

**А.В. БАШТА**, кандидат технічних наук  
*Національний університет харчових технологій*

## МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ АМПЛІТУДНИХ НАПРУЖЕНЬ ПРИ СКЛАДНОМУ ПОВТОРНО-ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Запропоновано методику визначення границі витривалості конструкційних матеріалів при складному навантаженні в широкому діапазоні змінення діючих напружень. Напівемпірична залежність, що пропонується, дає можливість визначати амплітудні напруження в інтервалі найбільш небезпечного співвідношення їх. Позитивним є те, що при цьому значно скорочується база необхідних експериментальних досліджень з одночасним використанням більш широкої "вихідної" інформації про механічні властивості самого матеріалу.

**Ключові слова:** границя втоми матеріалу, витривалість матеріалу, гіперболічна крива, утомні критерії міцності, граничне напруження, інтервал напружень, складний напружений стан.

В работе предложено методику определения границы выносливости конструкционных материалов при сложном нагружении в широком диапазоне изменения действующих напряжений. Полуэмпирическая зависимость, что предлагается, дает возможность определять амплитудные напряжения в интервале наиболее опасного их соотношения. Положительным является то, что при этом значительно сокращается база необходимых экспериментальных исследований с одновременным использованием более широкой "исходной" информации о механических свойствах самого материала.

**Ключевые слова:** граница усталости материала, выносливость материала, гиперболическая кривая, усталостные критерии прочности, граничное напряжение, интервал напряжений, сложное напряженное состояние.

Переважає більшість машин і апаратів переробної харчової промисловості працює в складних технологічних умовах. Деталі й вузли машин у процесі роботи постійно перебувають під дією різних циклічних навантажень. Проблема прискореної оцінки характеристик міцності матеріалів, які використовуються для виготовлення і прогнозування їхньої довговічності, на основі обмеженого об'єму експериментальних даних є досить важливою науковою та інженерною задачею.

Відомі енергетичні, статичні, технологічні, градієнтні гіпотези утомної міцності [1, 3, 6, 7, 9, 10], що пропонуються для вирішення цієї складної науково-практичної проблеми, не пояснюють усієї сукупності закономірностей, що спостерігаються при руйнуванні матеріалів в умовах дії повторно-змінних навантажень. Аналіз підходів, які покладено в основу таких гіпотез, а також вивчення досить значного обсягу експериментальних даних, наведених у літературі [4, 5, 13], вказує на те, що завдання

створення загальної теорії руйнування матеріалів від втоми в умовах складного навантаження не є повністю розв'язаним.

Основним напрямом роботи є створення методики аналітичного визначення граничних значень амплітудних напружень при складному напруженому стані, наприклад в умовах дії згину і кручення, та її апробація в експериментальних дослідженнях і в інженерних розрахунках. Цікавим з позиції витривалості матеріалу є також визначення амплітудних значень напружень, що спільно діють в інтервалі найнебезпечнішого їх співвідношення.

В умовах складного напруженого стану матеріал перебуває під дією як мінімум двох силових факторів. Тобто одну і ту ж базу випробувань можна досягти при різному співвідношенні взаємно діючих навантажень. Іншими словами, одне і те ж граничне значення інтенсивності напружень для наперед заданої бази випробувань можна досягнути дією на дослідний зразок абсолютно різних навантажень. При цьому слід враховувати, що взаємозв'язок між напруженнями, які виникають в матеріалі, є нелінійним.

Вирішенню цих питань з достатнім ступенем надійності сприяє запропонована методика. Наведені в науково-технічній літературі [11, 12], а також отримані автором дані визначення границі витривалості при складному напруженому стані для ВЧ50-2 (високоміцний чавун) та Д16Т (дуралюмін) [2, 8] свідчать про те, що точки експериментальних результатів розподіляються в деякій сегментній зоні (заптрихована на рис. 1), але не нижче від прямої (лінія Зодерберга), яка проходить через значення границь витривалості при простих повторко-змінних навантаженнях. Наприклад, при спільній дії згину і кручення це точки  $\sigma_{-1}$  і  $\tau_{-1}$  в системі осей координат  $\sigma\tau$ .

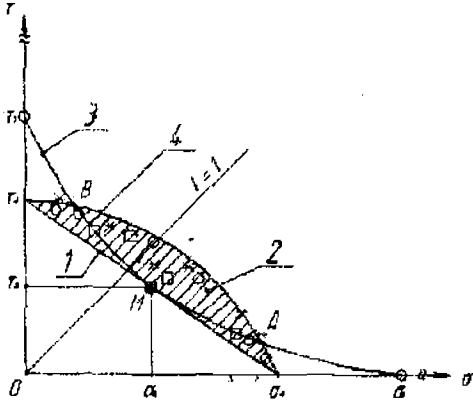


Рис. 1. Діаграма розподілу граничних напружень при складному циклічному навантаженні: 1 — пряма Зодерберга; 2 — область експериментальних даних; 3 — гіперболічна крива; 4 — еліптична крива Серенсена

Задамо розподіл взаємозв'язку напружень, які діють у зоні пружних деформацій на матеріал, гіперболічною кривою у вигляді

$$\tau_a = \frac{b}{\sigma_a + c} - a, \tag{1}$$

а рівняння прямої, що проходить через точки  $\sigma_{-1}$  і  $\tau_{-1}$  на осі абсцис і осі ординат, — так:

$$\tau_a = \tau_{-1} \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \sigma_a. \tag{2}$$

Задаючи крайні точки гіперболи в цих осях значеннями границь текучості матеріалу  $\sigma_T$  при згині і  $\tau_T$  при крученні, визначимо коефіцієнти (а і b) із граничних умов

$$a = \frac{\tau_T}{\sigma_T} c \text{ і } b = \frac{\tau_T c (\sigma_T + c)}{\sigma_T}. \tag{3}$$

Для конкретизації положення гіперболічної кривої у вибраній системі осей координат, а саме для визначення третього коефіцієнта (с), розв'яжемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \tau_a = \frac{\tau_T c (\sigma_T - \sigma_a)}{\sigma_T (\sigma_a + c)}; \\ \tau_a = \tau_{-1} - \frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} \sigma_a. \end{cases} \tag{4}$$

Позначивши  $\frac{\tau_{-1}}{\sigma_{-1}} = t_1$ ;  $\frac{\tau_T}{\sigma_T} = t_T$ , отримаємо відносно с квадратне рівняння

$$\alpha c^2 + \beta c + \gamma = 0. \tag{5}$$

Коефіцієнти

$$\alpha = \left(1 - \frac{t_T}{t_1}\right)^2;$$

$$\beta = \frac{2\tau_{-1}}{t_1} \left(\frac{t_T}{t_1} - 1\right) + \frac{4}{t_1} (\tau_{-1} - \tau_T); \tag{6}$$

$$\gamma = \left(\frac{\tau_T}{t_1}\right)^2$$

визначимо через границі текучості  $\sigma_T$ ;  $\tau_T$  і границі витривалості  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  матеріалу при відповідному простому навантаженні.

Розв'язком рівняння (5) буде значення амплітудних напружень  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  (координати т. М) на площині  $(\sigma\tau)$  (рис. 1). Якщо знайдений розв'язок, а точніше — амплітудні значення напружень не зруйнують зразок при циклічному навантаженні на базі випробувань  $10^7$ ,  $10^8$  циклів, то маємо можливість говорити про визначення в першому наближенні границі витривалості цього матеріалу при складному напруженому стані. Логічно також стверджувати, що практично будь-яке співвідношення амплітудних напружень в інтервалах  $0 \leq \tau_a \leq \tau_{-1}$ ,  $0 \leq \sigma_a \leq \sigma_{-1}$  і розраховане за наведеним рівнянням гіперболи буде безпечно для цього матеріалу. Запропонована залежність поєднує в собі поряд з граничними характеристиками витривалості граничні значення текучості дослідного матеріалу при відповідному простому навантаженні, тобто дає змогу повніше враховувати властивості матеріалу при визначенні його здатності опиратися дії цієї сукупності прикладених циклічних навантажень.

Досить часто в інженерній практиці при проектуванні й розрахунку деталей машин чи елементів конструкцій, що працюють в умовах складних циклічних навантажень, треба знати гранично допустиме співвідношення цих навантажень та напружень, що виникають при цьому. Наведені в літературі дослідні дані свідчать про те, що еліптична залежність, запропонована Серенсеном [5], криві Гольцева [2], Писаренко — Лебедева [4] добре узгоджуються з експериментом, будучи об'єднаними експериментальних точок по верхній межі їх розподілу, тоді як запропонована гіперболічна крива огинає дослідні точки по нижній межі розподілу їх на площині  $(\sigma\tau)$ .

Цікавим є намагання визначити допустимий інтервал змінювання спільно діючих напружень, виходячи із граничних характеристик витривалості та текучості чи міцності цього матеріалу при одноосному його навантаженні.

Щоб розв'язати цю задачу, скористаємось отриманим вище гіперболічним рівнянням і рівнянням гіпотези міцності при зтомі, яка краще "спрацьовує" для

матеріалів цього виду, тобто крихких чи пластичних. В наших розрахунках це еліптична залежність Серенсена

$$\begin{cases} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1; \\ \frac{\tau_T \sigma (\sigma_T - \sigma_a)}{\sigma_T \tau_a (\sigma_a + c)} = 1, \end{cases} \quad (7)$$

Перегин цих двох кривих в точках В і Д з координатами відповідно  $\tau'_a; \sigma'_a$  і  $\tau''_a; \sigma''_a$  буде спільним розв'язком системи рівнянь (7). А елемент площі, що обмежується цими кривими, визначатиме ту область на площині ( $\sigma\tau$ ), де будуть розмішуватися точки, які відповідатимуть безпечному, щодо утоми матеріалу співвідношенню амплітудних значень граничних напружень. Іншими словами, при вибраному в цьому інтервалі значенні нормального напруження  $\sigma_a$  можемо визначити максимальне дотичне напруження  $\tau_a$ , спільна дія яких буде безпечною для цього матеріалу.

Систему рівнянь (7) можна звести до рівняння такого вигляду:

$$X^4 + A_1 X^3 + A_2 X^2 + A_3 X + A_4 = 0, \quad (8)$$

де коефіцієнти  $A_1, A_2, A_3$  і  $A_4$  визначаються аналітично через  $\sigma_{-1}, \tau_{-1}, \sigma_T, \tau_T$ , що отримані при лінійному напруженому стані:

$$\begin{aligned} A_1 &= (\sigma_T \kappa)^2 - (\sigma_{-1} c)^2; \\ A_2 &= -2(\sigma_T \kappa^2 c^2 + \sigma_{-1} c); \\ A_3 &= (1 + \kappa^2) c^2 - \sigma_{-1}^2; \\ A_4 &= 2c; \\ \kappa &= \frac{\sigma_T \tau_{-1}}{\tau_T \sigma_{-1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Із чотирьох коренів рівняння (8) нас будуть цікавити тільки два додатних. Те, що вони додатні й раціональні, добре видно з рис. 1. Слід сказати, що розв'язок рівняння (8) аналітичним шляхом потребує відповідної навички і може викликати певні труднощі. Скориставшись ПЕОМ та одним із відомих наближених числових методів обрахунку, корені цього рівняння, а відповідно, і значення граничних напружень при їх спільній дії в умовах циклічного навантаження можуть бути легко обраховані. Так, для дуралюмінію Д16Т за цими розрахунками отримано такі значення напружень: т. М —  $\tau_a = 50$  МПа,  $\sigma_a = 83$  МПа; "верхня" т. В —  $\tau'_a = 97$  МПа,  $\sigma'_a = 39$  МПа; "нижня" т. Д —  $\tau''_a = 23$  МПа,  $\sigma''_a = 160$  МПа, для високоміцного чавуну ВЧ50-2 відповідно: т. М —  $\tau_a = 120$  МПа,  $\sigma_a = 130$  МПа; "верхня" т. В —  $\tau'_a = 158$  МПа,  $\sigma'_a = 41$  МПа; "нижня" т. Д —  $\tau''_a = 45$  МПа,  $\sigma''_a = 176$  МПа. Ці точки (В, Д) відповідають верхній і нижній межам інтервалу безпечного змінення співвідношень значень спільно діючих циклічних напружень. Розраховані значення напру-

жень були випробувані на зразках прямокутної форми в поперечному перерізі на базі  $1 \cdot 10^7$  циклів.

Як показують дослідження, найнебезпечнішим щодо втоми матеріалів є співвідношення діючих напружень в ділянці  $L = 1$ , де коефіцієнт  $L$  характеризує відношення діючих амплітудних напружень, наприклад  $L = \tau_a / \sigma_a$ . Так, якщо матеріал має однакові границі витривалості, текучості чи міцності для простих випадків навантаження, то при спільній дії гранично допустимих амплітудних напружень їхнє відношення буде дорівнювати одиниці. В тому ж разі, коли матеріал має різні вказані характеристики, точка дотику М гіперболічної кривої і прямої Зодерберга буде зміщуватися від одиниці в той чи інший бік, тим самим визначаючи небезпечне співвідношення їх. Слід зазначити, що найбільша розбіжність між експериментальними і теоретичними даними спостерігається якраз у зоні максимальних (т. М) спільно діючих напружень. Причому, якщо наведені вище теорії утомної міцності в дії зоні, як правило, завищують граничні значення амплітудних напружень, то розрахована за гіперболічною залежністю границя витривалості є дещо заниженою. Однак, враховуючи недосконалість технології виробництва, механічних та інших видів оброблення деталей, запропонована методика визначення напруженого стану матеріалу може бути рекомендована для застосування в інженерних розрахунках при проектуванні й конструкторському розробленні деталей та вузлів машин і механізмів.

За межами визначеного інтервалу (т. В і т. Д) незначні напруження — нормальні  $\sigma_a$  порівняно з дотичними і дотичні  $\tau_a$  порівняно з нормальними — практично не впливають на границю витривалості матеріалу.

Таким чином, використання запропонованої методики визначення граничних навантажень в умовах складного напруженого стану дає змогу значно скоротити тривалість необхідних випробувань, а в деяких випадках взагалі відмовитися від їх проведення. Досить знати границі, наприклад, текучості й витривалості для даного матеріалу в умовах простого навантаження, щоб аналітичним методом визначити амплітудні значення напружень, які будуть відповідати його границі витривалості при складному напруженому стані в першому наближенні, а в разі потреби — визначити і небезпечний інтервал змінення допустимих співвідношень їх.

#### Висновки:

1. Жоден із відомих критеріїв міцності при втомі матеріалів не є універсальним.

2. Методика, що пропонується, дає змогу на обмеженій базі випробувань визначити граничні значення амплітудних напружень, що спільно діють в найбільш небезпечному їх співвідношенні.

3. У разі потреби методика дає змогу визначити інтервал безпечного співвідношення напружень при складному напруженому стані в умовах дії циклічних навантажень.

4. Незначне заниження значень границі витривалості в зоні найбільш небезпечного співвідношення

амплітудних напружень (т. М) дає змогу в першому наближенні гарантувати безпечну роботу конструкційних елементів при інженерних розрахунках.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Афанасьев Н.Н. Статистические теории усталостной прочности материалов. — К.: АН УССР, 1953. — 127 с.
2. Башта А.В. Выносливость алюминиевого сплава Д16Т в широком диапазоне изменения нормативных и касательных напряжений // Проблемы прочности. — 1985. — № 12. — С. 68—73.
3. Гольцев Д.Н. Об условиях прочности при переменных нагрузках и сложном напряженном состоянии: Вопросы динамики и динамической прочности. — Рига: Изд. Латв. ССР, 1953. — С. 47—88.
4. Gough H.J. and Pollard H.V. The Strength of Metals under Combined Alternating Stresses // Proc., Inst. of Mechan. Eng. — 1936. — V. 131.
5. Gough H.J. and Pollard H.V. The Effect of Specimen Form on the Resistance of Metals to Combined Alternating Stresses // Proc., The Inst. of Mechan. Eng. — 1936 — V.132.
6. Одинг И.А. Теория пределов усталости металлов при несимметричных циклах и сложнапряженном состоянии // Записки лаборатории. — 1937. — № 4. — С. 14—23.
7. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. — К.: Наук. думка, 1967. — 415 с.
8. Писаренко Г.С., Литовка В.Н., Башта А.В. Определение предела выносливости высокопрочного чугуна при совместном действии чистого изгиба и кручения // Проблемы прочности. — 1986. — № 8. — С. 32—35.
9. Серенсен С.В. О сопротивлении усталости при сложном напряженном состоянии и симметричном цикле: Некоторые вопросы усталостной прочности стали. — М.: Машгиз, 1953. — С. 102—114.
10. Трощенко В.Г. Прочность металлов при переменных нагрузках. — К.: Наук. думка, 1978. — 178 с.
11. Ужик Г.В. Прочность металлов и влияние концентрации напряжений при изгибе с кручением в условиях симметричных циклов переменных нагрузок // Вестник машиностроения. — 1951. — № 7. — С. 17—26.
12. Фомичев П.А. Долговечность металлов при бигармоническом нагружении // Проблемы прочности. — 2004. — № 3. — С. 14—22.
13. Циклические деформации и усталость металлов / Под ред. Трощенко В.Г. — К.: Наук. думка, 1985. — Т. 2. — 222 с.

Одержана редколлегією 04.04.05 р.