання та їх впровадження у педагогічний процес прилучились такі і вчені, як А.А. Андрєєв, Г.Я. Дудка, В.Ю. Кухаренко, Л.І. Нічуговська, Е.С. Полат, Г.С. Пастушок, С.О. Сисоєва, О.М. Хара, А.В. Хуторський та ін.

Проте, незважаючи на величезне значення та роль математики у процесі фахової підготовки майбутніх економістів існують проблеми у вивченні студентами математичних дисциплін в умовах дистанційного навчання, що призводять до зниження якості їх математичної підготовки. Тому метою дослідження є вивчення стану математичної підготовки економістів та виявлення шляхів підвищення рівня математичної освіти студентів в умовах дистанційного навчання.

Результати. Аналіз результатів навчання студентів, науково-педагогічної літератури, навчальних планів і програм, дозволили виділити низку основних *причин* зниження якості математичної підготовки студентів економічних спеціальностей, серед яких: недостатній рівень реалізації міжпредметних зв'язків, переважання традиційних методів проведення занять та традиційних форм організації навчального процесу, невмотивованість студентів до процесу навчання, що пов'язані із нерозумінням ролі та значення математичної підготовки у процесі формування фахових компетентностей.

Одним із шляхів підвищення рівня математичної освіти є впровадження технологій дистанційного навчання. Аналіз різних *визначень* поняття «дистанційне навчання» доводить відсутність єдиних підходів і свідчить про його поліфункціональність. Так, дистанційне навчання розглядають як:

- нову організацію освітнього процесу, що ґрунтується на принципі самостійного навчання студента;
- форму, систему навчання, за якої взаємодія викладача і студента, студентів між собою здійснюється на відстані і відображає всі властиві навчальному процесу компоненти (цілі, зміст, методи, організаційні форми, засоби навчання), що реалізуються специфічними засобами Інтернет-технологій або іншими засобами, які передбачають інтерактивність [1].

Методологічною основою дистанційного навчання є впровадження сучасних інформаційних технологій, які раціонально поєднують інформативні та активні методи навчання, надають доступ до мереж високоякісних баз даних, розширюють можливості студентів до сприйняття складної інформації, активізують їх самостійну когнітивну діяльність тощо. При цьому вважається, що це є одним із реальних шляхів втілення ідей Болонської декларації щодо створення єдиного освітнього простору, в рамках якого студентам ЗВО надавалася б можливість побудови індивідуальної освітньої траєкторії в опануванні системою базових фундаментальних знань, умінь і навичок як основи для формування професійної компетентності майбутнього фахівця [2].

При виборі різних підходів до організації дистанційного навчання у процесі опанування математичними дисциплінами майбутніми економістами, необхідно акцентувати увагу на реалізації *організаційно-педагогічних умов*: організації мотивованої самостійної діяльності, забезпеченні професійної спрямованості математичної підготовки, забезпеченні міжпредметної інтеграції математичних та економічних знань.

У процесі формування змісту математичних дисциплін, на нашу думку, необхідно спиратись на наступні *принципи*: системності (розгляд економічних процесів і провідних ідей і методів математики як цілісної логічної системи), професійної спрямованості (можливість застосування отриманих математичних знань у майбутній професійній діяльності завдяки поєднанню теоретичної підготовки з формуванням практичних умінь і навичок), координування навчальних предметів (доцільне відображення взаємозв'язків системи знань з математичних дисциплін та економіки).

Дистанційна технологія підготовки майбутніх економістів з математичних дисциплін ставить акцент передусім на *самостійній роботі* студента упродовж навчального періоду, при цьому викладач виконує роль координатора та консультанта. Крім того, дистанційне навчання передбачає поєднання пасивної і активної форм діяльності студента. У пасивному стані основною задачею студента є самостійне опрацювання як основного навчального матеріалу, так і додаткової літератури, що містяться у модулях дистанційних курсів математичних дисциплін; виконання індивідуальних домашніх завдань, передбачених навчальними програмами; проходження у вигляді тестів тематичних контролів. Активна форма діяльності студентів передбачає їх участь у дискусіях та обговореннях окремо виділених питань на форумах або в чаті, участь у семінарах, конференціях, інтернет-консультаціях в режимі on-line.

Для успішної організації самостійного засвоєння студентами математичних дисциплін в умовах дистанційного навчання необхідне використання наступних основних *підходів* до навчального процесу:

- діяльнісний підхід організації навчального процесу уособлює сукупність різних видів діяльності, необхідних для навчання і творчого розвитку студентів-економістів: розробка навчально-методичних матеріалів; гнучке поєднання on-line, off-line навчання; розробка гнучкої системи оцінювання, що враховує вимоги стандартів освіти та особливостей кожного студента; самооцінка студентів; дослідницька, проектна та творча діяльність;

- комунікативний підхід виражається у міжособистісній взаємодії студента з даним освітнім середовищем та іншими її суб'єктами засобами телекомунікацій;

- диференційований підхід проявляється у тому, що дистанційне навчання дозволяє здійснити диференціацію навчання математики з урахуванням індивідуальних особливостей протікання пізнавальних процесів.

Дистанційне навчання передбачає високий рівень інтерактивної взаємодії суб'єктів навчального процесу за допомогою доступних *методів* і *засобів*. Види активної навчальної діяльності слухачів на дистанційному курсі з

математичних дисциплін: робота з електронними лекціями; участь у мережевих практичних заняттях, семінарах, консультаціях; використання математичних програмних засобів (MathCAD, MatLab, Maple); проходження проміжних, тематичних та підсумкових контролів [4].

Використання в навчальному процесі мультимедійних засобів навчання дає істотне розширення можливостей індивідуалізації та диференціації навчання за рахунок: активності студентів як суб'єкта пізнання; самостійного вибору і проходження студентами траєкторії засвоєння навчального матеріалу; надання кожному, хто навчається «персонального викладача», роль якого виконує комп'ютер; спільного використання наочного, словесного і практичного методів навчання; значного розширення можливості надання навчальної інформації за рахунок застосування кольору, графіки, звуку, сучасних засобів відеотехніки; подання інформації в інтерактивному вигляді і включення не тільки статичної, але й динамічної послідовності надання навчального матеріалу.

Навчальний процес з вивчення математичних дисциплін в умовах дистанційного навчання уособлює в собі як основні *форми* традиційного навчання, так і специфічні форми організації навчального процесу: лекції (відеолекції, web-лекції, on-line лекції), вебінари, практичні заняття (on-line, off-line), on-line консультації.

Одним із важливих аспектів процесу навчання є контроль за якістю знань. Робота слухача на кожній стадії дистанційного курсу може контролюватися, оцінюватися і коректуватися викладачем. *Система контролю* в процесі навчання розділів вищої математики в системі дистанційної освіти може здійснюватися за допомогою:

- письмових опитувань (проведення їх в режимі синхронної взаємодії);
- тестів, призначених для контролю засвоєння кожного навчального елемента (виконання і перевірка в режимі on-line);
- самостійних робіт, що доповнюють систему тестів і призначених для контролю сформованості умінь застосовувати вивчені математичні факти для вирішення завдань;
- домашніх завдань, індивідуалізованих в залежності від індивідуальних цілей навчання тем з математики;
- типових розрахунків для якості перевірки знань;
- контрольні роботи, що забезпечують комплексний контроль рівня засвоєння системи знань з вивченої теми [3].

Висновки. Отже, можна стверджувати, що математична підготовка фахівців економічних спеціальностей в умовах дистанційного навчання ґрунтується на діяльнісному, комунікативному та диференційованому підходах і на принципах професійної спрямованості. Крім того, застосування дистанційних технологій у навчальному процесі змінює методику навчання, дозволяє поряд з традиційними методами, прийомами і способами використовувати моделювання процесів майбутньої професійної діяльності, яке сприяє створенню на заняттях наочних образів на рівні сутності, міжпредметної

інтеграції знань, активізації пізнавальної діяльності студентів Інноваційний пошук нових засобів призводить до розуміння того, що сьогодні потрібні діяльні, групові, ігрові, рольові, практично-орієнтовані, проблемні, рефлексивні форми і методи навчання.

Література:

1. Кашина Г. С. Теоретико-методологічні основи використання дистанційних форм навчання у системі післядипломної педагогічної освіти. *Військова освіта*. 2017. № 1. С. 70-82. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vios_2017_1_12

2. Нічуговська Л. І. Проблеми дистанційного навчання «Математика для економістів» студентів заочних факультетів ВНЗ. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт*. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2008. Вип. 30. С. 45-50.

3. Петрук В. А., Клеопа І.А. Дистанційне навчання вищої математики студентів технічного університету. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Вінниця, 2021. Вип. 60. С. 290-299.

4. Хара О. М. Дистанційне навчання математики абітурієнтів у системі довузівської підготовки: автореф. дис....канд. наук: 13.00.02. Київ. 2010. 20 с.

УДК 378.147.3

Сучасні проблеми та перспективи викладання математичних дисциплін

Олександра Сушко-Крикун

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Вступ. Перехід на довготривале дистанційне навчання став для багатьох освітян не просто випробуванням, а необхідністю в короткі терміни адаптуватися до нових умов праці та швидкого самовдосконалення.

Положення про дистанційне навчання характеризує його як індивідуалізований процес набуття знань, умінь, навичок і способів пізнавальної діяльності людини, який відбувається в основному за опосередкованої взаємодії віддалених один від одного учасників навчального процесу у спеціалізованому середовищі, яке функціонує на базі сучасних психолого-педагогічних та інформаційно-комунікаційних технологій [3]. І хоча, дистанційне навчання не повинно повністю замінити очне, виникає проблема наближення дистанційної форми навчання за якістю, не гірше аудиторної. Для вирішення цієї проблеми спробуємо скористатися новітніми інформаційно-комунікаційними технологіями в роботі викладача.

Матеріали і методи. В сучасних умовах найбільшого розвитку досягло дистанційне навчання з використанням Інтернет-технологій. А це, в свою чергу, відкрило перед студентами можливість вільного запису на дистанційні

навчальні курси; самостійне планування навчання та свободу у виборі місця навчання.

На факультеті математики, інформатики та фізики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова реалізація дистанційного навчання здійснюється шляхом використання навчального середовища Moodle. Так, для кожного навчального предмету створено відповідний курс, який наповнено необхідними навчальними матеріалами та формами контролю. Не винятком є і курс стохастичної фінансової математики для студентів освітнього ступеня магістр спеціальності 111 Математика (фінансова та актуарна математика). На вивчення дисципліни виділено 6 кредитів ECTS, що передбачає організацію та проведення лекційних та практичних занять.

Для забезпечення навчального процесу в умовах дистанційного навчання на факультеті було прийнято рішення реалізовувати дистанційну форму навчання шляхом використання онлайн-навчання, як синхронної форми дистанційної освіти. Так, заняття для студентів здійснюються за затвердженим розкладом, який відповідає розкладу очного навчання. Для проведення занять викладачі надсилають посилання на заплановані онлайн-конференції з використанням різних додатків (Google Meet, Zoom Meeting тощо). І ось тут виникає потреба засобами сучасних інтернет-технологій подати студентам навчальний матеріал таким чином, щоб різниця між очним та дистанційним навчанням полягала лише у місцезнаходженні студента і викладача.

Розв'язати дану проблему можна шляхом використання віртуальних навчальних дошок. Під такою дошкою слід розуміти мультимедійний ресурс, основна мета якого створення, спільне редагування та зберігання інформації. Віртуальні дошки можна поділити на такі типи: дошки для малювання (Draw Note, Scribblar, CoSketch); для зберігання нотаток (Conceptboard, Scrumblr); для спільного редагування (Realtimeboard, Twiddla, Popplet, Rizzoma, Padlet, Linoit, Educations). Пропонуємо огляд сучасних віртуальних дошок, завдяки яким можна вдало поєднувати текстові матеріали, зображення, відео- та аудіофайли на заняттях. Цей огляд передбачає ознайомлення з платними та безкоштовними сервісами, доступними з обов'язковою реєстрацією чи без неї, головною метою яких є навчання та спільна робота.

1. Padlet. Чудово підходить для спільної роботи під час дистанційного навчання (особливо для лекційних занять), інструмент створений для обговорення теоретичного матеріалу, поданого на дошці у готовому вигляді. Є можливість запрошувати студентів для внесення правок чи доповнень. Інтерактивна дошка може використовуватися індивідуально та колективно. Результати спільної роботи можна відправити поштою, експортувати в PDF чи зображення або поширити в соціальні мережі [2].

2. Twiddla – онлайн дошка, створена для спільної роботи. Можна генерувати текст, вставляти ілюстрації, математичні формули; вбудовувати документи, а також спілкуватися за допомогою чату. Реєстрація не потрібна: посилання на робоче поле дошки генерується сайтом, і потрібно просто поділитися нею зі студентами. Безкоштовна версія цього онлайн-ресурсу має обмежений період користування [1].

3. Awwapp. Дошка досить проста у використанні, бо за своїм функціоналом дуже нагадає аудиторну (біле поле або сітка, можливість з легкістю видаляти будь-який зайвий об'єкт). Доступ до цієї дошки прямо з браузера і не вимагає реєстрації. Ви можете надіслати учасникам спеціальне посилання або QR-код і із задоволенням її використовувати. Безкоштовна версія містить обмежені можливості [1].

4. Whiteboard Fox проста у використанні і абсолютно безкоштовна. Стає доступною для учасників за посиланням на сайті. Зовнішньо дуже схожа на аркуш із зошита в клітинку. Всі записи на дошці студенти бачать в реальному часі [1].

5. NoteBookCast. Абсолютно безкоштовна програма для проведення онлайн-занять в режимі реального часу. Її недоліком можна вважати обмежену кількість учасників (не більше 10) та відсутність спільного редагування написаного на дошці. Тобто нею можна скористатися лише при проведенні лекційного заняття [1].

6. Limnu – так само, як і попередня, ідеально підходить для викладання лекційного матеріалу, оскільки за своїм функціоналом максимально наближена до звичайної маркерної дошки. Віртуальна дошка доступна з будь-якого браузера і має відмінну швидкість оновлень [1].

Таким чином, наявність такої великої кількості доступних віртуальних дошок має забезпечити якісне викладання навчальних дисциплін та наблизити умови навчання до аудиторних.

Результати. Керуючись власним досвідом проведення лекційних та практичних онлайн-занять студентам, нами прийнято рішення під час проведення лекційних занять використовувати наступний підхід: якісно підготувати виклад теоретичного матеріалу, що відповідає темі визначеній навчальною та робочою програмами; розмістити файл в навчальному середовищі Moodle; запропонувати студентам попередньо з ним ознайомитися і у відповідності до розкладу за посиланням на заплановану відео-конференцію (в додатках Google Meet чи Zoom Meeting) прокоментувати основні його положення; відповісти на запитання студентів і при потребі за допомогою вбудованих у додатках дошок (чи панелі для коментування) довести деякі факти, твердження чи теореми (рис.1).

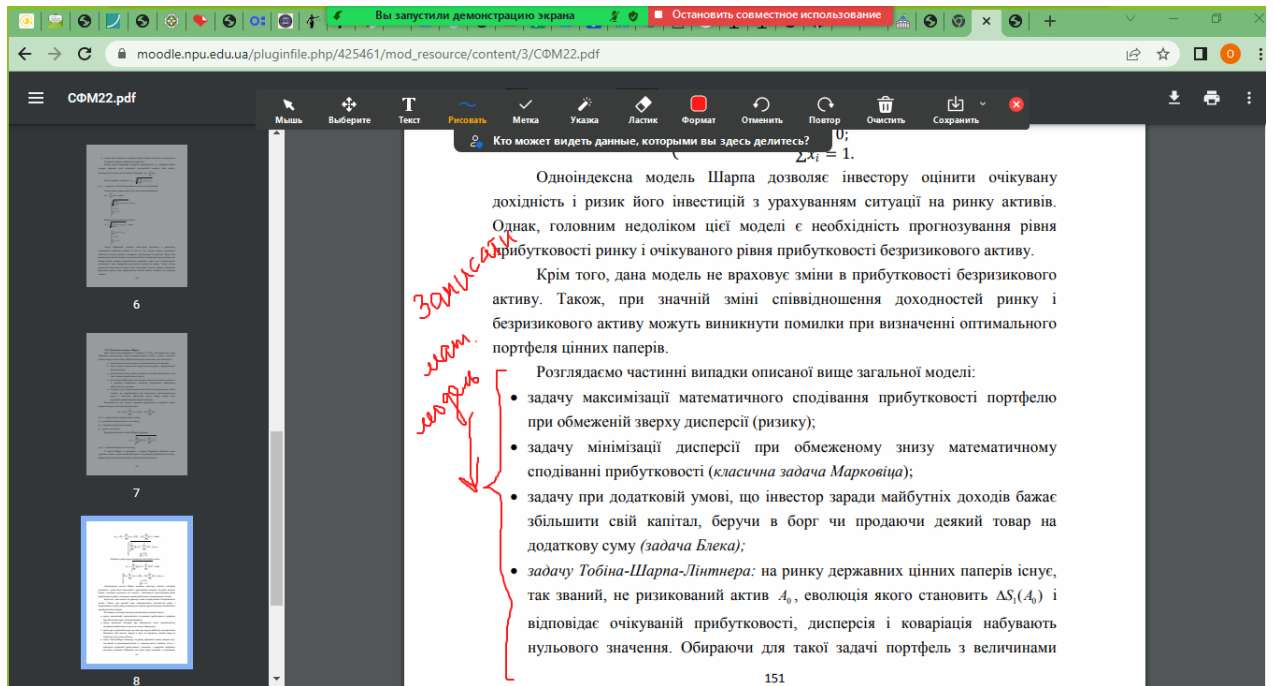


Рис.1 Коментар до лекційного матеріалу

На відміну від лекції, для проведення практичних занять недостатньо використовувати лише демонстраційні дошки, оскільки важливо навчити студентів не лише розв'язувати різного типу завдання, а й переконатися у набутті ними відповідних навичок. Тому, при проведенні практичних занять необхідно забезпечити використання віртуальної дошки у реальному часі, що дозволить студентам здійснювати відповідні записи на дошці, а викладачеві вчасно корегувати їх, вказуючи на допущенні при розв'язанні задач помилки (рис.2).

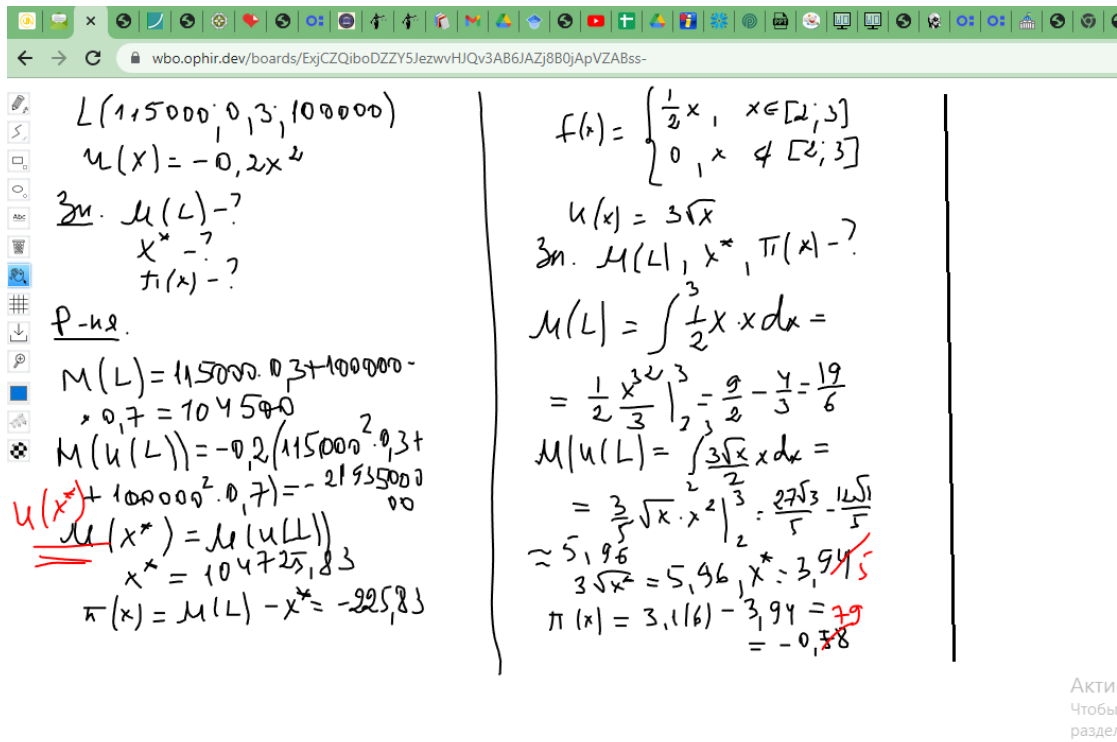


Рис. 2 Спільне редагування записів на онлайн-дошці в реальному часі

Висновки. Перехід на дистанційну форму навчання закладів вищої освіти відкрив для викладачів нові горизонти для саморозвитку та отримання нових знань і, як наслідок, спонукав багатьох до використання в роботі новітніх інформаційно-комунікаційних технологій. Якщо раніше викладачеві достатньо було добре володіти лише набором «офісних» програм і вміти презентувати свої результати, то нині цього недостатньо. Тепер арсенал викладача має поповнитися графічним планшетом, відео- та аудіогарнітурами і вміннями ними скористатися. Онлайн-дошки – це шлях до надання якісних освітніх послуг, але наявні їх різновиди не є універсальними. Тому, вважаємо доцільним створення універсального навчального середовища, серед опцій якого буде наявна віртуальна інтерактивна дошка, можливість здійснення відео- та аудіоконференцій та зворотній зв'язок із студентами.

Література

1. 12 інтерактивних онлайн-дошок для дистанційного навчання та спільної роботи – [Електронний ресурс]: Режим доступу: <https://osvitanova.com.ua/posts/4181-12-interaktyvnykh-onlain-doshok-dlia-dystantsiinoho-navchannia-ta-spilnoi-roboty>.

2. Використання онлайн-ресурсів під час дистанційного навчання в НУШ – [Електронний ресурс]: Режим доступу: <https://naurok.com.ua/post/vikoristannya-onlayn-resursiv-pid-chas-distanciynogo-navchannya-v-nush>

3. Про затвердження Положення про дистанційне навчання. Наказ МОН № 466 від 25.04.13 року – [Електронний ресурс]: Режим доступу: https://osvita.ua/legislation/Dist_osv/2999/

УДК 378.51

Формування фахових компетентностей майбутніх учителів математики засобами інтерактивних технологій

Любов Черкаська, Оксана Москаленко
Юрій Москаленко, Олена Коваленко

Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г.Короленка

Підготовка майбутніх учителів математики у педагогічних вишах передбачає набуття здобувачами освіти загальних і фахових компетентностей, достатніх для розв'язування складних спеціалізованих задач та практичних проблем, що виникають у процесі навчання школярів, формування фахівця із сучасним світоглядом і мисленням, здатного здійснювати гармонійне виховання та компетентнісне навчання математики.

Фахові компетентності, сформованість яких у здобувачів вищої педагогічної освіти уможливорює у подальшому успішне виконання ними виробничих функцій на робочому місці, відображають комплексний характер підготовки майбутніх учителів математики: ґрунтовна фундаментальна (знання

сучасних теоретичних основ спеціальності) та якісна фахово-орієнтована підготовка (уміння застосовувати сучасні методики й освітні технології для забезпечення якості освітнього процесу, знаходити шляхи вирішення типових, прогнозованих ситуацій та непередбачуваних проблем у професійній діяльності). Не менш важливою є потреба формування у студентів умінь налагоджувати комунікацію з колегами й учнями, дотримуватися при цьому етичних норм, створювати атмосферу, комфортну для співробітництва.

Одним з обов'язкових компонентів, передбачених до засвоєння студентами освітніми програмами відповідного спрямування, що має потужний потенціал для системного забезпечення формування у здобувачів освіти фахових компетентностей, є дисципліна «Методика навчання математики». Під час її вивчення студенти здобувають теоретичні знання щодо організації процесу навчання математики у закладах загальної середньої освіти, оволодівають практичними умінями. Якість підготовки студентів залежить від способів їх уключення в освітній процес, вибору викладачами доцільних форм, методів, засобів навчання. Одним з можливих шляхів забезпечення якісної фахово-орієнтованої підготовки студентів є їх залучення до продуктивної пошукової діяльності, активної співпраці у групі та з викладачем на лекціях, практичних та лабораторних заняттях. Перспективним у цьому контексті видається використання інтерактивних педагогічних технологій.

Педагогічна технологія тлумачиться дослідниками як модель спільної педагогічної діяльності педагога зі здобувачами освіти, що передбачає систематичне та послідовне втілення у практику раніше спроектованого навчально-виховного процесу, а також сукупність способів (методів, прийомів, операцій) та засобів педагогічної взаємодії задля досягнення поставлених цілей та умов керування цим процесом з безумовним забезпеченням комфортних умов для усіх його учасників. Педагогічна технологія покликана забезпечувати конкретний результат, сприяти ефективному навчанню і вихованню за рахунок підвищення у здобувачів освіти інтересу та мотивації. Сильною стороною педагогічної технології є те, що в ній конструюється й здійснюється навчальний процес, котрий має гарантувати досягнення поставлених цілей.

Серед різновидів педагогічних технологій такими, що найбільш сприяють оптимізації освітнього процесу, є інтерактивні технології навчання. Термін «інтерактив» походить від англійського слова «*interact*», де «*inter*» – взаємний, «*act*» – діяти, отже, «*interact*» – взаємодіяти. Інтерактивність у навчанні розглядаємо як постійну активну взаємодію здобувачів освіти між собою та з викладачем на засадах співробітництва та співтворчості, і яка спрямована на створення комфортних умов навчання, за яких здобувач стає активним учасником навчально-пізнавальної діяльності (відбувається активізація пізнавальної діяльності), відчуває свою успішність, власні інтелектуальні досягнення, що робить продуктивним сам процес набуття знань, формування навичок і вмінь. Це співнавчання, взаємонавчання (колективне, групове, навчання у співпраці), де усі учасники освітнього процесу є рівноправними, рівнозначними, рівноцінними його суб'єктами. При цьому педагог бере на себе роль організатора процесу навчання, лідера групи.

Визначальними принципами підготовки здобувачів освіти, покладеними в основу засвоєння ними курсу методики навчання математики, є проблемність і розвивальна спрямованість; формування практичних компонентів досвіду має поєднуватися з теоретичним навчанням. Відтак, основними завданнями, що розв'язуються у процесі опанування здобувачами освіти курсу методики навчання математики, є:

- навчити аналізувати типові та можливі педагогічні ситуації навчання математики в школі, інтерпретувати відповідні дії учнів та вчителів,
- формувати вміння моделювати шкільний навчально-виховний процес з математики, проектувати навчальну діяльність учнів та педагогічну діяльність учителя в навчанні математики з урахуванням різних форм навчання (очна, дистанційна тощо),
- формувати вміння структурувати навчальний матеріал з математики та конструювати можливі відповідні методичні системи чи їх компоненти,
- формувати вміння створювати добірки математичних задач, які можна було б використати в індивідуальній, груповій та фронтальній роботі з учнями (навчального, контролюючого спрямування тощо),
- формувати математичні та фахові компетентності, пов'язані з розвитком майбутнього вчителя як суб'єкта навчально-педагогічної діяльності.

Як альтернативу монологічній лекції з методики навчання математики можна розглядати лекцію з елементами інтерактивної бесіди, під час якої окремі важливі питання (особливо практичного спрямування або дослідницького характеру) варто винести на загальне обговорення, доцільною є постановка певних завдань та окреслення загальних напрямків їх вирішення з подальшою роботою над ними на практичних та лабораторних заняттях. Як показує практика, залучення студентів до роботи протягом лекції істотно підвищує їх пізнавальну активність, зацікавленість розглядуваною проблематикою, спонукає до подальшої продуктивної творчої діяльності.

Практичні заняття з методики навчання математики повинні бути спрямовані на розгляд теоретичних основ організації та забезпечення освітнього процесу у закладах загальної середньої освіти, а також розкриття практичних аспектів діяльності вчителя математики, розв'язування методичних завдань (репродуктивних, реконструктивно-варіативних, творчих), теоретичне моделювання навчальних ситуацій та дослідження особливостей їх практичного проектування у реальних навчальних умовах. Ефективність розв'язування поставлених завдань залежить від активної позиції студента, характеру організації його роботи на занятті. Вважаємо за доцільне використання парної або групової форми організації діяльності студентів з вирішення поставлених завдань та подальшим представленням і обговоренням отриманих результатів на загал. Жвава дискусія щодо професійно важливих питань дозволяє формувати у майбутніх учителів математики уміння

аргументовано висловлювати власну точку зору, відстоювати свою позицію, поважати думки опонентів, дослухатися до слуханих рекомендацій, сприймати конструктивну критику. Знання й уміння, набуті у процесі активної діяльності та продуктивного спілкування, а не пасивного сприйняття, є більш дієвими.

Особливого значення для формування високопрофесійного, компетентного, творчого вчителя математики, готового до підвищення свого наукового і методичного рівня відповідно до вимог, що змінюються, є сформованість практичних умінь виконання виробничих функцій вчителя математики у закладах загальної середньої освіти, обізнаність щодо сучасних методів і засобів навчання, ефективних педагогічних технологій. Моделювання окремих етапів навчання математики у школі відповідно до поставлених викладачем методичних завдань забезпечує «занурення» студента у реальний процес навчання у школі. Організація комунікації між «учителем» і «учнями» під час таких уроків чи їх фрагментів, розв'язування відповідних освітніх, розвивальних та виховних завдань, налагодження продуктивної співпраці між усіма учасниками імітаційного освітнього процесу є предметом колективного обговорення на лабораторних заняттях з методики навчання математики. Інтерактивне спілкування на таких заняттях уможлиблює творчий пошук здобувачів освіти, висунення ними цікавих ідей, упровадження новацій.

Компетентності, набуті студентами у процесі вивчення курсу методики навчання математики з використанням інтерактивних технологій, сприятимуть розвитку загальної математичної та методичної культури майбутніх учителів математики, здатних творчо вирішувати освітньо-виховні завдання, прогнозувати і моделювати результати власної професійної діяльності, шукати шляхи і способи самовираження і самоствердження в умовах практичної самостійної роботи.

УДК 378.016:514.132

Опорні конспекти як засіб формування основних понять у геометрії Лобачевського

Наталія Шаповалова, Лариса Панченко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Вступ. Доцільність створення опорних конспектів при навчанні гіперболічної геометрії обумовлена необхідністю поєднання різних засобів навчання, як матеріальних, так і ідеальних, в умовах дистанційного навчання. Опорні конспекти дають можливість поєднання комбінації подання нового освітнього матеріалу з демонструванням наочності.

Матеріали і методи. Педагогічна особливість опорного конспекту, його дидактична та психологічна сутності описані в статті [3, с. 131]. Опорний конспект – це наочний, систематизований та практичний матеріал, що дозволяє

полегшити процес навчання, додає впевненості, можливості досягти високого рівня інтенсивності й інформативності заняття [3, с. 132].

Результати. Як приклад наведемо частину одного з опорних конспектів при навчанні існування та кількості паралельних прямих на площині Лобачевського студентів математичних спеціальностей фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, а саме, при перевірці виконання трьох вимог до системи аксіом.

Аксіоматика Лобачевського.

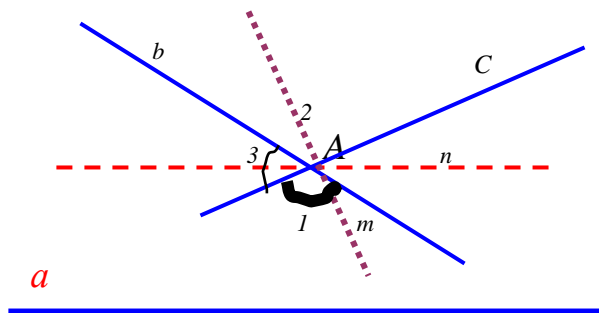
Геометрія Лобачевського (або гіперболічна геометрія) ґрунтується на аксіомах I—IV груп аксіом абсолютної геометрії + Аксіома Лобачевського.

АЛ

Через точку, яка не належить до даної прямої, в площині, яка визначається ними, можна провести не менше двох прямих (принаймні дві прямі), які даної прямої не перетинають.

з АЛ

Існує безліч прямих, що проходять через т. A і не перетинають пряму a .



Дано: $a, A (A \notin a)$

За **АЛ** : $\exists b, c \begin{cases} b \cap a = \emptyset \\ c \cap a = \emptyset \end{cases}$

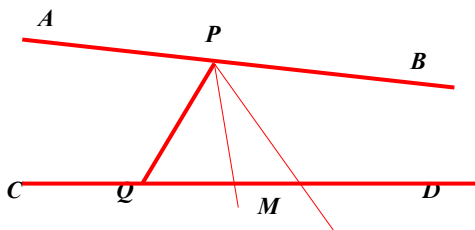
$\forall m \text{ ——— } \angle 1 \text{ і } \angle 2 \mid m \cap a \neq \emptyset$

$\forall n \text{ ——— } \angle 3 \text{ і } \angle 4 \mid n \cap a = \emptyset$

Прямі на площині Лобачевського вважають направленими.
Пряма AB (від A до B).

Означення паралельних прямих (за Лобачевським):

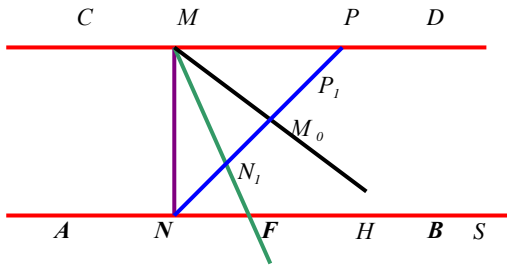
Пряма AB називається паралельною прямій CD , якщо ці прямі не перетинаються і які б не були точки $P \in AB$ і $Q \in CD$, будь-який внутрішній промінь $\angle QPB$ перетинає промінь QD .



Ознака: Пряма AB буде паралельною прямої CD , якщо існують точки $P \in AB$, $Q \in CD$ такі, що будь-який внутрішній промінь PM кута QPB перетинає промінь QD .

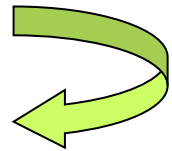
? Чи існують паралельні прямі ?? (за Лобачевским)

Дано: $AB, M \notin AB$.



Проведемо $MN \perp AB$
 $CD \perp MN (M \in CD)$

$CD \cap AB = \emptyset$ (лема)



Виберемо $\forall P \in MD (M-P-D)$

Дедекіндів переріз відрізка NP
 на класи K_1 і K_2 :
 $\forall X \in NP$ | т. $X \in K_1$, якщо $MX \cap NB \neq \emptyset$
 | т. $Y \in K_2$, якщо $MY \cap NB = \emptyset$

Властивості ДП

а) $N \in K_1, \exists N_1 \neq N$
 $N_1 \in K_1$

$\forall F \in NB, \Rightarrow MF \cap NP = N_1$
 7 кл

$P \in K_2$
 $\exists P_1 \neq P : P_1 \in K_2$

За аксіомою Λ існує дві прямі, які проходять через M і не перетинають AD . $C'D' \cap ND = P_1$

б) Якщо $N_1 \in K_1, \forall P_1 \in K_2$, то $N-N_1-P_1$.

припустимо протилежне
 $N-P_1-N_1$

MP_1 — вн. промінь $\angle NMN_1 \Rightarrow MP_1 \cap NB \neq \emptyset$

$P_1 \in K_1$

що суперечить

Виконано дедекіндів переріз.

$\exists M_0$, яка здійснює переріз.
 Доведемо, що $M_0 \in K_2$

Припустимо протилежне
 $M_0 \in K_1$

$$MM_0 \cap NB = H$$

Виберемо: $N-H-S$

$$MS \cap NP = M'_0 \in K_1$$

$M_0 - M'_0 - P$

M_0 не здійснює дедекіндів переріз. \implies припущення не правильне.

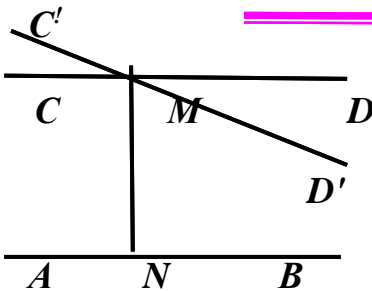


$M_0 \in K_2$

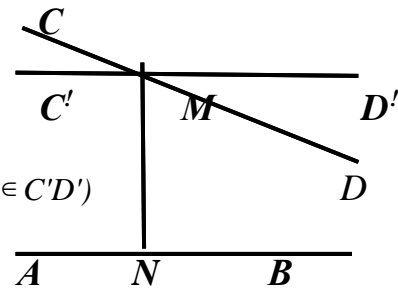
$MM_0 \parallel AB$

(Ознака \parallel)

??? Чи єдина пряма $MM_0 \parallel AB$.



Нехай $CD \parallel AB$ ($M \in CD$)
 Припустимо, що $\exists C'D' \parallel AB$ ($M \in C'D'$)



Або

MD' - вн. промінь $\angle NMD$

MD - вн. промінь $\angle NMD'$

$CD \parallel AB, C'D' \not\parallel AB$

$C'D' \parallel AB, CD \not\parallel AB$

суперечить умові

Припущення не правильне

Через точку поза прямою в площині, визначеній ними, в одному напрямку можна провести єдину пряму, паралельну даній.



Через точку поза прямою на площині проходять дві прямі, паралельні даній в різних напрямках.

Висновки. Створення та використання опорних конспектів у освітньому процесі, де інформація, необхідна для засвоєння навчального матеріалу, викладена стисло у вигляді схем, рисунків, таблиць, діаграм, кольорових відповідностей тощо, є нагальним і доцільним, особливо, в умовах дистанційного навчання.

Значимість опорних конспектів, які є одночасно і засобом наочності, і засобом систематизації отриманих знань, і засобом інтенсифікації навчального процесу обумовлена часом [1, с. 82-83]..

Література

1. Шаповалова Н., Бублик А. Аксіоматичний метод побудови наукової теорії в опорних конспектах // Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі: Збірник матеріалів Всеукраїнської наукової конференції (17-18 грудня 2020 р.). – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2021. – С. 82-86. (0,3 д.а.)
2. Шаповалова Н. В., Панченко Л. Л., Бублик А. С. Опорні конспекти як засіб дистанційного навчання системи аксіом д. Гільберта евклідової геометрії // Матеріали ІХ Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28—29 грудня 2020 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. – С. 234-237. (0,3 д.а.) (ISBN 978-617-7721-27-6) – URL: <http://matan.kpi.ua/public/files/2020/mvstu9/MSTU9.pdf>
3. Грищенко С. В., Шаповалова Н. В. Використання опорних конспектів при вивченні геометрії у навчальних закладах вищої освіти // Інформатика, інформаційні системи та технології: тези доповідей вісімнадцятої всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців. Одеса, 23 квітня 2021 р. – Одеса, 2021. – С. 130-133. (0,2 д.а.) – URL: https://pnpu-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/site_pdpu_edu_ua/EaJL1NNxekVPq6r9sfsRBkoBRAAipKWtPOvzUNpzGVw2eA?e=YMZrGa

STEM-проекти на уроках математики в ЗЗСО

Катерина Юрченко

*КУ Сумська загальноосвітня школа I-III ступенів №6,
м. Суми, Сумської області*

У XXI столітті все більше виникає попит на професії, які включають в себе, так звані, навички 4К: креативність, критичне мислення, комунікацію та командну роботу. Ці навички притаманні STEM-освіті (S–science, T–technology, E–engineering, M–mathematics), яка глибше проникає в сучасний навчальний процес закладів загальної середньої освіти (ЗЗСО). STEM-освіта передбачає як отримання знань з даних наук, так і здатність застосовувати ці знання на практиці. І ЗЗСО не можуть залишитися осторонь сучасних тенденцій, які диктує розвиток нових технологій.

При впровадженні елементів STEM-освіти в навчальний процес використовуються різноманітні методи навчання серед яких найбільш розповсюдженим є метод проєктів. Даний метод передбачає певну сукупність навчально-пізнавальних прийомів, що дозволяють вирішити ряд проблем під час самостійних дій з обов'язковою презентацією результатів – розробленого проєкту [3].

При використанні методу проєктів в STEM-освіті він наповнюється сучасними підходами до вирішення поставлених задач та новітніми засобами реалізації STEM-освіти. Тому в реаліях STEM, метод проєктів створює умови для розробки такого поняття як STEM-проекти.

Під навчальним STEM-проектом розуміємо систему навчання, за якою учні набувають знання, уміння і навички під час планування та виконання практичних завдань-проектів, що постійно ускладнюються. Під час роботи за STEM-проектом чільне місце приділяється самостійній роботі учнів та їх активності, ініціативності та захопленості [4]. STEM-проекти можуть мати індивідуальний, груповий чи колективний характер. В їх основу покладено ідею здійснення навчання на активній основі, через самостійну і практичну діяльність учнів з урахуванням їхніх особистих інтересів [1].

Дослідженням STEM-проектів на уроках в ЗЗСО займалися В. Андрієвська, В. Гринько, Л. Клименко, О. Кошелев, К. Рябчун та інші. Науковці досліджували особливості сучасної STEM-освіти, з'ясовували дидактичні особливості її реалізації та розробки навчальних STEM-проектів.

Для роботи над STEM-проектом необхідно дотримуватись певних етапів (рис. 1): підготовчого (етап дискусійного обговорення зазначеної проблематики), планувального (етап розробки плану роботи та розподілу обов'язків в колективі); досліджувального (основний етап дослідження проблематики) та результуючого (етап на якому відбувається підбиття підсумків та розробка презентації проєкту).

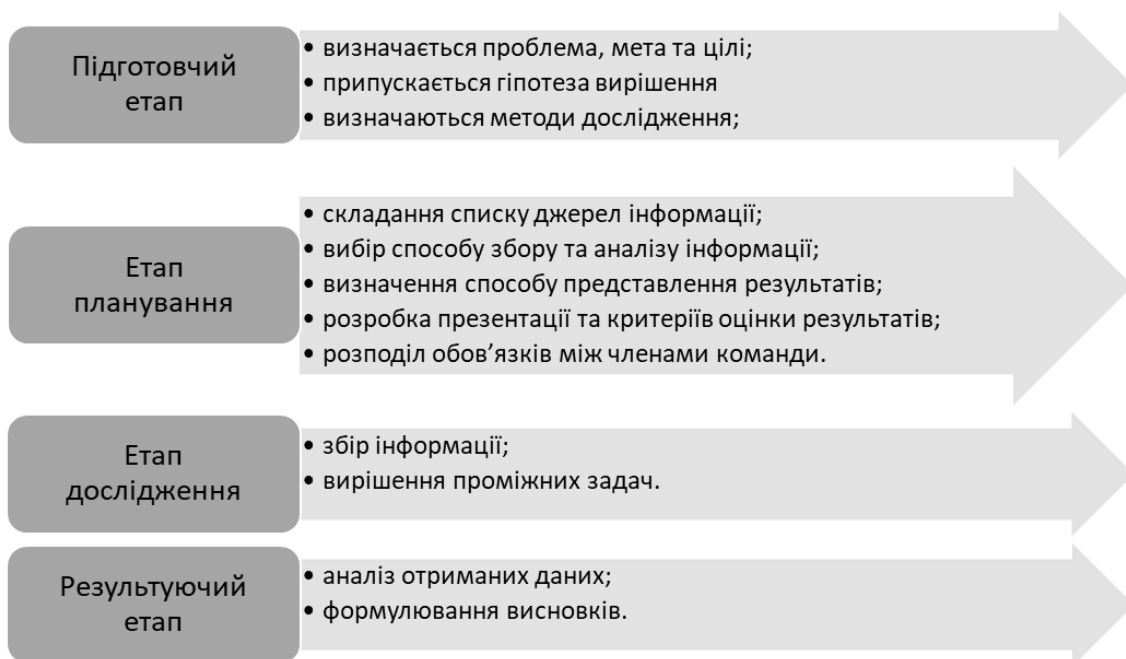


Рис. 1. Етапи роботи над STEM-проєктами

Наведемо приклад STEM-проєкту математичного спрямування, який може бути реалізований на уроках геометрії в старших класах ЗЗСО.

Таблиця 1.

Опис математичного STEM-проєкту

Назва STEM-проєкту	Математична стіна
Клас	11
Тривалість роботи над проєктом	від 2 до 3 тижнів
Навчальні предмети, що поєднуються у проєкті	математика, інформатика, основи економіки, образотворче мистецтво, естетика
Тип проєкту	груповий
Тематичне питання	практичне застосування обчислення площ многокутників до оздоблення стіни класної кімнати.
Завдання до проєкту	на основі обстеження стіни класної кімнати розробити презентацію проєкту з описом та детальним поясненням візуального оформлення.
Обладнання, необхідне для реалізації проєкту	фотоапарат, вимірювальна стрічка, комп'ютер, принтер, Інтернет, пакет програм Microsoft Office, графічний редактор, папір, учнівські зошити.
Вихідні знання та навички	учні мають уявлення про обчислення площ многокутників, розробляють дизайнерський STEM-проєкт рисунку та наносять його на фото у графічному редакторі. Вміють користуватися комп'ютером, створювати

	презентації та публікації.
Очікувані результати	готова комп'ютерна презентація
Діяльність після виконання проекту	запропонувати учням дослідити стіни навчального закладу та запропонувати найбільш вдалу для візуалізації патріотичного зображення.

Метою такого STEM-проекту є:

- розширити знання учнів з алгебри та геометрії про застосування формул для обчислення площ многокутників до оздоблення стіни класної кімнати;
- на практиці використовувати набуті знання про площі многокутників;
- вироблення у школярів практичних дизайнерських навичок;
- виховання в учнів інтересу до вивчення математики;
- формування у дітей умінь працювати з додатковою літературою, інтернет-джерелами, працювати в групі [2].

Таким чином, зазначимо, що STEM-проекти – це поєднання теорії та практики, постановка певного розумового завдання і практичне його виконання. Вибір такого виду діяльності дає учням можливість отримувати актуальну освіту як доповнення до традиційної форми навчання. STEM-проекти спрямовані перш за все на повторення і закріплення вивченого матеріалу.

Література.

1. Кошелєв О., Гринько В. Навчальний STREAM-проект в курсі математики педагогічного закладу вищої освіти. Молодь і ринок, 2018. №11 (166). С. 100-104.
2. Мирна І.О., Чемерис М.І., Петренчук С.В., Міхєєва І.М., Якимчук О.О., Павлік Т.В., Головченко Л.А., Мельниченко В.А., Остапенко О.О., Хильчук Н.М. Використання елементів STEAM-освіти на уроках математики в сучасній школі : практичний посібник, Житомир: 2020. 78 с.
3. Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. М., 2000. 272 с.
4. Рябчун К.В. STEAM проекти для младших школьников на уроках информатики. URL: <http://dspace.pnpu.edu.ua/bitstream/123456789/12238/1/14.pdf>

Наукове видання

**ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-МЕТОДИЧНА
КОНФЕРЕНЦІЯ**

**«СУЧАСНІ НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ
ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ»**

23 – 24 травня 2022 р.

Відповідальний за випуск **Іван Юрик**

Комп'ютерна верстка **Ольга Пушенко**