18. Аналітичний розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності для однієї одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою

Тарас Погорілий
Національний університет харчових технологій

Вступ. При математичному моделюванні процесу рекристалізації за коливальним механізмом, базуючись на комірчастій моделі колективного росту і розчинення кристалів сахарози, для знаходження аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою спочатку необхідно знайти аналітичний розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності для однієї одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою. Дана задача математично формулюється наступним чином: необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (1)$$

де $v_2(x,t)$, °С — функція розподілу температури в одновимірній області $D=\{(x)|x_1 \leq x \leq x_2\}$, в залежності від координати x, м та часу t, с; а = λ/(с·ρ), м/с^2 — коефіцієнт температуропровідності; λ, Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності; c, кДж/(кг·К) — теплоємність; ρ, кг/м^3 — густина речовини, з неоднорідними граничними умовами другого роду

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{x=x_2} = 0, \quad (t \geq 0), \qquad (2)$$

на відповідних границях одновимірної області D, та при наступній неоднорідній початковій умові:

$$\left. v_2(x,t)\right|_{t=0} = 0, \quad (x_1 \leq x \leq x_2; t \geq 0). \qquad (3)$$

Матеріали і методи. Для знаходження розв'язку даної задачі використаємо метод розділення змінних Фур'є. В даному випадку метод Фур'є потрібно застосувати до поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності (1)–(3), але це можливо зробити не до неоднорідного диференціального рівняння (1), а саме до однорідного рівняння теплопровідності, яке записуємо з рівняння (1). В цьому випадку це можливо буде зробити в силу однорідних (тобто таких, що дорівнюють тотожно нулю) граничних умов (2). Зробивши це, знайшли власні числа та власні функції розглянутої задачі, і вже для рівняння теплопровідності (1) вже будемо застосовувати знайдені власні функції однорідного диференціального рівняння.

Таким чином, в результаті розв'язання поставленої задачі, отримуємо власні числа λ_n, $(n \geq 0)$, та відповідні їм власні функції $X_{2_n}(x)$, $(x_1 \leq x \leq x_2;\ n \geq 0)$:

$$X_{2_n}(x) = \cos\frac{n\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}, \quad (x_1 \leq x \leq x_2; n = 0,1,2,\ldots).$$

На основі знайдених власних функцій (4), запишемо розв'язок задачі (1)–(3):

$$v_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2_n}(t)\cdot\cos\frac{n\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}, \quad (x_1 \leq x \leq x_2; t \geq 0; n = 0,1,2,\ldots),$$

де через функції $T_{2_n}(t), (t \geq 0; n = 0,1,2,\ldots)$, позначено:

$$T_{2_n}(t) = \int_0^t e^{-a\cdot\left(\frac{n\pi}{x_2-x_1}\right)^2\cdot(t-\tau)}\cdot f_n(\tau)d\tau, \quad (t \geq 0; n = 0,1,2,\ldots),$$

а через функції $f_n(t), (t \geq 0; n = 1,2,3,\ldots)$, позначено:

$$f_0(t) = \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)d\tau, \quad (t \geq 0),$$

$$f_n(t) = \frac{2}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x,t) \cdot \cos \frac{n\pi(x - x_1)}{x_2 - x_1} d\tau, \quad (t \geq 0; n = 1,2,3,\ldots),$$

Результати. Представлено (5) аналітичний розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності для однієї одновимірної області з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою.

Висновки: На основі знайденого розв'язку (5) можна знайти аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для однієї одновимірної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою. Таким чином, на основі знайденого цього розв'язку (5) долається ще один етап по створенню математичної моделі процесу рекристалізації за коливальним механізмом, базуючись на комірчастій моделі колективного росту і розчинення кристалів сахарози.

Література

1. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высшая школа. 1970. — 712 с.