УДК 519.852 : 338.432

Лисенко О.А.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри економіки праці та менеджменту,
Національний університет харчових технологій

ВИКОРИСТАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В АНАЛІЗІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА

У статті розглянуто лінійну задачу планування виробництва на підприємствах харчової промисловості. Для більш глибокого аналізу оптимального розв'язку таких задач використовують основні положення теорії двоїстості, зокрема, обернену матрицю, яку можна виписати із останньої симплекс-таблиці. За допомогою побудованої матриці можна визначити вплив змін обмежень на дефіцитні ресурси та попит на оптимальний розв'язок задачі планування виробництва. В практичній діяльності при заданій великій кількості змінних побудова розв'язку ітераційним симплекс-методом викликає обчислювальні труднощі і вимагає багато часу. В роботі наведений алгоритм, який на основі звітів, що генеруються в електронній таблиці MS Excel при розв'язанні лінійних задач симплекс-методом, дозволяє побудувати обернену матрицю. Представлений аналіз розв'язку лінійної задачі планування виробництва хлібобулочних виробів за умов оптимізації використання сировини, заданої у вигляді загальної вартості, потужності наявного обладнання з метою максимізації прибутку підприємства.

Ключові слова: лінійна задача, планування, двоїста задача, двоїсті оцінки, дефіцитні ресурси, алгоритм, обернена матриця

THE USING OF ECONOMIC AND MATHEMATICAL METHODS IN THE ANALYSIS OF THE OPTIMAL SOLUTION OF THE LINEAR

PROBLEM OF PLANNING PRODUCTION

Lysenko Olena

National University of Food Technologies

The linear problem of production planning at enterprises of the food industry is reviewed in the article. It is proved that in order to make a management decision it is necessary to perform a comprehensive analysis of the obtained solution under the influence of changing both internal and external factors. It is determined that using the theory of duality allows having a deeper analysis of the optimal solution obtained using the iterative simplex method.

This algorithm, which is based on the reports generated in the MS Excel spreadsheet when solving linear problems by the simplex method, allows you to build an inverse matrix. The constructed matrix is used to determine the impact of changes in scarce resources and constraints on the optimal solution of the problem of production planning.

The algorithm consists of the following stages: reduction of the linear model of production planning to the canonical form; determination of the order of basic variables of the last simplex table on the basis of reports based on results and stability and taking into account the rules of the simplex method of solving linear problems; calculating the inverse matrix and checking it for compliance with the help of the basic formula for finding the solution of a dual problem.

The possibility of using the described algorithm with the example of the problem of planning the production of bakery products, where the solution was obtained by the iterative simplex method, is proved. The range of products consisted of six types of products, which are limited by the lower and upper limits of demand. Production is limited by raw materials in the form of total value, which was obtained for the planned production of certain products. The capacity of two furnaces were also set as restrictions.

Investigation shows that the obtained inverse matrix of the proposed algorithm corresponds to the matrix obtained using the simplex method. The obtained results allows us to assess the impact of changes off the constraints on the solution of the

linear problem of planning of the production of bakery products. It is discovered that this algorithm can be effectively used in practical work in order to conduct a deeper analysis of the optimal solutions of linear programming problems.

Keywords: linear problem, planning, dual linear program, dual estimates, scarce resources, inverse matrix, algorithm

Постановка проблеми. В сучасних умовах гострої конкуренції на ринку для менеджера будь-якого господарства оптимізація бізнес-процесів є одним із ефективних шляхів підвищення показників діяльності підприємства. На сьогодні отримання оптимального плану вже не є достатнім для прийняття управлінського рішення. Більш актуальним становиться аналіз отриманого розв’язку. Мінливість як зовнішніх так і внутрішніх умов середовища для будь-якого підприємства змушує проводити більш глибокий аналіз змін оптимального плану, пов’язаних зі змінами величин, що описують даний процес у вигляді заданих обсягів ресурсів, меж попиту на продукцію, цін на продукцію, що виробляється, показників технологічної матриці. Залишається актуальним питання визначення меж, в яких зміни умов функціонування підприємства буде призводити до несуттєвих змін оптимального плану, а в яких план стає неприпустимим. Також для прийняття рішення при плануванні виробництва є необхідним визначення вузьких місць виробництва, дефіцитних ресурсів, стримуючих обмежень, невигідних або нерентабельних видів продукції та їх вплив на основні показники виробництва.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженням двоїстості у лінійному програмуванні були присвячені роботи таких видатних вчених як Л.В. Канторовича, Т. Купманса, В.В. Новожилова, В. С. Нємчинова, А. Л. Лур’є, В.С. Михалевича, Ю. М. Ермолєва та інших. Проблеми оптимізації та методи розв’язання задач лінійного програмування в різних сферах господарства розглянуті в роботах Ашманова С. А., Вовка В.М., Калініченко А.В., Вітлінського В.В., Терещенка Т.О., Савіной С.С., Блага Н., Приймака І., Листопада В.В., Березовського О.А., Волонтира В. О. та ін. Проте в умовах наявності алгоритмів та програмних засобів розв'язання задач лінійного програмування проведення глибокого аналізу викликає труднощі, які пов'язані із розв'язанням задач з великою кількістю змінних, що відповідає реальному асортименту та наявних ресурсних обмежень і меж попиту навіть невеликого підприємства.

Постановка завдання полягає у розробці алгоритму, який дозволить використовувати формули теорії двоїстості для проведення аналізу на чутливість величин оптимального розв'язку під впливом змін всіх заданих показників виробництва в задачі з великою кількістю невідомих.

Виклад основного матеріалу дослідження. Як показують дослідження, лінійне програмування забезпечує широкі можливості в аналізі моделей на чутливість і проведення параметричних досліджень. Двоїсті задачі мають чітку геометричну та економічну інтерпретації. Теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях [1, с. 122, 2-7] і вимагають від науковців їх подальшого дослідження [2, 5].

Як зауважують Забуранна Л.В. та ін., економіко-математичний аналіз розв'язку здійснюється в двох основних напрямках: у вигляді варіантних розрахунків за моделями з порівнянням різних варіантів плану і у вигляді аналізу кожного з отриманих рішень з допомогою двоїстих оцінок. Варіантні розрахунки можуть здійснюватися при незмінній структурі самої моделі (постійному складі невідомих, способів виробництва, обмежень задачі і однаковому критерії оптимізації), але зі зміною чисельної величини конкретних показників моделі. Варіантні розрахунки можуть проводитися також при зміні елементів самої моделі: зміні критерію оптимізації, додавання нових обмежень на ресурси чи на засоби виробництва їх використання, розширення безлічі варіантів і т. д. Одним із ефективних методів економіко-математичного аналізу є використання об'єктивно-обумовлених оцінок оптимального плану, який базується на властивості двоїстих оцінок. Для оптимальних моделей, що описують будь-які економічні процеси, існують загальні математичні властивості двоїстих оцінок. Однак економічна інтерпретація цих оцінок може бути абсолютно різною в залежності від побудованої моделі [6, с. 41-42].

Розглянемо лінійну задачу планування виробництва хлібобулочних виробів з метою оптимізації прибутку підприємства. Для таких задач характерним є наявність технологічної матриці норм виробництва заданого асортименту продукції, межі попиту (мінімальний та максимальний), обсяги ресурсів, що виділяються на виробництво продукції, ціни та собівартість виробленої продукції. Вихідні дані для моделі оптимального планування наведені в табл. 1, 2.

Таблиця 1

Основні показники випуску хлібобулочних виробів за заданим асортиментом

№	Види продукції	Обсяг виробництва	Ціна 1 т, у.о.	Собівартість 1 т, у.о.	Прибуток	Попит, т			№ печі
						Мінім.	Максим.	План	
1	Батон соціальний	13,2	3090	2760	330	10	100	13,2	3
2	Хліб новий пш. ф. І гат.	495	1970	1533	437	100	550	495	1
3	Хліб білий соціальний ф.	23,76	1530	1558	–28	20	30	23,76	1
4	Хліб висівковий 0,3	18,0	3600	2830	770	10	50	18	3
5	Булка апетитна 0,3	29,0	4200	3796	404	10	50	29	3
6	Булка смачна 0,4	133,0	6600	4666	1934	10	200	133	3

Джерело: авторська розробка

Таблиця 2

Нормовані значення витрат сировини на 1 т хлібобулочних виробів

№ з/п	Показники, кг	Батон соц.	Хліб новий пш. ф. І гат.	Хліб білий соц. ф.	Хліб висівк. 0,3	Булка апетитна 0,3	Булка смачна 0,4	Ціна за 1 т, у.о.
	Вихід продукції	146	134	134	124,6	136	148,8	
1.	Борошно вищого ґатунку	100	0	0	0	100	100	1300
2.	Борошно 1 ґатунку	0	100	100	88	0	0	1700
3.	Висівки	0	0	0	12	0	0	340
4.	Сіль	1,5	1,5	1,5	1,3	1	1,4	1,2
5.	Дріжджі конц	2	1,2	1,2	1,6	1,2	4	5,6
6.	Цукор	1	0	0	0	28	17	6,5
7.	Маргарин				8			8,3
8.	Яйце						5	16,25

9.	Ванілін				12			97
10.	Часник					2,3		20
11.	Олія	3	1,7	0	0,85	0	2	6,5
12.	Витрати сировини на 1 т виготовленої продукції, у.о.	890,68	1268,80	1268,72	1243,39	957,62	875,19	

Джерело: авторська розробка

Річна продуктивність обох печей складає 600 т/рік.

Введемо позначення:

x_1 – Батон соціальний; x_2 – Хліб новий пш.ф. I гат.;

x_3 – Хліб білий соціальний ф.; x_4 – Хліб висівковий 0,3;

x_5 – Булка апетитна 0,3; x_6 – Булка смачна 0,4.

Економіко-математична модель набуває вигляду:

$$Z = 330x_1 + 437x_2 - 28x_3 + 770x_4 + 404x_5 + 1934x_6 \to \max$$

Обмеження:

– за витратами на сировину:

$$890{,}68x_1 + 1268{,}80x_2 + 1268{,}72x_3 + 1243{,}39x_4 + 957{,}62x_5 + 875{,}19x_6 \le 836511{,}8$$

– за продуктивністю ліній:

$x_2 + x_3 \le 600$ – на потужність печі №1;

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \le 600$ – на потужність печі №3.

– за попитом:

$10 \le x_1 \le 100$; $100 \le x_2 \le 550$; $20 \le x_3 \le 30$;

$10 \le x_4 \le 50$; $10 \le x_5 \le 50$; $10 \le x_6 \le 200$.

$$x_j \ge 0, j = 1, 2,. \ldots, 6.$$

Розв’язання побудованої задачі лінійного програмування зручно зробити в електронній таблиці MS Excel та провести економічний аналіз за допомогою звітів «Отчет о результатах» та «Отчет об устойчивости». Економіко-математичний аналіз за створеними звітами добре описаний в усіх підручниках, присвячених дослідженню оптимізаційних лінійних моделей [1, 4, 6, 7]. Проте на практиці завжди постає питання: якщо змінити межі дефіцитних ресурсів, стримуючих меж попиту і т.і., то як це вплине на отриманий оптимальний план? Такий аналіз можна провести на основі формули, що дозволяє знаходити вектор оптимального розв'язку двоїстої задачі (Y*):

$$Y* = \bar{C}_{баз} \times D^{-1}, \quad (1)$$

де $\bar{C}_{баз}$ – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані;

D^{-1} – матриця, обернена до матриці *D,* складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі [1, с. 72].

Складність використання даної формули полягає в тому, що потрібно розв'язати задачу ітераційним симплекс-методом у вигляді симплекс-таблиць (MS Excel при використанні вбудованої процедури «Пошук розв'язку» цього не надає, а розв'язання вручну призводить до побудови великої кількості таблиць). Необхідно зауважити, що існує програмне забезпечення, наприклад, LINA [7, с. 121], в якому можна побудувати таку таблицю, тобто для такого аналізу необхідно встановлення додаткового програмного забезпечення.

Розглянемо алгоритм, який дозволяє побудувати матрицю D^{-1} для задач довільної розмірності та за умов наявності звітів про результати та стійкість розв'язку задачі в електронній таблиці MS Excel.

Етап I. Запис канонічної форми побудованої задачі лінійного програмування згідно алгоритму симплекс-методу:

$890{,}68\,x_1 + 1268{,}80\,x_2 + 1268{,}72\,x_3 + 1243{,}39\,x_4 + 957{,}62\,x_5 + 875{,}19\,x_6 + x_7 = 836511{,}8$

$x_2 + x_3 + x_8 = 600$ $\quad$ $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_9 = 600$

$x_1 - x_{10} + y_1 = 10$ $\quad$ $x_1 + x_{11} = 100$ $\quad$ $x_2 - x_{12} + y_2 = 100$

$x_2 + x_{13} = 550$ $\quad$ $x_3 - x_{14} + y_3 = 20$ $\quad$ $x_3 + x_{15} = 30$

$x_4 - x_{16} + y_4 = 10$ $\quad$ $x_4 + x_{17} = 50$ $\quad$ $x_5 - x_{18} + y_5 = 10$

$x_5 + x_{19} = 50$ $\quad$ $x_6 - x_{20} + y_6 = 10$ $\quad$ $x_6 + x_{21} = 200$

$Z - 330x_1 - 437x_2 + 28x_3 - 770x_4 - 404x_5 - 1934x_6 = 0$

Таким чином, перша симплекс таблиця буде містити 16 рядків плюс М-рядок та 21 стовпець для змінних. В першій симплекс-таблиці базисними змінними згідно симплекс-методу будуть відповідно до канонічної форми x_8,

x_7, x_9, y_1, x_{11}, y_2, x_{13}, y_3, x_{15}, y_4, x_{17}, y_5, x_{19}, y_6, x_{21}.

Етап II. Визначення порядку базисних змінних останньої симплекс-таблиці.

Завдяки звіту про стійкість (рис. 1), можна одразу виявити змінні, які залишаться базисними в оптимальному розв'язку, оскільки відповідні їм ресурси є недефіцитними: це рядки x_8 та x_9, які відповідають обмеженням на потужності печей (тіньова ціна, тобто двоїста оцінка, у звіті про стійкість дорівнює 0). Також, оскільки задача має оптимальний розв'язок, всі штучні змінні вийдуть із симплекс-таблиці і до базису ввійдуть відповідні заданому асортименту змінні ($y_1 \leftrightarrow x_1$, $y_2 \leftrightarrow x_2$, $y_3 \leftrightarrow x_3$, $y_4 \leftrightarrow x_4$, $y_5 \leftrightarrow x_5$, $y_6 \leftrightarrow x_6$).

6	Комірки змінних						
7			Остаточне	Приведена	Цільова функція	Припустиме	Припустиме
8	Комірка	Им`я	Значення	Вартість	Коефіцієнт	Збільшення	Зменьшення
9	\$B\$3	батон соціальний	100	23,23338992	330	1E+30	23,23338992
10	\$C\$3	Хліб новий пш. ф. І гат.	344,4037784	0	437	33,0967943	437
11	\$D\$3	Хліб білий соціальний ф.	20	-464,9715983	-28	464,9715983	1E+30
12	\$E\$3	Хліб висівковий 0,3	50	341,7525013	770	1E+30	341,7525013
13	\$F\$3	Булка апетитна 0,3	50	74,17832282	404	1E+30	74,17832282
14	\$G\$3	Булка смачна 0,4	200	1632,566491	1934	1E+30	1632,566491
15							
16	Ограничения						
17			Остаточне	Тінь	Обмеження	Припустиме	Припустиме
18	Комірка	Им`я	Значення	Ціна	Правий бік	Збільшення	Зменьшення
19	\$H\$39	Загальна вартість сирови	836511,8026	0,344419175	836511,8026	260861,0537	310100,1889
20	\$H\$43	Піч №1 Всього	364,4037784	0	600	1E+30	235,5962216
21	\$H\$44	Піч №3 Всього	400	0	600	1E+30	200

Рис. 1 Звіт про стійкість, згенерований за допомогою вбудованої обчислювальної процедури «Пошук розв'язку» в електронній таблиці MS Excel

Джерело: розробка автора

Згідно звіту зі стійкості (рис. 1) стовпець «Приведена вартість» показує прибуткові для підприємства види продукції, виробництво яких тримає тільки максимальна межа попиту. Отже, кількість виробленої продукції дорівнює цій межі, а значить додаткові змінні у відповідних рівностях канонічної форми будуть дорівнювати нулю. В даному випадку одержимо $x_{11} = x_{17} = x_{19} = x_{21} = 0$. Дані змінні заміняться на відповідні їм змінні, які будуть показувати на скільки більше виробляється продукції за значення нижньої межі попиту, тобто $x_{11} \leftrightarrow x_{10}$, $x_{17} \leftrightarrow x_{16}$, $x_{19} \leftrightarrow x_{18}$, $x_{21} \leftrightarrow x_{20}$.

Для нерентабельних або менш прибуткових порівняно із іншими видів продукції оптимальне значення змінної буде дорівнювати ніжній межі попиту, тому відповідна додаткова змінна з рівності про обмеження щодо максимального попиту не вийде з базису і буде мати ненульове значення (x_{15}). Також, враховуючи уже все вищевикладене не міняється і базисі змінна x_{13}, оскільки відповідний їй вид продукції має значення, яке не дорівнює верхній межі попиту. Залишилась лише одна змінна x_{12}, яка міняє $x_7 = 0$, що відповідає дефіцитному ресурсу, який повністю вичерпаний при оптимізації.

Тобто ми отримали такий порядок базисних змінних останньої симплекс-таблиці: x_{12}, x_8, x_9, x_1, x_{10}, x_2, x_{13}, x_3, x_{15}, x_4, x_{16}, x_5, x_{18}, x_6, x_{20}.

Етап III. Розрахунок оберненої матриці та перевірка її на відповідність.

Складаємо матрицю D з векторів-стовпців із першої симплекс-таблиці, які відповідають побудованій на першому етапі канонічній формі, що відповідають визначеному на другому етапі порядку базисних змінних останньої симплекс-таблиці (табл. 3).

Таблиця 3

Матриця D

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & x_{12} & x_8 & x_9 & x_1 & x_{10} & x_2 & x_{13} & x_3 & x_{15} & x_4 & x_{16} & x_5 & x_{18} & x_6 & x_{20}
\end{array}
$$

$$
D = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 890{,}68 & 0 & 1268{,}80 & 0 & 1268{,}72 & 0 & 1243{,}39 & 0 & 957{,}62 & 0 & 875{,}19 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}
$$

Джерело: розробка автора

Обчислимо обернену матрицю, наприклад, за допомогою вбудованої функції МОБР в електронній таблиці MS Excel, і одержимо наступне (табл. 4).

Таблиця 4

Обернена матриця

$$D^{-1} = \begin{vmatrix}
0,0008 & 0 & 0 & 0 & -0,702 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,98 & 0 & -0,755 & 0 & -0,69 \\
-0,0008 & 1 & 0 & 0 & 0,702 & 0 & 0 & -0,00007 & 0 & 0 & 0,98 & 0 & 0,755 & 0 & 0,69 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0,0008 & 0 & 0 & 0 & -0,702 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,98 & 0 & -0,755 & 0 & -0,69 \\
-0,0008 & 0 & 0 & 0 & 0,702 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0,98 & 0 & 0,755 & 0 & 0,69 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{vmatrix}$$

Джерело: розробка автора

Використовуючи формулу (1) розрахуємо вектор оптимального розв’язку двоїстої задачі:

$$Y^* = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 330 \quad 0 \quad 437 \quad 0 \quad -28 \quad 0 \quad 770 \quad 0 \quad 404 \quad 0 \quad 1934 \quad 0) \times D^{-1} =$$

$$= (0,344 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 23,23 \quad 0 \quad 0 \quad -465 \quad 0 \quad 0 \quad 341,74 \quad 0 \quad 74,065 \quad 0 \quad 1632,47)$$

Отриманий набір тіньових цін повністю співпадає із результатами, наведеними на рис. 1 у звіті про стійкість. Отже, можна стверджувати, що отримана шукана матриця, яка дозволить провести аналіз впливу змін дефіцитних ресурсів на оптимальний розв’язок.

Задля повної достовірності автором була розв’язана побудована лінійна модель симплекс-методом вручну і в останній симплекс-таблиці містилась така ж матриця з відповідними значеннями та базисними змінними.

Проаналізуємо на основі останньої симплекс-таблиці, яка включає обернену матрицю, як міняється оптимальний план за умов змін правих частин обмежень поставленої лінійної задачі (табл. 5).

Таблиця 5

Симплекс-таблиця з оберненою матрицею D^{-1} лінійної задачі про планування виробництва хлібобулочних виробів

Базис	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
x_{12}	0,0008	0	0	0	-0,702	-1	0	-1	0	0	-0,98	0	-0,755	0	-0,69
x_8	-0,0008	1	0	0	0,702	0	0	-0,00007	0	0	0,98	0	0,755	0	0,69
x_9	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1
x_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0,0008	0	0	0	-0,702	0	0	-1	0	0	-0,98	0	-0,755	0	-0,69
x_{13}	-0,0008	0	0	0	0,702	0	1	1	0	0	0,98	0	0,755	0	0,69
x_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
Z	0,344	0	0	0	23,2	0	0	–465	0	0	341,7	0	74,1	0	1632,5
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}

Джерело: авторська розробка

На основі даних табл. 3 можна стверджувати, що при збільшенні загальної вартості сировини на 1000 у.о. загальний прибуток зросте на 340 у.о. і при цьому зміниться оптимальний розв’язок таким чином: збільшиться виробництво Хлібу нового пш. ф. І гат. на 0,8 т, що вимагатиме збільшення використання потужності печі №1 на 0,8 т. В свою чергу, зростання загального прибутку на 23,23 у.о. відбудеться, якщо зросте обсяг виробництва Батона соціального на 1 т за рахунок зменшення виробництва Хлібу нового пш. ф. І гат. на 0,7 т, що призведе до зростання використання потужності печі №3 на 1 т та зменшення використання потужності печі №1 на 0,7 т. Аналогічно можна описати вплив всі інших об’єктивно-обумовлених оцінок на оптимальний план.

Також за допомогою побудованої оберненої матриці D^{-1} можна дослідити загальний вплив на цільову функцію при одночасній зміні правих частин системи обмежень. Тобто, якщо змінити наприклад, загальну вартість сировини на 15000 у.о., скоротити потужність печей №1 до 400 т/р та №2 до 420 т/р, змінити межі попиту на хлібобулочні вироби: збільшити максимальні межі попиту на Булку смачну 0,4 до 220 т; зменшити на Хліб висівковий до 40 т, проте збільшити і мінімальну межу попиту на Хліб білий соціальний ф. до 28 т. Тоді, новий оптимальний план виробництва продукції за умов одночасної зміни запасів усіх заданих обмежень набуде такого вигляду (табл. 6).

Таблиця 6

Оптимальний план виробництва продукції за умов одночасної зміни запасів усіх заданих обмежень

$$X^* = \begin{vmatrix}
0{,}0008 & 0 & 0 & 0 & -0{,}702 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0{,}98 & 0 & -0{,}755 & 0 & -0{,}69 \\
-0{,}0008 & 1 & 0 & 0 & 0{,}702 & 0 & 0 & -0{,}00007 & 0 & 0 & 0{,}98 & 0 & 0{,}755 & 0 & 0{,}69 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}0008 & 0 & 0 & 0 & -0{,}702 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0{,}98 & 0 & -0{,}755 & 0 & -0{,}69 \\
-0{,}0008 & 0 & 0 & 0 & 0{,}702 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0{,}98 & 0 & 0{,}755 & 0 & 0{,}69 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 851511{,}8 \\ 400 \\ 420 \\ 10 \\ 100 \\ 100 \\ 550 \\ 28 \\ 30 \\ 10 \\ 40 \\ 10 \\ 50 \\ 10 \\ 220 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 244{,}23 \\ 27{,}77 \\ 10 \\ 100 \\ 90 \\ 344{,}23 \\ 205{,}77 \\ 28 \\ 2 \\ 40 \\ 30 \\ 50 \\ 40 \\ 220 \\ 210 \end{vmatrix}$$

Джерело: розробка автора

Отриманий новий оптимальний розв’язок X*= (100; 344,23; 28; 40; 50; 220; 0; 27,77; 10; 90; 0; 244,23; 205,77; 0; 2; 30; 0; 40; 0; 210; 0) має всі невід’ємні значення, значить і оптимальний план двоїстої задачі залишається таким же:

Y* = (0,344   0   0   0   23,23   0   0   –465   0   0   341,74   0   74,065   0   1632,47).

Загальний максимальний прибуток підприємства зміниться таким чином:

$$\Delta Z\text{мах} = \sum_{\text{i}=1}^{15} \Delta b_i y_i = 15000 \times 0{,}344 + (-200) \times 0 + (-180) \times 0 + 0 \times 0 +$$

$$+ 0 \times 23{,}23 + + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 8 \times (-465) + 0 \times 0 + 0 \times 0 + (-10) \times 341{,}74 +$$

$$+ 0 \times 0 + 0 \times 74{,}065 + 0 \times 0 + 20 \times 1632{,}47 = 5166{,}28 \text{ у.о.}$$

Висновки з проведеного дослідження. Отже, побудований алгоритм дозволяє побудувати обернену матрицю, яка дозволяє провести більш детальний аналіз отриманого оптимального розв’язку задачі лінійного програмування під впливом змін заданих обмежень. Даний алгоритм може бути застосований лише до невироджених взаємо-спряжених двоїстих задач лінійного програмування, які мають непорожню множину припустимих розв'язків.

Можна зазначити, що використання економіко-математичних методів теорії двоїстості дозволило отримати більш глибокий аналіз задач планування, що може стати для фахівця більш вагомим підґрунтям для прийняття рішення при плануванні виробництва.

У подальшому плануються дослідження використання представленого алгоритму для задач лінійного програмування, які мають не один дефіцитний ресурс, задачі із введенням нового виду продукції та виключення наявного, задачі планування виробництва з метою мінімізації витрат.

Список використаних джерел:

1. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.

2. Березовський О.А. Покращення лагранжевих двоїстих оцінок для квадратичних екстремальних задач // Кібернетика та комп'ютерні технології: Зб. наук. пр. 2020. № 1. С. 15-22.

3. Блага Н., Приймак І. Побудова моделей вибору стратегії розвитку підприємства в умовах конкуренції // Формування ринкової економіки в Україні. 2019. Вип. 41. С. 38-49.

4. Волонтир Л.О., Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., Чіков І.А. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2020. 334 с.

5. Калініченко А. В., Шмиголь Ю. В., Копішинська О. П., Сакало В. М. Особливості постановки та розв'язання спряжених задач лінійного програмування в аграрному виробництві // Вісник Хмельницького національного університету. 2007. №1. С. 218-223.

6. Забуранна Л.В., Клименко Н.А., Попрозман Н.В., Попрозман О.І. Оптимізаційні методи та моделі: Підручник, 2-е видання, доповнене. Київ:

Комприн, 2018. 419 с.
7. Економіко-математичне моделювання: Навчальний посібник / За ред. О. Т. Іващука. Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.

References:

1. Vitlinskij, V.V., Tereshenko, T.O. and Savina, S.S. (2016) Ekonomiko-matematychni metody ta modeli: optymizatsiia [Economic and mathematical methods and models: optimization]. Kyiv: KNEU. [in Ukrainian]
2. Berezovs'kyj, O.A. (2020), "Pokraschennia lahranzhevykh dvoistykh otsinok dlia kvadratychnykh ekstremal'nykh zadach" [Improving lagrange dual bounds for quadratic extremal problems], *Kibernetyka ta komp'iuterni tekhnolohii,* vol. 1, pp. 15-22.
3. Blaha, N. and Pryjmak, I. (2019), "Pobudova modelej vyboru stratehii rozvytku pidpryiemstva v umovakh konkurentsii" [Building models for choice of the strategy of enterprise development in conditions of competition], *Formuvannia rynkovoi ekonomiky v Ukraini*, vol. 41, pp. 38-49.
4. Volontyr, L.O., Potapova, N.A., Ushkalenko, I.M. and Chikov, I.A. (2020) Optymizatsijni metody ta modeli v pidpryiemnyts'kij diial'nosti [The Optimization methods and models in business]. Vinnytsia: VNAU. [in Ukrainian]
5. Kalinichenko, A.V., Shmyhol', Yu.V., Kopishyns'ka, O.P. and Sakalo, V.M. (2007), Osoblyvosti postanovky ta rozv'iazannia spriazhenykh zadach linijnoho prohramuvannia v ahrarnomu vyrobnytstvi [Features of formulation and solving of adjoint problems of linear programming in agricultural production], *Visnyk Khmel'nyts'koho natsional'noho universytetu*, vol. 1, pp. 218-223.
6. Zaburanna, L.V., Klymenko, N.A., Poprozman, N.V. and Poprozman O.I. (2018) Optymizatsijni metody ta modeli [The optimization methods and models], 2nd ed. Kyiv: Komprin. [in Ukrainian]
7. Ivaschuk, O.T. (2008) Ekonomiko-matematychne modeliuvannia [The economic and mathematical modeling]. Ternopil': TNEU «Ekonomichna dumka». [in Ukrainian]

lenlysstar@gmail.com