

## ПРО ВІДОБРАЖЕННЯ ІЗ СТАЛИМ РОЗТЯГОМ

Доводиться новий критерій сталості функції

A new criterion of the constancy of functions is proved in the paper

Відомо, якщо для неперервної в області  $D \subset C$  функції  $f(z)$  комплексної змінної в кожній точці існує границя

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (1)$$

і якщо вона на щільній множині в  $D$  дорівнює нулю, то  $f(z) = \text{const}$ .

Мета полягає в тому, щоб довести узагальнення згаданого результату, а саме: той же висновок, але із зміною умови (1) на умову існування

$$p(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \quad (2)$$

Усі поняття і позначення, що будуть використані без посереднього пояснення, точно відповідатимуть прийнятим у роботі [3].

**Теорема.** Нехай для неперервної в області  $D$  функції  $f(z)$  існує (скінченна або нескінченна) границя  $p(z)$  (2) в кожній точці, за винятком не більше як зічної її множини. Якщо вона дорівнює нулю на щільній множині, то  $f(z) = \text{const}$ .

**Зауваження.** Те, що твердження теореми і насправді нетривіальне, показує приклад функції  $f(z) = \varphi(x) + i\varphi(y)$ , де  $\varphi(x)$  - приклад Помпейю [2], - скрізь диференційованої ніде не сталої функції на прямій, для якої множина  $\{x: \varphi'(x) = 0\}$  скрізь щільна; функція  $f(z)$  тут здійснює до того ж ще і нульвимірне відображення площини. Звичайно, про існування границі (2) тут не може бути і мови.

**Доведення.** Зауважимо насамперед, що в умовах теореми множина  $\{z: p(z) = 0\}$  як множина рівня функції першого класу має тип  $G_\delta$  - оскільки вона щільна в  $D$ , то вона другої категорії скрізь (в  $D$ ). На ній  $p(z) = 0$ , тобто  $df = 0$ , отже, в околі будь-якої точки із  $D$  знайдеться круг, на якому  $f$  задовольняє умови Ліпшица [3].

Тепер припустимо, що зуміємо довести теорему при додатковому обмеженні:  $f \in Lip$ ; покажемо, як звідси випливає її висновок для всієї області  $D$ .

Таким чином, маємо таку ситуацію: для неперервної функції  $f(z)$  в  $D$  маємо скрізь щільну (в  $D$ ) відкриту

множину  $D$ , в кожній компоненті якої  $f = \text{const}$ , причому на множині, що залишилася,  $P = D \setminus D$  існує границя (2). Продовжимо максимально функцію  $f$  із збереженням цієї властивості; припущення, що  $P \neq \emptyset$ , приведемо до протиріччя.

Передусім, очевидно, що  $P$  (якщо вона не пуста) - досконала. Далі, якщо множина  $P \{z: p(z) = \infty\}$  - не першої категорії на  $P$ , то легко виділити порцію  $P' = P \cap d$  ( $d$  - круг в  $D$ ), на якій виконується

$$|f(z') - f(z)| > |z' - z|, z, z' \in P;$$

тоді функція  $F(z) = f(z) + \frac{1}{2}z$  буде голоморфною в

$d \setminus P'$  і однолистою на  $P$ . Тому вона здійснює внутрішнє відображення круга  $d \subset D$ ; очевидно, можна визнавати його однолистим в  $d$ . Для оберненої функції  $\Phi(w)$  в області  $\delta = F(d)$  маємо тоді таке:

- 1) Образ  $\pi' = F(P')$  ніде не щільний в  $\delta$ ;
- 2) в кожній компоненті відкритої множини  $\delta \setminus \pi'$  функція  $\Phi(w)$  голоморфна;
- 3) розтяг

$$r(w) = \lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{\Phi(w+k) - \Phi(w)}{k} \right|$$

існує в кожній точці  $w \in \pi'$  (за винятком не більше як зічної її множини) і обмежений числом 2.

З усього цього випливає, що  $\Phi$  голоморфна скрізь в  $\delta$ , а тому і  $F$  голоморфна скрізь в  $d$ , тобто голоморфною, а через те сталою скрізь в  $d$  буде  $f$ , але це суперечить умові максимальності множини  $D = D \setminus P$  по відношенню до цієї властивості.

Отже, множина  $P \{z: p(z) = \infty\}$  - першої категорії на  $P$ . Але тоді множина  $N = P \{z: p(z) < \infty\}$  - скрізь другої категорії на  $P$  і зображується у вигляді

$$N = \bigcup_k P_k$$

Де  $P_k = P \{z: \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| \leq k \text{ при } |h| < \frac{1}{k}\}$ .

Оскільки  $P_k$  - замкнене [3], то можемо визнавати, що на деякій порції  $P' = P \cap d$  ( $d \subset D$  - круг) маємо  $P' \subset P_k$ ; тоді попередні міркування відносно  $F(z)$ , застосовані в

даному випадку до функції  $\bar{F}(z) = f(z) + 2kz$ , знову призводять до протиріччя з властивістю максимальності відкритої множини  $D = D \setminus P$ .

Таким чином, залишилося довести теорему при додатковому обмеженні  $f \in Lip$ .

В умовах теореми в кожній точці  $z \in D$ , за винятком не більше як зліченної їх множини, множина моногенності  $\mathcal{M}_z(f)$  являє собою точку або дугу кола чи саме коло з центром у початку координат на площині похідних чисел  $C$ . Візьмемо таку точку  $z$ . Можливі два випадки:

- 1)  $\mathcal{M}_z(f)$  розбиває площину  $C_z$ ;
- 2)  $\mathcal{M}_z(f)$  не розбиває цієї площини.

У першому випадку можна вибрати дві раціональні точки  $r, r'$  відмінні від початку координат і які належать до різних компонент доповнення  $C_z \setminus \mathcal{M}_z$ . У другому випадку  $r, r'$  вибираємо довільно, але за умови, що  $r \neq r'$  і  $r, r' \neq 0$ .

Випишемо всі раціональні точки площини  $C_z$ , відмінні від нуля, в певну послідовність:

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \quad (3)$$

Визначимо множини  $D_n \subset D (n=1, 2, \dots)$ :

$z \in D_n$ , якщо вибрана для неї пара раціональних точок  $r_n, r'_n$  із (3) задовольняє таким умовам:

$$1) \quad |r_n - r'_n| \geq \frac{4}{n}, \quad \text{круги} \quad |\zeta - r_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |\zeta - r'_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{не}$$

містять початку координат  $\zeta = 0$ ;

$$2) \quad \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - r_n \right| \geq \frac{1}{n}, \quad \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - r'_n \right| \geq \frac{1}{n}, \quad (4)$$

$$\forall z' : |z' - z| < \frac{1}{n}.$$

Легко бачити, що всі  $D_n$  замкнені і

$$D = \left( \bigcup_n D_n \right) \cup H, \quad (5)$$

де  $H$  - не більше як зліченна множина.

Нехай - довільна підобласть області  $D$ . Покажемо, що в ній знайдуться точки голоморфності  $f(z)$ .

З рівняння (5) випливає, що

$$d' = \left( \bigcup_n d'_n \right) \cup h,$$

де  $d'_n = D_n \cap d'$ ;  $h = H \cap d'$ .

Оскільки  $d'$  - другої категорії в собі, то знайдеться круг  $d \subset d'$ , в якому одна із замкнених множин  $d'_n$  щільна, тобто  $d'_n \supset d$ ; можемо припустити, що радіус круга  $d$  менший ніж  $1/n$ .

З праці [1] відомо, що з неперервності функції  $w = f(z)$  в області  $D \subset C$  випливає той факт, що відображення  $\Phi_f(z) : z \rightarrow \mathcal{M}_z(f)$  має в  $D$  множину другої категорії точок півнеперервності зверху, тобто на множині другої категорії в  $D$  має місце включення

$L_s \mathcal{M}_z(f) \subset \mathcal{M}_{z_0}(f)$ , де  $L_s$  - верхня топологічна границя  $\vec{z} \rightarrow z_0$ .

Згадуючи тепер, що на множині другої категорії в  $D$  маємо  $f'(z) = 0$ , можемо визнати, що центр  $z_0$  круга  $d$  - точка півнеперервності зверху відображення

$\Phi_f(z)$ , в якій  $f'(z_0) = 0$ . Нехай тепер  $d_1$  - круг з радіусом, менш ніж  $1/2n$  і центром у точці  $\zeta = 0$  на площині  $C_\zeta$ . Через півнеперервність зверху відображення  $\Phi_f(z)$  в точці  $z_0$  знайдеться в  $d$  круг  $K$  з центром в точці  $z_0$  такий, що  $\forall z \in K$  маємо  $\mathcal{M}_z(f) \subset d_1$ .

Оскільки функція  $f(z)$  задовольняє умову Ліпшица в  $D$ , а отже, і в  $K$ , то вона є  $R$ -диференційованою майже скрізь (в  $K$ ) [3]. Зазначимо тут, що границя (2) існує в кожній точці  $z \in K$ , за винятком не більше як зліченної їх множини.

Тому, припускаючи супротивне, на множині додатної міри в крузі  $k$  обов'язково знайдеться точка  $z$ , в якій виконується:

- 1)  $f(z)$  є  $R$ -диференційованою функцією;
- 2) існує розтяг  $p(\bar{z})$  (2);
- 3)  $f(z)$  не є моногенною.

Якщо б це було не так, то як легко показати за допомогою формули Гріна,  $f(x)$  була б голоморфною в  $K \subset d'$ .

Таким чином, множина моногенності  $\mathcal{M}_{\bar{z}}(f)$  функції  $f(z)$  в точці  $\bar{z}$  являє собою коло з центром у

початку координат і радіуса  $R = |f_{\bar{z}}| < \frac{1}{2n}$ , де  $f_{\bar{z}}$

обчислюється в точці  $\bar{z}$  [3]. Але це суперечить тому, що  $\bar{z} \in D_n$  і, отже, можна вибрати дві раціональні точки  $r_n$

і  $r'_n$ , відмінні від початку координат і які належать різним компонентам доповнення  $C_z \setminus \mathcal{M}_{\bar{z}}(f)$  так, щоб

$1/n$  - околи цих точок не містили точок із  $\mathcal{M}_{\bar{z}}(f)$  на площині  $C_z$ .

За одержаним протиріччям ліпшицева функція  $f(z)$  в крузі  $K$  моногенна майже скрізь, тобто голоморфна в  $K$ .

Використовуючи довільність  $d' \subset D$ , виділяємо в області  $D$  відкриту скрізь щільну множину  $D_1$  точок голоморфності  $f(z)$ , в кожній компоненті якої, очевидно,  $f = const$ , причому на множині, що залишилася,  $P_1 = D \setminus D_1$  існує границя (2).

Користуючись міркуваннями, аналогічними наведеним на початку доведення теореми, приводимо до того, що  $D_1 = D$ . Отже, теорему доведено.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Горленко С. В. Обобщение теоремы о точках непрерывности производной и его приложения в теории аналитических функций // Десятая математическая школа. - К.: Ин-т математики АН УССР, 1974.
2. Роомреiu Т. Sur la continuité des fonctions de variable complexe, Ann. Fac. Sei. Univ. Toulouse (2)7 (1905).
3. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. - М.: Физматгиз, 1963.
4. Трохимчук Ю. Ю. Устранимые особенности аналитических функций. - К.: Наук. думка, 1992.

Надійшла до редакції 26.05.95