

М.А. Мартиненко
І.І. Юрик

Вища математика
Спеціальні розділи

Київ
2015

ЗМІСТ

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Лекція І. Комплексні числа і дії над ними.

1.1 Означення комплексного числа, тригонометрична і показникова форма комплексного числа.....	5
1.2. Послідовність комплексних чисел і її границя.....	10
1.3. Числові ряди.....	11
1.4. Запитання для самоконтролю.....	12
1.5. Практичне заняття №1. Комплексні числа і дії над ними..	12

Лекція 2. Функції комплексної змінної.

2.1. Означення функції комплексної змінної.....	16
2.2. Криві і області в комплексній площині.....	16
2.3. Границя функції комплексної змінної.....	18
2.4. Неперервні функції.....	20
2.5. Функціональні ряди.....	21
2.6. Степеневі ряди.....	22
2.7. Елементарні функції комплексної змінної.....	24
2.8. Запитання для самоконтролю.....	29
2.9. Практичне заняття №2. Функції комплексної змінної. Ряди.....	30

Лекція 3. Диференціювання функцій комплексної змінної

3.1. Означення похідної.....	38
3.2. Умови диференційовності функції комплексної змінної.....	40
3.3. Аналітичні функції.....	43
3.4. Диференціювання степеневого ряду. Ряд Тейлора.....	46
3.5. Геометричний зміст похідної. Її поняття про конформне відображення.....	47
3.6. Запитання для самоконтролю.....	48
3.7. Практичне заняття №3. Диференціювання функцій комплексної змінної.....	49

Лекція 4. Інтегрування функцій комплексної змінної

4.1. Означення інтеграла і його властивості.....	55
4.2. Інтегрування функціональних рядів.....	57
4.3. Основна теорема Коші.....	58
4.4. Формула Коші.....	63
4.5. Розклад аналітичної функції в степеневий ряд.....	65
4.6. Запитання для самоконтролю.....	68
4.7. Практичне заняття №4. Інтегрування функцій комплексної змінної.....	69

Лекція 5. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки аналітичних функцій

5.1. Ряд і теорема Лорана.....	76
5.2. Нулі функції.....	79
5.3. Ізольовані особливі точки і їх класифікація.....	80
5.4. Нескінченно віддалена особлива точка.....	82
5.5. Запитання для самоконтролю.....	85
5.6. Практичне заняття №5. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки аналітичних функцій.....	85

Лекція 6. Лишки

6.1. Означення лишку	94
6.2. Теорема Коші про лишки.....	94
6.3. Обчислення лишків.....	95
6.4. Застосування лишків до обчислення дійсних визначених інтегралів.....	97
6.5. Логарифмічний лишок.....	99
6.6. Запитання для самоконтролю.....	101
6.7. Практичне заняття №6. Лишки.....	102

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 7. Перетворення Лапласа і його властивості

7.1. Зображення і оригінал.....	109
7.2. Властивості перетворення Лапласа. Лінійність.....	113
7.3. Запитання для самоконтролю.....	124

7.4. Практичне заняття №7. Перетворення Лапласа і його властивості.....	125
---	-----

Лекція 8. Знаходження оригіналу за зображенням

8.1. Елементарний метод.....	132
8.2. Теореми розкладу.....	133
8.2. Запитання для самоконтролю.....	137
8.3. Практичне заняття №8. Знаходження оригіналу за зображенням.....	137

Лекція 9. Застосування операційного числення

9.1. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь і систем рівнянь з постійними коефіцієнтами...	142
9.2. Розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою формули Дюамеля.....	145
9.3. Розв'язування задач електротехніки.....	147
9.4. Запитання для самоконтролю.....	149
9.5. Практичне заняття №9. Застосування операційного числення.....	149

Лекція 10. Решітчаста функція. Різницеві рівняння

10.1. Означення решітчастої функції та скінченої різниці...	157
10.2. Зв'язок між різницями і значеннями решітчастих функцій.....	158
10.3. Суми значень решітчастої функції.....	159
10.4. Різницеві рівняння.....	161
10.5. Запитання для самоконтролю.....	164
10.6. Практичне заняття №10. Решітчаста функція. Різницеві рівняння.....	164

Лекція 11. Дискретне перетворення Лапласа і його властивості

11.1. Означення D -перетворення і Z -перетворення.....	171
11.2. Основні властивості дискретного перетворення.....	175
11.3. Запитання для самоконтролю.....	180
11.4. Практичне заняття №11. Дискретне перетворення Лапласа і його властивості.....	180

Лекція 12. Знаходження оригіналу за зображенням. Застосування D -перетворення до розв'язання різницевих рівнянь

12.1. Зв'язок між D -перетворенням і перетворенням Лапласа.....	185
12.2. Формули розкладу.....	186
12.3. Застосування D -перетворення до розв'язування різницевих рівнянь.....	189
12.4. Запитання для самоконтролю.....	190
12.5. Практичне заняття №12. Знаходження оригіналу за зображенням. Застосування D -перетворення до розв'язання різницевих рівнянь.....	191
Література.....	212
Зміст.....	213

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного університету харчових технологій (протокол № 5 від 5 грудня 2014 року)

Рецензенти: Ю.Б. Зелінський – зав. відділом Інституту математики НАН України, доктор фіз.–мат. наук, професор;
І.Д. Іванюта – професор кафедри інформаційних технологій Український Державний університет фінансів та міжнародної торгівлі, канд. фіз.–мат. наук

Мартиненко М.А.(Теор. поля, мат. фізика) , Юрик І.І.(Функ. комп. змін., операц. числ.) Вища математика. Спеціальні розділи: Навч. посіб. — К.: НУХТ, 2015. — с.539.

Посібник містить такі розділи: математична фізика, теорія поля, теорія функцій комплексної змінної, операційне числення.

Теоретичний матеріал подано у формі лекцій із прикладами типових задач. Наприкінці кожної лекції надано перелік основних запитань для самоконтролю знань і завдання для проведення практичних занять. Навчальний посібник розрахований для студентів технічних вузів.

Видання подано в авторській редакції.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Основи теорії функцій комплексної змінної були закладені в середині XIX ст. роботами Коші, Вейєрштраса і Рімана.

Перехід до функцій комплексної змінної такий же природний, як перехід від дійсних до комплексних чисел. Він дає можливість глибше вивчити елементарні функції і встановити цікаві зв'язки між ними. Багато теорем спрощуються, якщо розглядати дійсні змінні, як частинний випадок комплексних змінних.

Теорія функцій комплексної змінної дає ефективні методи дослідження складних інтегралів, диференціальних рівнянь, рядів тощо. За допомогою цієї теорії вчені розв'язали багато важливих проблем. Так, Жуковський розв'язав цілий ряд важливих задач аеро-гідродинаміки. Мусхелішвілі, Келдиш, Лузін, Лаврентев розв'язали ряд важливих задач теорії пружності.

Теорія функцій комплексної змінної широко застосовується в сучасній електротехніці, в гідро-аеродинаміці та інших галузях техніки.

Лекція 1. Комплексні числа і дії над ними.

Означення комплексного числа, тригонометрична і показникова форма запису комплексного числа.

Послідовність комплексних чисел і її границя.

Числові ряди

1.1. Означення комплексного числа, тригонометрична і показникова форма запису комплексного числа.

Комплексним числом називається вираз

$$z = x + iy$$

(1.1)

де x та y – дійсні числа, а символ i – уявна одиниця, яка задовольняє умову $i^2 = -1$. При цьому число x називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y – уявною частиною z , $y = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: *reel* – дійсний, *imaginaire* – уявний). Вираз, що стоїть справа у формулі (1.1), називається алгебраїчною формою запису комплексного числа. Два числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Комплексне число $z = x + iy$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$.

Основні дії над комплексними числами тепер будуть виконуватись за звичайними правилами додавання і множення многочленів відносно i з урахуванням того, що $i^2 = -1$.

Зокрема,

1. $(z_1 + z_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$;
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$,

де $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$.

Два числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Таким чином ми розширили множину чисел тим, що ввели в неї загальніші числа, так що дійсні числа стали лише окремими випадками комплексних і в цій розширеній множині виконуються дії додавання, віднімання, множення і ділення, причому залишаються правильними і всі основні закони цих дій як і в множині дійсних чисел. Множину комплексних чисел позначають буквою $\mathbb{C}$.

Рівняння $z^2 + 1 = 0$, яке нерозв'язне в множині дійсних чисел, має розв'язок $z = \pm i$ в множині комплексних чисел.

Більше того, справедливе таке твердження (основна теорема алгебри): довільне рівняння

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in C, a_0 \neq 0)$$

має в множині комплексних чисел рівно n комплексних коренів (з урахуванням кратності).

Це означає, що многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

розкладається в добуток множників першого степеня:

$$P_n(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

де числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ є коренями многочлена $P_n(z)$, серед яких можуть бути однакові.

Приклад.

Виконати дії:

а) $z_1 - z_2$; б) $z_1 z_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$; г) $(z_1)^3$, де $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - i$.

Розв'язання.

а) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$;

б) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 11 + 10i$;

в) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{(4 - i)(4 + i)} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$;

г) $(2 + 3i)^3 = 2^3 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$. •

Комплексні числа можна зобразити точками площини. Якщо користуватись декартовою системою координат, то число (1.1) зображається точкою $M(x; y)$. Таким чином існує взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок площини. Така площина умовно називається комплексною площиною змінної z або z – площиною, вісь Ox – дійсною віссю, а Oy – уявною.

Комплексні числа $z = x + 0i = x$, $z = 0 + iy = iy$ зображаються точками осі Ox і Oy відповідно.

Полярні координати точки $M(x; y)$ на комплексній площині називаються модулем і аргументом комплексного числа і позначається

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Оскільки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ (рис.1.1),

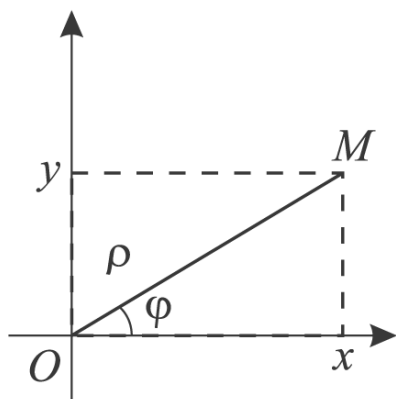


Рис. 1.1

то

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(1.2)

°Вираз, який стоїть справа у формулі (1.2), називається *тригонометричною формою комплексного числа* $z = x + iy$.

Модуль $|z| = r$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент φ з точністю до $2\pi k$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тут під $\operatorname{Arg} z$ розуміють загальне значення аргументу, на відміну від нього, $\arg z$ – головне значення аргументу, воно знаходиться на проміжку $[0; 2\pi)$ і відраховується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки (іноді розглядають і від'ємні аргументи: $\varphi \in [-\pi, \pi)$).

Якщо $z = 0$, то вважають, що $|z| = 0$, а $\arg z$ – невизначений.

Для z і $\bar{z}$ маємо $|z| = |\bar{z}|$ і $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Приклад. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

а) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$; б) $\cos \alpha - i \sin \alpha$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } x = -2, \quad y = 2\sqrt{3}, \quad r &= \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } x = \cos \alpha, \quad y = -\sin \alpha, \quad r &= \sqrt{\cos^2 \alpha + (-\sin \alpha)^2} = 1, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{r} = \cos \alpha, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = -\sin \alpha, \quad \varphi = 2\pi - \alpha. \quad \bullet \end{aligned}$$

Розглянемо дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тоді

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Отже, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2$. Звідси

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ця формула називається формулою Муавра.

При діленні комплексних чисел маємо

$$\circ \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad r_2 \neq 0.$$

Отже, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2$.

Накінець розглянемо добування кореня з комплексного числа. Якщо для даного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ треба знайти число $\omega = \sqrt[n]{z} = |\omega|(\cos \psi + i \sin \psi)$, то за означенням кореня і формулою Муавра маємо

$$z = \omega^n = |\omega|^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Звідси $|\omega|^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки $|\omega| > 0$, $r > 0$, то $|\omega| = \sqrt[n]{r}$, де під коренем потрібно розуміти його

арифметичне значення, тому

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). \quad (1.3)$$

Надаючи k значень $0, 1, 2, \dots, n-1$, дістанемо n різних значень кореня, а інші цілі значення k визначають корені, які співпадають з перерахованими.

Використавши формулу Ейлера п.2.7

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (1.4)$$

комплексне число можна записати в показниковій формі

$$z = re^{i\varphi}.$$

Приклад. Знайти $(1 - i\sqrt{3})^5$.

Розв'язання.

- Запишемо дане число в тригонометричній формі (рис.1.2):

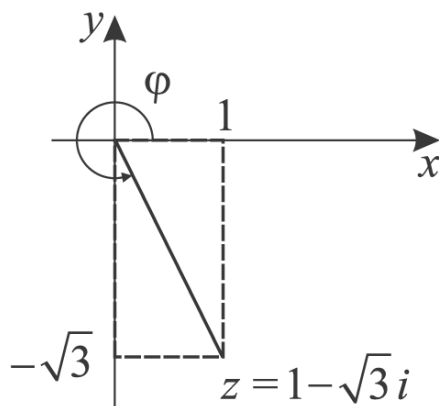


Рис. 1.2

$$z = 1 - i\sqrt{3}, \quad r = 2, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2},$$

$$\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{5}{3}\pi, \quad z = 2 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right).$$

За формулою Муавра маємо

$$z^5 = (1 - i\sqrt{3})^5 = 2^5 \left(\cos \frac{25}{3} \pi + i \sin \frac{25}{3} \pi \right) = 16(1 + i\sqrt{3}) \bullet$$

Приклад. Розв'язати рівняння $z^4 - 1 = 0$.

Розв'язання.

◦ Оскільки $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то за формулою (1.3)

$$z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тому маємо чотири корені даного рівняння:

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad z_4 = \cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi = -i \quad \bullet$$

1.2. Послідовність комплексних чисел і її границя.

Нехай $z_n = x_n + iy_n, n = 1, 2, \dots$ — послідовність комплексних чисел.

Комплексне число $z_0 = x_0 + iy_0$ називають скінченою границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$ такий що $|z_n - z_0| < \varepsilon$ для всіх $n > N$ і записують $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

Коротко означення границі можна записати так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Послідовність, яка має скінчену границю, називають *збіжною*, а послідовність, яка не має скінченною границі — *розбіжною*. Справедлива.

Теорема. Для того, щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінчену границю $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мали скінчені границі, які дорівнюють відповідно x_0 та y_0 .

Тому можна дати еквівалентне означення границі послідовності комплексних чисел: число $z_0 = x_0 + iy_0$ називається *границею послідовності комплексних чисел* $z_n = x_n + iy_n$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Дамо геометричну інтерпретацію границі послідовності.

Околом (ε -околом) точки z_0 називається круг $|z - z_0| < \varepsilon$ з центром у точці z_0 .

Якщо число z_0 є границею послідовності $\{z_n\}$, то це означає, що всі точки z_n для $n > N$ лежать всередині круга радіуса ε з центром у точці z_0 (рис.1.3).

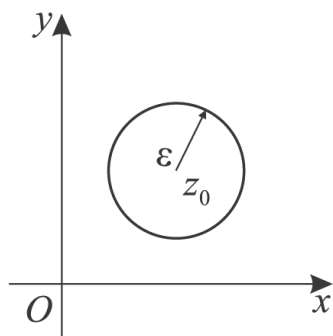


Рис. 1.3

У теорії функції комплексної змінної розглядається також і нескінченна границя. Кажуть, що послідовність $\{z_n\}$ має нескінчену границю або прямує до нескінченності, якщо для довільного числа $M > 0$ знайдеться число $N = N(M)$ таке, що $|z_n| > M$ для всіх $n > N$ і пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

Якщо послідовність $\{z_n\}$ має нескінчену границю, то геометрично це означає, що для $\forall R > 0$ всі точки z_n для $n > N(R)$ лежать поза кругом $|z| \leq R$.

Нескінченну границю, яку позначають символом ∞ , називають *невласним* (нескінченим) комплексним числом, а відповідну їй точку — *нескінчено віддаленою точкою комплексної площини*. Модуль цього числа вважають рівним $+\infty$, а поняття дійсної, уявної частини та аргументу для цього числа позбавлені смислу.

Околом нескінчено віддаленої точки називається множина точок z , які задовольняють нерівність $|z| > R$, тобто зовнішня частина круга $|z| \leq R$.

Комплексна площина, до якої приєднано єдину нескінчено віддалену точку, називається *розширеною комплексною площиною*.

1.3. Числові ряди

Вираз вигляду

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n, \quad (1.5)$$

де $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$ – комплексні числа, називають *числовим рядом* з комплексними членами.

Суми $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ називаються *частинними сумами ряду* (1.5).

Ряд (1.5) називають збіжним, якщо збіжна послідовність $\{S_n\}$ і розбіжним, якщо ця послідовність розбіжна. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ то S називають

сумою ряду (1.5) і пишуть $S = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.

З теореми попереднього розділу випливає:

Теорема 1. Для збіжності ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, де $z_n = x_n + iy_n$ необхідно і достатньо, щоб ряди з дійсними членами $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ були збіжними.

При дослідженні на збіжність рядів користуються також такою достатньою ознакою збіжності.

Теорема 2. Якщо ряд, утворений з модулів членів ряду (1.5) $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots$ збіжний, то збіжний, причому абсолютно, і ряд (1.5).

Запитання для самоконтролю

1. Що називається комплексним числом? Як записуються комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формі?

2. Що називається модулем і аргументом комплексного числа?
3. Як визначаються дії над комплексними числами в алгебраїчній та тригонометричній формах?
4. Написати і довести формулу Муавра.
5. Яка необхідна і достатня умова збіжності послідовності комплексних чисел?
6. Дати геометричну інтерпретацію границі послідовності комплексних чисел?
7. Що називається околom нескінченно віддаленої точки?
8. Яка необхідна і достатня умова збіжності рядів з комплексними членами?

Практичне заняття №1

Комплексні числа і дії над ними

1.1 . Виконати дії

$$\text{а) } (2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7; \quad \text{б) } (1+i)^4; \quad \text{в) } \frac{2+i}{1-i}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } (2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7 = (2+i)((2-i)(2+i) + 2) = (2+i)(4+3) = 14 + 7i.$$

$$\text{б) } (1+i)^4; = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

$$\text{в) } \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i-1}{2} = \frac{3i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i. \bullet$$

1.2. Виконати дії

$$\text{а) } z_1 - z_2; \quad \text{б) } z_1 z_2; \quad \text{в) } \frac{z_1}{z_2}; \quad \text{г) } z_1^3, \text{ де } z_1 = 2 + i,$$

$$z_2 = 3 + 4i.$$

1.3. Виконати дії

$$\text{а) } (3-i)(2+3i); \quad \text{б) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

1.4.Записати в тригонометричній формі комплексні числа

$$\text{а) } z = -2; \quad \text{б) } z = -i; \quad \text{в) } z = -1 + i\sqrt{3}.$$

Розв'язання.

$$\circ \text{а) } |-2| = 2, \quad \varphi = \pi; \quad -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi);$$

$$\text{б) } |-i| = 1, \quad \varphi = \frac{-\pi}{2}; \quad -i = \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2};$$

$$\text{в) } |-1 + i\sqrt{3}| = 2, \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi; \quad -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right). \bullet$$

1.5.Обчислити, використовуючи формулу Муавра:

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{20}$$

Розв'язання.

$$\circ |\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 2, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right),$$

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{20} = 2^{20}\left(\cos \frac{20\pi}{4} - i \sin \frac{20\pi}{4}\right) = -2^{20}. \bullet$$

1.6.Обчислити

$$\text{а) } (1+i)^{10}; \quad \text{б) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}; \quad \text{в) } (2-2i)^7; \quad \text{г) }$$

$$(\sqrt{3} - 3i)^6.$$

1.7.Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{-1 - i\sqrt{3}}$.

Розв'язання.

$$\circ -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{-2}{3}\pi + i \sin \frac{-2}{3}\pi\right). \text{ За формулою (1.3) знаходимо}$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

Звідси:

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2}{9}\pi - i \sin \frac{2}{9}\pi \right),$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{4}{9}\pi + i \sin \frac{4}{9}\pi \right),$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{10}{9}\pi + i \sin \frac{10}{9}\pi \right). \bullet$$

1.8. Знайти всі значення кореня

а) $\sqrt{i}$, б) $\sqrt[4]{-i}$, в) $\sqrt[3]{-1+i}$, г)

$$\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$$

1.9. Розв'язати рівняння

а) $z^2 + 2z + 5 = 0$; б) $4z^2 - 2z + 1 = 0$;

в) $z^3 - 1 = 0$; г) $z^3 + 1 = 0$.

1.10. Записати комплексне число в показниковій формі

а) $z = -2$; б) $z = -i$; в) $z = -1 - \sqrt{3}i$;

г) $z = 1 + i$; д) $z = -2 + 2i$; е) $z = -1 - i$.

1.11. Знайти границю послідовності

а) $z_n = \frac{3n-1}{n} + i \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$, б) $z_n = (-1)^n + i \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right)$.

Розв'язання

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n} = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = e^2.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = 3 + ie^2$.

б) Тут послідовність $x_n = (-1)^n$ розбігається і тому z_n теж розбігається. •

1.12.Обчислити границі

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-in}{1+in}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2-i + \frac{1}{n}(1+i) \right)$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2i)^n$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3^n + i \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$.

1.13. Дослідити на збіжність ряди

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i \frac{(-1)^n}{n} \right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3} \right)^n$.

Розв'язання.

° а) Розглянемо відповідні ряди з дійсними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Перший з них збіжний як геометрична прогресія із знаменником $q < \frac{1}{2} < 1$,

а другий збігається за ознакою Лейбніца. Отже, за теоремою 1 даний ряд збіжний (умовно).

б) Скористаємось теоремою 2. Складемо ряд з модулів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{2-i}{3} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2-i}{3} \right|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n.$$

Цей ряд збіжний, бо є геометричною прогресією, у якої знаменник

$q < \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Отже, даний ряд абсолютно збіжний. •

1.14.Дослідити на збіжність ряди

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i \sin n}{n^3};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2+i)i}{4} \right)^n;$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{3n^2 + 1};$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n};$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n};$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}.$$

Відповіді

$$1.2. \text{ а)} -1 - 3i;$$

$$\text{б)} 2 + 11i;$$

$$\text{в)} \frac{2-i}{5};$$

$$\text{г)} 2 + 11i;$$

$$1.3. \text{ а)} 9 + 7i;$$

$$\text{б)} i;$$

$$1.6. \text{ а)} 32i;$$

$$\text{б)} 512(1 - i\sqrt{3});$$

$$\text{в)} 2^{10}(1+i);$$

$$\text{г)} 1728;$$

$$1.8. \text{ а)} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$\text{б)} \pm \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right); \pm \left(\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right);$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i), \sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \sqrt[6]{2} \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right); \text{ г)} \pm (\sqrt{3} - i);$$

$$1.9. \text{ а)} -1 \pm 2i;$$

$$\text{б)} \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i;$$

$$\text{в)} 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \text{г)}$$

$$-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$1.10. \text{ а)} 2e^{i\pi};$$

$$\text{б)} e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$\text{в)}$$

$$2e^{-\frac{2}{3}\pi i};$$

$$\text{г)} \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i};$$

$$\text{д)} 2\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i};$$

$$\text{е)} \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i};$$

$$1.12. \text{ а)} -1;$$

$$\text{б)} 2 - i;$$

$$\text{в)}$$

$$\infty;$$

$$\text{г)} \infty;$$

$$1.14. \text{ а)} \text{ розбіжний}; \quad \text{б)} \text{ абсолютно збіжний}; \quad \text{в)} \text{ умовно збіжний};$$

$$\text{г)} \text{ розбіжний}; \quad \text{д)} \text{ збіжний};$$

$$\text{е)} \text{ збіжний}.$$