31. ВИКОРИСТАННЯ ПРОМЕНІВ ПРИ ПОБУДОВІ КРИВИХ

Віталій Бородін
Національний університет харчових технологій

Вступ. Традиційно при побудові графіків (після проведення повного дослідження функції) використовують характерні точки кривої та промені в якості асимптот кривої. Основні криві студент бачить в ідеальному вигляді і не має орієнтирів при побудові графіків в конспекті.

Основні положення та результати. Наближення складної функції більш простою привело до диференціала, многочлена Тейлора. Доцільно показати студентам як елементарна функція локально може бути наближена лінійною функцією. Додаткові характерні точки кривої визначаються при перетині кривої з променем $y = kx$.

Розглянемо побудову графіка функції $y = \sin x$. Із співвідношення $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ випливає, що графік $y = \sin x$ та $y = x$ близькі в околі точки $x = 0$. Оцінимо величину відносної похибки $\delta(x) = \dfrac{x - \sin x}{x} \cdot 100\%$ при заміні функції $y = \sin x$ на $y = x$. Оскільки $\delta'(x) > 0$, то $\delta(x)$ при $x \in (0; a]$ досягає найбільшого значення в точці $x = a$. Відносна похибка $\delta(x)$ при заміні $\sin x$ на x при $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$ не перевищує $\delta\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4,7\ \%$, а при $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ не перевищує $\delta\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 11\,\%$. Графік $y = \sin x$ будуємо по схемі. Відмітимо характерні точки $O(0;0)$, $A_1\left(\dfrac{\pi}{2}; 1\right)$, $A_2(\pi; 0)$, $A_3\left(\dfrac{3\pi}{2}; -1\right)$, $A_4(2\pi; 0)$. Будуємо бісектрису $y = x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ в точці $x = 0$. Аналогічні бісектриси будуємо в точках $x = \pi$, $x = 2\pi$ (див. Рис.*1*). Завершити побудову графіка функції $y = \sin x$ просто.

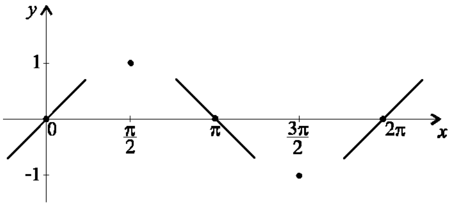

Рис.1.

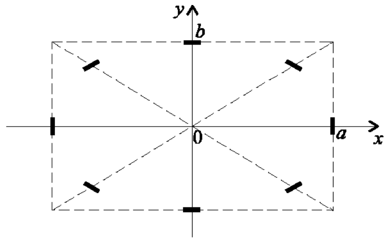

Рис.2.

Для побудови графіка $y = \operatorname{tg} x,\ \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ використовуємо лінійну функцію $y = x,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$. При такій заміні відносна похибка $\delta(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{tg} x} \cdot 100\%$ не перевищує $\delta\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9{,}3\,\%$.

Для побудови еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ крім вершин еліпса доцільно використовувати точки перетину еліпса з променями $y = \pm\frac{b}{a}x,$ які є діагоналями осьового прямокутника. В першій чверті діагональ перетинає еліпс в точці $M_1(x_1, y_1),$ де $x_1 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7a;\ \ y_1 = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7b.$ Дотична до еліпса в точці M_1 паралельна іншій діагоналі (див.Рис.*2*).

Параболу $y = ax^2$ в школі будують стисканням (розтягуванням) параболи $y = x^2$ вздовж однієї з осей. В університеті студент вивчає, що всі параболи $y^2 = 2px$ мають однаковий ексцентриситет $\varepsilon = 1,$ тобто всі такі параболи повинні бути гомотетичними з центром в початку координат. Жодна з осей координат не перетинає параболу в інших точках крім спільної вершини усіх парабол, тому важко прослідкувати, що всі параболи є подібними з центром в точці $O(0;0)$. При побудові параболи $y^2 = 2px$ доцільно провести промені $y = x,$ $y = 2x,$ які перетинають параболу в точках $A_1(2p; 2p),\ \ A_2\left(\frac{p}{2}; p\right).$ Якщо на одному рисунку побудувати дві різні параболи $y^2 = 2px,\ y^2 = 2p_1x,$ то допоміжні промені дозволяють прослідкувати вплив параметра p на розтягування параболи при гомотетії з центром в точці $O.$ Довільний промінь $y = kx$ перетинає будь-яку параболу виду $y^2 = 2px$ під таким самим кутом, оскільки кутові коефіцієнти дотичних до парабол в точках перетину рівні $k_1 = \frac{k}{2}$ (див.Рис.*3*.).

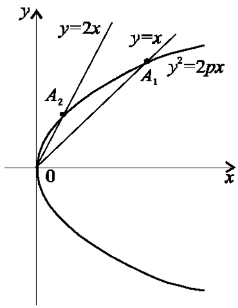

Рис.3.

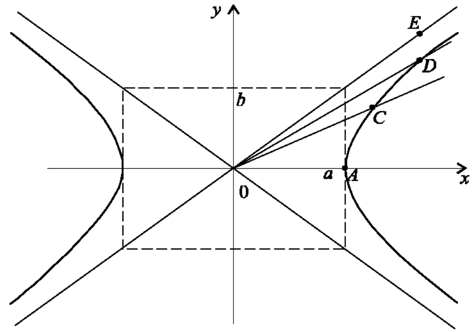

Рис.4.

Гіперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ будують за осьовим прямокутником та асимптотами $y=\pm\frac{b}{a}x,$ які є продовженням діагоналей осьового прямокутника. Наближення гіперболи до асимптот є достатньо повільним. Щоб в цьому переконатися достатньо ввести дві додаткові стандартні точки C і $D,$ які лежать в першій чверті. Точка $C(D)$ утворюється при перетині променя $y=\frac{\frac{3}{5}b}{a}x$ $\left(y=\frac{\frac{4}{5}b}{a}x\right)$ з гіперболою. Маємо $C\left(\frac{5}{4}a;\frac{3}{4}b\right),$ $D\left(\frac{5}{3}a;\frac{4}{3}b\right).$ Точка $E\left(\frac{5}{3}a;\frac{5}{3}b\right)$ лежить на асимптоті над точкою $D.$ Відстань $DE=\frac{1}{3}b,$ що складає 20 % ординати точки E. Таким чином, гіперболу має зміст будувати тільки в межах прямокутника зі сторонами більшими ніж $4a$ та $4b$ (див.Рис.*4*).

Висновки. В роботі запропонована методика більш точної побудови відомих графіків, зокрема кривих другого порядку. Ця методика може бути застосована для побудови довільних кривих.