

О.П. ЛОБОК, канд. фіз.-мат. наук,  
 Б.М. ГОНЧАРЕНКО, д-р техн. наук  
 Національний університет харчових технологій

## ОПТИМАЛЬНЕ ДИСКРЕТНЕ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ БАГАТОВИМІРНИМИ СИСТЕМАМИ

В даній роботі розглядається задача синтезу за модифікованим квадратичним критерієм оптимального дискретного матричного керування об'єктами, які описуються дискретними лінійними математичними моделями. Керування шукається у вигляді зворотного зв'язку від спостережуваних параметрів.

**Ключові слова:** оптимальне дискретне керування, квадратичний критерій, період квантування, принцип максимуму, двоточкова крайова задача, матричне алгебраїчне рівняння, фундаментальна матриця.

В данной работе рассматривается задача синтеза в соответствии с модифицированным квадратичным критерием оптимального дискретного матричного управления объектами, которые описываются дискретными линейными математическими моделями. Управление ищется в виде обратной связи от наблюдаемых параметров.

**Ключевые слова:** оптимальное дискретное управление, квадратичный критерий, период квантования, принцип максимуму, двухточечная крайовая задача, матричное алгебраическое уравнение, фундаментальная матрица.

In this work the task of synthesis is examined in accordance with the modified quadratic criterion of optimum discrete matrix management objects which are described discrete linear mathematical models.

A management is searched as a feed-back from the looked after parameters.

**Keywords:** optimum discrete management, quadratic criterion, period of quantum, principle of maximum, two point regional task, matrix algebraic equation, fundamental matrix.

У зв'язку з широким застосуванням в системах керування комп'ютерної та мікропроцесорної техніки, актуальними стають підходи до пошуку дискретного керування і до використання дискретних математичних моделей об'єктів, оскільки цей тип моделей досить зручно реалізується засобами цифрової техніки. Тому в даній роботі для задач керування лінійними технологічними об'єктами розглядається клас дискретних (цифрових) моделей. Різним аспектам дискретного керування об'єктами присвячені роботи [1, 2, 3]. В даній роботі для таких об'єктів розглядається задача побудови оптимальних дискретних матричних лінійних регуляторів (синтезу керування) від спостережуваних координат об'єкта у відповідності з модифікованим квадратичним критерієм якості функціонування систем керування.

Розглянемо лінійну дискретну модель деякого об'єкта керування

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

де  $x_i$  —  $n$ -вимірний вектор стану,  $u_i$  —  $m$ -вимірний вектор керування в дискретні моменти часу  $\tau_i$ ;  $x_0$  — відомий початковий вектор стану;  $A_i$ ,  $B_i$  — задані матриці розмірностей  $n \times n$  та  $n \times m$  відповідно.

## ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

Нехай спостереження за компонентами вектора стану описуються наступним рівнянням

$$y_i = C_i x_i, \quad (2)$$

де  $C_i$  — задані матриці розмірності  $p \times n$ , що визначають параметри об'єкта доступні для вимірів (спостережень).

Розглянемо наступний квадратичний критерій якості керування, що обмежує відхилення параметрів стану в процесі керування

$$J(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{2i} (x_i^T P_i x_i + u_i^T D_i u_i) + \lambda^{2N} x_N^T P_N x_N, \quad (3)$$

де  $\lambda = \text{const} > 0$  — задана вагова константа,  $P_i, P_N$  — задані невід'ємно визначені,  $D_i$  — додатно визначені симетричні вагові матриці відповідних розмірностей,  $x_N$  —  $n$ -вимірний вектор стану на останньому  $N$ -му періоді квантування, "T" — операція транспонування. Множник  $\lambda^{2i}$  введено до складу функціонала (3) для врахування фактору "старіння" інформації — з метою зменшення впливу на керування "застарілої" інформації.

Задача полягає в тому, щоб знайти оптимальне керування  $u_i$  у вигляді зворотного зв'язку

$$u_i = R_i y_i, \quad (4)$$

яке на розв'язках рівняння (1) мінімізує критерій (3). В співвідношенні (4)  $R_i$  — невідомі шукані матриці керування розмірності  $m \times p$ .

Для розв'язання задачі синтезу матриці керування перетворимо спочатку критерій (3) шляхом заміни змінних  $z_i = \lambda^i x_i$ ,  $v_i = \lambda^i u_i$ . Тоді критерій (3) набуває наступного спрощеного вигляду

$$J(v) = \sum_{i=0}^{N-1} (z_i^T P_i z_i + v_i^T D_i v_i) + z_N^T P_N z_N, \quad (5)$$

де  $z_i$  та  $v_i$  задовольняють рівняння

$$z_{i+1} = \lambda A_i z_i + \lambda B_i v_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (6)$$

Тепер задача полягає в тому, щоб знайти керування  $v_i$  у вигляді

$$v_i = R_i C_i z_i, \quad (7)$$

яке мінімізує критерій (5).

В подальшому перетворенні, підставляючи співвідношення (7) в функціонал (5), одержимо критеріальний вираз у вигляді, що явно містить шукане матричне керування  $R_i$

$$L(R) = \sum_{i=0}^{N-1} \text{tr} \left[ (P_i + C_i^T R_i^T D_i R_i C_i) Z_i \right] + \text{tr} [P_N Z_N], \quad (8)$$

де  $\text{tr}[\cdot]$  — слід матриці, тобто сума її діагональних елементів, а матриця  $Z_i = z_i z_i^T$  задовольняє рекурентне матричне рівняння

$$\begin{cases} Z_{i+1} = \lambda^2 (A_i + B_i R_i C_i) Z_i (A_i + B_i R_i C_i)^T, & i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ Z_0 = x_0 x_0^T. \end{cases} \quad (9)$$

Для розв'язання задачі мінімізації критерію (8)  $\min_R [L(R)]$  використаємо дискретний матричний принцип максимуму [2], у відповідності до якого будемо функцію Гамільтона

$$H(Z_i, \Lambda_{i+1}, R_i) = \text{tr} \left[ (P_i + C_i^T R_i^T D_i R_i C_i) Z_i \right] + \lambda^2 \text{tr} \left[ \Lambda_{i+1} (A_i + B_i R_i C_i) Z_i (A_i + B_i R_i C_i)^T \right],$$

де  $\Lambda_i$  — спряжена додатно визначена симетрична матриця, що задовольняє дискретне рівняння, яке є спряженою системою для визначення оптимального шуканого матричного керування  $R_i$

$$\begin{cases} \Lambda_i = \frac{\partial H(Z_i, \Lambda_{i+1}, R_i)}{\partial Z_i}, & i = N-1, N-2, \dots, 0, \\ \Lambda_N = \frac{\partial}{\partial Z_N} (\text{tr}[P_N Z_N]), \end{cases}$$

де  $P_N$  — раніше означена вагова матриця.

Використовуючи формули матричного диференціювання [4], останнє рівняння можна записати так

$$\begin{cases} \Lambda_i = P_i + C_i^T R_i^T D_i R_i C_i + \lambda^2 (A_i + B_i R_i C_i)^T \Lambda_{i+1} (A_i + B_i R_i C_i), & i = N-1, N-2, \dots, 0, \\ \Lambda_N = P_N. \end{cases}$$

Оптимальна матриця зворотного зв'язку  $R_i$  (дискретний матричний регулятор) знаходиться з умови

$$\frac{\partial H(Z_i, \Lambda_{i+1}, R_i)}{\partial R_i} = 0,$$

звідки

$$R_i = -\lambda^2 (D_i + \lambda^2 B_i^T \Lambda_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T \Lambda_{i+1} A_i Z_i C_i^T (C_i Z_i C_i^T)^{-1}.$$

Якщо зробити заміну змінних  $M_i = \lambda^2 \Lambda_i$ , то остаточно знайдемо матрицю зворотного зв'язку шуканого керування

$$R_i = -(D_i + B_i^T M_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T M_{i+1} A_i Z_i C_i^T (C_i Z_i C_i^T)^{-1}, \quad (10)$$

де  $M_i$  задовольняє матричне рівняння

$$\begin{cases} M_i = \lambda^2 [P_i + C_i^T R_i^T D_i R_i C_i + (A_i + B_i R_i C_i)^T M_{i+1} (A_i + B_i R_i C_i)], & i = N-1, N-2, \dots, 0, \\ M_N = \lambda^2 P_N. \end{cases} \quad (11)$$

Отже, оптимальне дискретне керування  $u_i$ , яке мінімізує функціонал (3), тобто забезпечує якість керування шляхом обмеження відхилення вектора стану  $x_i$ , визначається співвідношенням (4), де матриця зворотного зв'язку  $R_i$  обчислюється за формулою (10). Матриці  $M_i$  та  $Z_i$ , що входять до складу матриці  $R_i$ , знаходяться шляхом розв'язання двохточкової дискретної крайової задачі (9), (11).

Можна також показати, що мінімальне значення критерію (3), що відповідає оптимальному керуванню, дорівнює

$$I_{\min} = \lambda^{-2} x_0^T M_0 x_0. \quad (12)$$

Зауваження 1. Якщо спостерігаються всі координати вектора стану  $x$ , тобто  $C_i = E$  — є одиничною матрицею, то обчислення оптимального керування суттєво спрощується. В цьому випадку матриця  $R_i$  обчислюється за формулою

$$R_i = -(D_i + B_i^T M_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T M_{i+1} A_i, \quad (13)$$

в якій матриця  $M_i$  є розв'язком наступного більш простого ніж (11) рекурентного рівняння

$$\begin{cases} M_i = \lambda^2 [A_i^T M_{i+1} A_i - A_i^T M_{i+1} B_i (D_i + B_i^T M_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T M_{i+1} A_i + P_i], & i = N-1, N-2, \dots, 0, \\ M_N = \lambda^2 P_N. \end{cases} \quad (14)$$

Зауваження 2. Якщо система (1) стаціонарна, тобто  $A_i = A$ ,  $B_i = B$ , то оптимальне керування такою системою на нескінченному часовому проміжку з наступним критерієм, до якого в даному випадку перетворюється функціонал (3)

## ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

$$I(u) = \sum_{i=1}^n \lambda^{2i} (x_i^T P x_i + u_i^T D u_i),$$

визначається за формулою  $u_i = R x_i$ , де

$$R = -(D + B^T M B)^{-1} B^T M A,$$

а матриця  $M$  є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння

$$M = \lambda^2 [A^T M A - A^T M B (D + B^T M B)^{-1} B^T M A + P].$$

Застосуємо одержані результати для оптимального керування температурним режимом в пластинчатій пастеризаційно-охолоджувальній установці молока. Математична модель, що описує даний об'єкт, може бути представлена у вигляді наступної системи звичайних диференціальних рівнянь у відхиленнях реального стану об'єкта від бажаного [5]

$$\begin{cases} \frac{dt_{z\theta}}{d\tau} = -0,0136t_{z\theta} + 0,676G_n + 0,0136t_{x\theta}, \\ \frac{dt_{mn}}{d\tau} = -0,0123t_{mn} + 0,0066t_{mp} - 0,0414G_m + 0,0056t_{z\theta}, \\ \frac{dt_{x\theta}}{d\tau} = -0,0055t_{x\theta} - 0,0092t_{z\theta} + 0,0027t_{mp} - 0,00355G_m, \\ \frac{dt_{mp}}{d\tau} = -0,0068t_{z\theta} + 0,0054t_{mn} - 0,0169G_m, \end{cases} \quad (15)$$

де  $t_{z\theta}$ ,  $t_{x\theta}$  — температура гарячої та холодної води,  $t_{mn}$ ,  $t_{mp}$  — температура пастеризації та рекуперації молока,  $G_n$ ,  $G_m$  — витрата пари та молока відповідно,  $\tau$  — часова координата (час). Це лінеаризована система в околі регламентного заданого стану, тому всі технологічні параметри тут представлені у відхиленнях реального стану об'єкта від регламентного бажаного стану. Керуванням тут є витрати пари  $G_n$  та молока  $G_m$ .

Введемо наступні позначення

$$x_1 = t_{z\theta}, \quad x_2 = t_{mn}, \quad x_3 = t_{x\theta}, \quad x_4 = t_{mp}, \quad u_1 = G_n, \quad u_2 = G_m.$$

Вектор  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  — це вектор стану, який описує температурні параметри об'єкта,  $u = (u_1, u_2)^T$  — вектор керування, пов'язаний з витратами  $G_n$  і  $G_m$ . Тоді систему (15) можна представити у векторно-матричному вигляді

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = Ax(\tau) + Bu(\tau), \quad (16)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -0,0136 & 0,0000 & 0,0136 & 0,0000 \\ 0,0056 & -0,0123 & 0,0000 & 0,0066 \\ -0,0092 & 0,0000 & -0,0055 & 0,0027 \\ -0,0068 & 0,0054 & 0,0000 & 0,0000 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,6760 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0414 \\ 0,0000 & -0,00355 \\ 0,0000 & -0,0169 \end{pmatrix}.$$

Дискретизуємо систему (16). Для цього часовий інтервал  $[t_0, T]$ , на якому розглядається система (16) проквантуємо з періодом  $h$ , де  $h = (T - t_0) / N$ ,  $N$  — кількість періодів квантування. Використовуючи фундаментальну матрицю лінійної системи, представимо розв'язок системи (16), у вигляді

$$x(\tau) = \Phi(\tau, \tau_0)x^0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \Phi(\tau, t)Bu(t)dt, \quad (17)$$

де  $\Phi(\tau, t) = e^{A(\tau-t)}$  — фундаментальна матриця,  $x(\tau_0) = x^0$  — вектор початкового стану об'єкта,  $u(t)$  — вектор керування на часовому інтервалі  $[t_0, T]$ . Враховуючи, що остання формула справедлива для довільного  $\tau_0$ , підставимо в (17) замість  $\tau_0$  — значення  $\tau_i$ , а замість  $\tau$  — значення  $\tau_{i+1}$ , де  $\tau_i, \tau_{i+1}$  — послідовні дискретні моменти часу. Тоді одержимо

$$x(\tau_{i+1}) = \Phi(\tau_{i+1}, \tau_i)x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(\tau_{i+1}, t)Bu(t)dt. \quad (18)$$

Припустимо, що на відрізку  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  керування  $u(\tau)$  апроксимується кусково постійною функцією, тобто  $u(\tau) = u(\tau_i) = u_i, \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ . Тоді, враховуючи справедливості наступної формули інтегрування матричної експоненти

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{-At} dt = (e^{-A\tau_i} - e^{-A\tau_{i+1}})A^{-1},$$

рівняння (18) можна записати так

$$x_{i+1} = \bar{A}x_i + \bar{B}u_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (19)$$

де  $x_i = x(\tau_i)$ ,  $\bar{A} = e^{Ah}$ ,  $\bar{B} = (e^{Ah} - E)A^{-1}B$ ,  $E$  — одинична матриця.

Таким чином одержали дискретну математичну модель пластинчатої пастеризаційно-охолоджувальної установки молока у вигляді рекурентного рівняння (19). Оптимальне керування цією установкою обчислювалось у вигляді матричного регулятора виду  $u_i = R_i x_i$  у відповідності до критерію (3), в якому вагові матриці  $P_i, D_i, P_N$  вибирались одиничними. Числова реалізація синтезованого дискретного матричного керування виконувалась за допомогою математичного пакету MatLab. Нижче наведені деякі результати обчислювальних експериментів, що проводились при наступних даних: період квантування  $h = 20$ , кількість періодів квантування  $N = 30$ , ваговий множник  $\lambda = 1$ .

На рис. 1 наведені графіки оптимальних керувань у вигляді витрати пари ( $G_{n,k} = u_{1,k}$ ) та молока ( $G_{m,k} = u_{2,k}$ ), а на рис. 2 — графіки перехідних процесів температурних параметрів об'єкта, що відповідають оптимальним керуванням. З графіків видно, що перехідні процеси затухають досить швидко, причому за невелику кількість дискретних відліків.

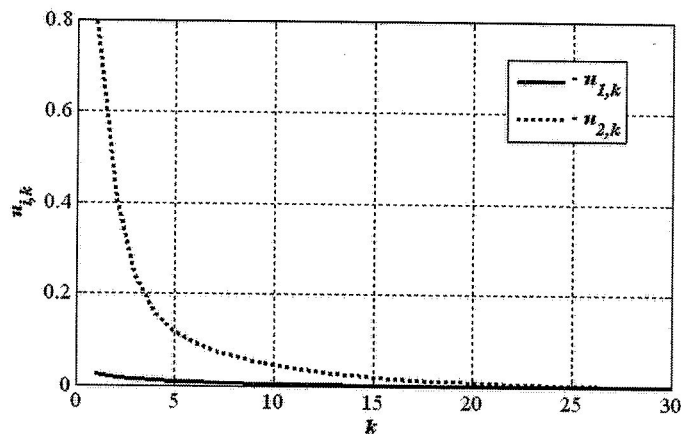


Рис. 1. Графіки оптимальних керувань витратою пари та молока

Мінімальне значення критерію (3) при цьому дорівнює  $I_{\min} = 8,9032$ .

На наступних рисунках наведені результати досліджень залежності значення функціоналу (квадратичного критерію якості)

$$I(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{2i} (\alpha x_i^T x_i + \beta u_i^T u_i) + \lambda^{2N} x_N^T x_N \quad (20)$$

від величини періоду квантування  $h$  (рис. 3), від вагового множника  $\lambda$  (рис. 4) та від вагових множників  $\alpha, \beta > 0$  (рис. 5, 6).

З рис. 3 видно, що зі збільшенням періоду квантування  $h$  значення критерію (20) монотонно зменшується, прямуючи після  $h = 120$  до деякого постійного значення, яке критерій має при неперервному (недискретному) керуванні.

## ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

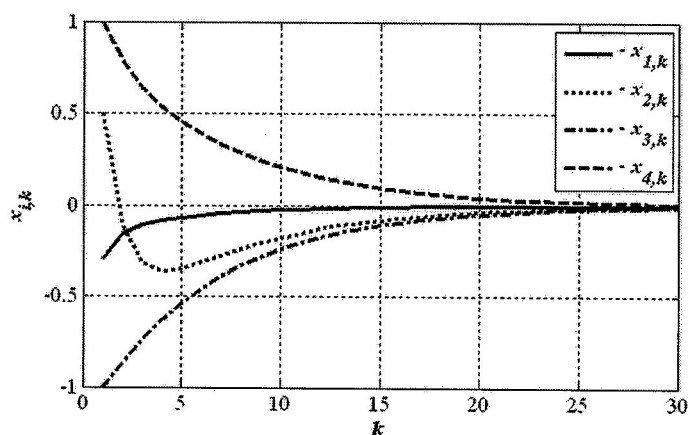


Рис. 2. Графіки перехідних процесів температурних параметрів об'єкта

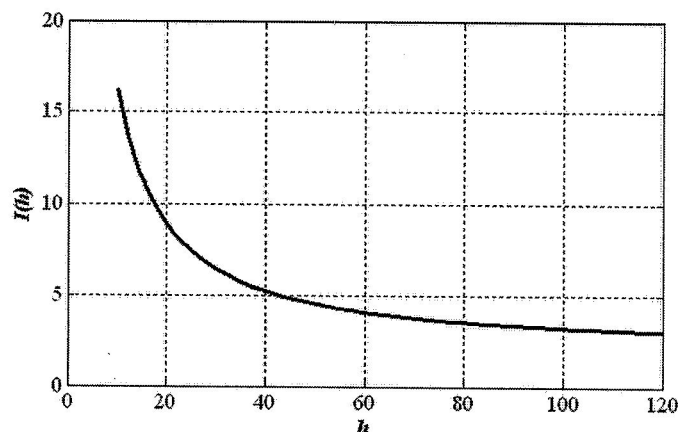


Рис. 3. Графік залежності значення функціоналу (20) від періоду квантування  $h$

Аналіз рис. 4 показує що при  $\lambda > 1$  значення критерію (20) стрімко зростає, прямуючи до нескінченності, тобто  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \infty$ . Очевидно, що для побудови оптимальних регуляторів з якісними перехідними процесами, параметр  $\lambda$  доцільно вибирати з діапазону  $0.5 < \lambda < 1.5$ , де забезпечуються жорсткі вимоги до якості перехідних процесів згідно з критерієм якості керування.

Графічна залежність, що представлена на рис. 5 показує, що критерій (20), з ваговими множниками  $\alpha = \rho$ ,  $\beta = 1 - \rho$ , де  $\rho$  — параметр з діапазону  $0 < \rho < 1$ , змінюється майже за лінійним законом.

Графік на рис. 6 показує незначне збільшення значення критерію (20) відносно параметра  $\beta$  і суттєве збільшення критерію відносно параметра  $\alpha$ . Враховуючи велику чутливість цього критерію до параметра  $\alpha$ , який є множником при координатах вектора стану об'єкта, при конструюванні дискретних матричних оптимальних регуляторів доцільно зосередити основну увагу саме на цьому ваговому множникові. Множник  $\beta$  при цьому можна зафіксувати, поклавши наприклад,  $\beta = 1$ .

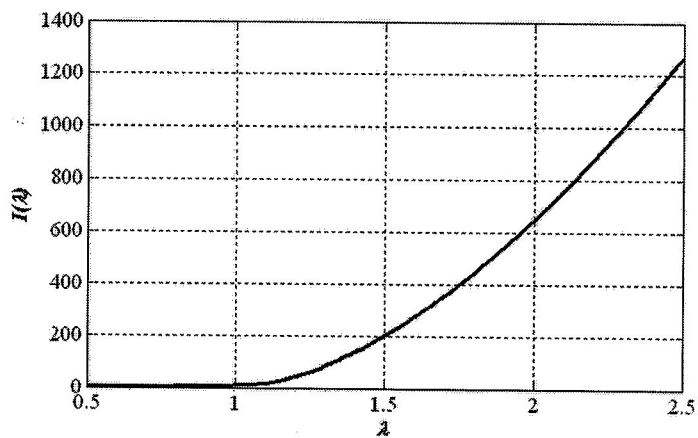


Рис. 4. Залежність критерію (20) від вагового параметра  $\lambda$

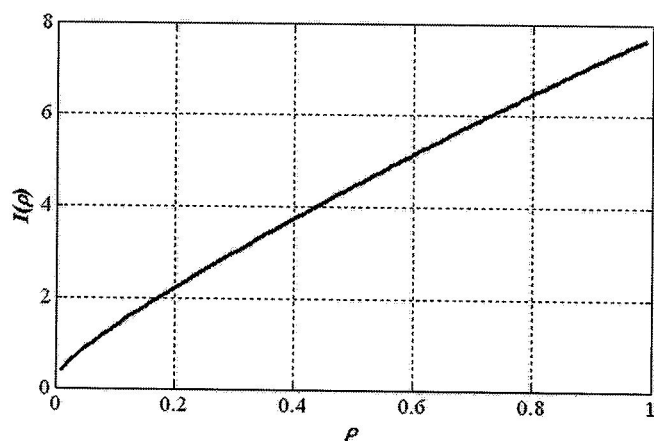


Рис. 5. Графік критерію (20) від вагового параметра  $\rho$

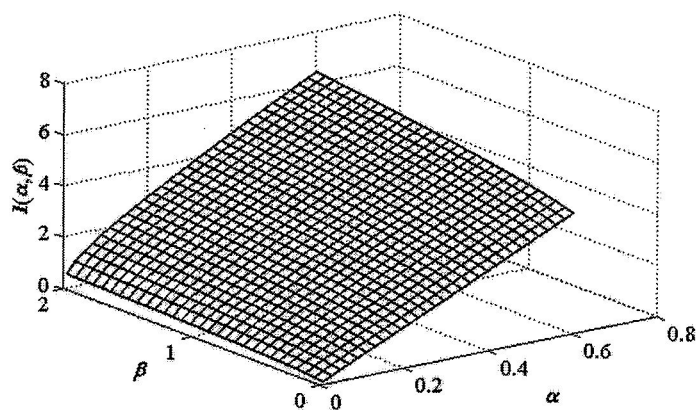


Рис. 6. Залежність критерію (20) від двох вагових параметрів  $\alpha$  та  $\beta$

## ПРОЦЕСИ ТА ОБЛАДНАННЯ

**Висновок.** Результати обчислювальних експериментів по керуванню пластинчатою пастеризаційно-охолоджувальною установкою показали високу ефективність одержаного оптимального дискретного керування. Перехідні процеси згасають досить швидко за невелику кількість тактів (періодів квантування), причому якість перехідних процесів суттєво залежить від значень вагових коефіцієнтів критерію. Отже, обґрунтований вибір цих вагових коефіцієнтів з метою одержання більш якісних перехідних процесів стану об'єкта є окремою задачею, що потребує додаткових досліджень.

### ЛІТЕРАТУРА

1. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987. — 480 с.
2. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. М.: Наука, 1985. — 296 с.
3. *Сейдж Э.П., Уайт Ч.С.* Оптимальное управление системами. — М.: Радио и связь, 1982. — 392 с.
4. *Магнус Я.Р., Нейдеккер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. — М.: Физматлит, 2002. — 496 с.
5. *Луцька Н.М.* Керованість та спостережуваність технологічних об'єктів управління // Східно-Європейський журнал передових технологій. — 2010. — № 1/5 (43). — С. 4—7.

*Одержана редколегією 10.06.10 р.*