

УДК 539.3

©2007 Л. П. Хорошун, Д. В. Бабич, Е. Н. Шикла

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ЗЕРНИСТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ ПОВРЕЖДАЮЩЕЙСЯ МАТРИЦЕ

Введение. С ростом уровня нагружения в тонкостенных композитных конструкциях происходит накопление микродефектов типа пустых пор. Следствием таких структурных изменений в материалах является нелинейность их диаграмм деформирования. Задачи устойчивости для пластин и оболочек с учетом указанного вида нелинейности деформирования изотропных однородных и неоднородных материалов рассмотрены в работах [2 – 7].

На нелинейный характер деформирования материала, связанный с микроструктурными разрушениями, может накладываться нелинейность деформирования другой физической природы (например, связанная с пластичностью).

Представляет интерес исследование устойчивости тонкостенных элементов конструкций из неоднородных, например, зернистых композитных материалов, когда один из компонентов претерпевает микроразрушения, а другой – деформируется пластически, без микроразрушений.

Ниже изложены постановка и метод решения задач устойчивости для цилиндрической оболочки из зернистого композита при повреждающейся матрице и физически нелинейных включениях. Для вывода уравнений устойчивости цилиндрической оболочки из такого материала используется подход, применяемый при изучении устойчивости упруго-пластических тел на основе деформационной теории пластичности [1, 2].

§ 1. Определяющие уравнения для зернистого композита при повреждающейся матрице и физически нелинейных включениях. Рассматривается деформирование зернистого композита с физически нелинейными включениями, которое сопровождается микроповреждаемостью матрицы в процессе нагружения. Микроповреждаемость матрицы моделируется образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности. Пусть матрица материала имеет пористость p_2 . Физически нелинейное деформирование включений композита описывается зависимостью их упругих модулей от деформаций. Модули объемного сжатия и сдвига материала включений и каркаса матрицы соответственно обозначим K_1 , μ_1 и K_2 , μ_2 , а объемные содержания включений и пористой матрицы – c_1 , c_2 , причем модули включений K_1 и μ_1 зависят от деформаций, а модули матрицы K_{2p} и μ_{2p} , определяемые формулами [8, 9]

$$K_{2p} = \frac{4K_2\mu_2(1-p_2)^2}{3K_2p_2 + 4\mu_2(1-p_2)}; \quad \mu_{2p} = \frac{(9K_2 + 8\mu_2)\mu_2(1-p_2)^2}{3K_2(3-p_2) + 4\mu_2(2+p_2)}, \quad (1.1)$$

зависят от ее пористости p_2 . Зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ композита представляются в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left(K^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (1.2)$$

причем эффективные модули объемного сжатия K^* и сдвига μ^* будут функциями пористости матрицы p_2 и макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Определение эффективных модулей упругости зернистого композита с физически нелинейными включениями и пористой матрицей сводится к следующему итерационному алгоритму. Эффективные модули объемного сжатия $K^{*(n)}$ и сдвига $\mu^{*(n)}$ в n -ом приближении определяются [9] через соответствующие модули включений в n -ом приближении $K_1^{(n)}$, $\mu_1^{(n)}$ и матрицы K_{2p} , μ_{2p} формулами

$$\begin{aligned} K^{*(n)} &= c_1 K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) + c_2 K_{2p} - c_1 c_2 \frac{\left[K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - K_{2p} \right]^2}{c_1 K_{2p} + c_2 K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) + n_c^{(n)}}, \\ \mu^{*(n)} &= c_1 \mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) + c_2 \mu_{2p} - c_1 c_2 \frac{\left[\mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - \mu_{2p} \right]^2}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) + m_c^{(n)}}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}$ – средние во включениях деформации в n -ом приближении;

$$n_c^{(n)} = \frac{4}{3} \mu_c^{(n)}; \quad m_c^{(n)} = \frac{(9K_c^{(n)} + 8\mu_c^{(n)})\mu_c^{(n)}}{6(K_c^{(n)} + 2\mu_c^{(n)})}; \quad (1.4)$$

$$K_c^{(n)} = \frac{K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) K_{2p}}{c_1 K_{2p} + c_2 K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right)}; \quad \mu_c^{(n)} = \frac{\mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) \mu_{2p}}{c_1 \mu_{2p} + c_2 \mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right)}, \quad (1.5)$$

если жесткость включений больше жесткости матрицы. Средние во включениях деформации в $(n+1)$ -ом приближении $\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)}$, входящие в формулы (1.3), (1.5), определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n+1)} &= \\ &= \frac{2\mu^{*(n)} \left[\mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - \mu_{2p} \right] \left(K^{*(n)} - K_{2p} \right) - 3K^{*(n)} \left[K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - K_{2p} \right] \left(\mu^{*(n)} - \mu_{2p} \right)}{6c_1 \mu^{*(n)} \left[\mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - \mu_{2p} \right] \left[K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - K_{2p} \right]} \times \\ &\quad \times \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + \frac{\left(\mu^{*(n)} - \mu_{2p} \right)}{c_1 \left[\mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} \right) - \mu_{2p} \right]} \langle \varepsilon_{ij} \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В нулевом приближении включения примем линейно деформирующимися, т.е.

$$K_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(0)} \right) = K_1(0); \quad \mu_1 \left(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(0)} \right) = \mu_1(0). \quad (1.7)$$

Эффективные модули при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вычисляются как предельные значения итерационного процесса

$$K^* = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{*(n)}; \quad \mu^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*(n)}. \quad (1.8)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала матрицы принимается критерий прочности Губера – Мизеса

$$I_\sigma^{12} = k_2, \quad (1.9)$$

где $I_\sigma^{12} = \left(\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{12} \rangle' \right)^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle'$ по неповрежденной части материала матрицы; k_2 – предел микропрочности матрицы, являющийся случайной функцией координат. Так как инвариант I_σ^{12} связан с инвариантом девиатора средних деформаций в матрице $I_\varepsilon^2 = \left(\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \right)^{1/2}$ зависимостью

$$I_\sigma^{12} = \frac{2\mu_{2p}}{1-p_2} I_\varepsilon^2, \quad (1.10)$$

а инвариант девиатора средних деформаций в матрице I_ε^2 определяется через инвариант $I_\varepsilon = \left(\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle' \right)^{1/2}$ для всего композита соотношением

$$I_\varepsilon^2 = \frac{\mu^* - \mu_1}{c_2(\mu_{2p} - \mu_1)} I_\varepsilon, \quad (1.11)$$

то с учетом соотношений (1.10), (1.11) критерий прочности (1.9) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$\frac{2\mu_{2p}(\mu^* - \mu_1)}{c_2(1-p_2)(\mu_{2p} - \mu_1)} I_\varepsilon = k_2. \quad (1.12)$$

В качестве одноточечной функции распределения $F_2(k_2)$ предела микропрочности k_2 неповрежденной части материала матрицы используется распределение Вейбулла

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{20}; \\ 1 - \exp \left[-m_2 (k_2 - k_{20})^{n_2} \right], & k_2 \geq k_{20}, \end{cases} \quad (1.13)$$

где k_{20} – минимальное значение предела микропрочности матрицы; m_2, n_2 – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности матрицы k_2 является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаются пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_2 и распределение микронапряжений в материале матрицы при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_2(k_2)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$ функция $F_2(I_\sigma^{12})$ согласно (1.9), (1.13), определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то обозначая начальную пористость матрицы p_{20} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости

$$p_2 = p_{20} + (1 - p_{20})F_2(I_\sigma^{12}). \quad (1.14)$$

С учетом соотношений (1.10), (1.11) уравнение баланса пористости матрицы (1.14) в пространстве макродеформаций принимает вид

$$p_2 = p_{20} + (1 - p_{20})F_2\left[\frac{2\mu_{2p}(\mu^* - \mu_1)}{c_2(1 - p_2)(\mu_{2p} - \mu_1)}I_\varepsilon\right], \quad (1.15)$$

где эффективный модуль сдвига μ^* и модули сдвига матрицы μ_{2p} определяются формулами (1.1), (1.3) – (1.5).

Уравнения (1.1) – (1.7), (1.15) описывают процесс статистически однородного деформирования зернистого композита с физически нелинейными включениями при повреждаемости в его матрице. Физическая нелинейность включений влияет на образование пористости в матрице при деформировании композита, изменение пористости матрицы в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Решение задачи о деформировании зернистого композита с физически нелинейными включениями при повреждаемости в его матрице в условиях заданных макродеформаций сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости зернистого материала с пористой матрицей и физически нелинейными включениями, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.1), (1.3) – (1.7), и определению пористости матрицы из уравнения (1.15), что осуществляется также определенным итерационным методом [9]. Изложенный алгоритм позволяет для заданного зернистого композита с физически нелинейными включениями и микроповреждающейся матрицей определять диаграммы макродеформирования (зависимости $\langle \sigma_{ij} \rangle$ от $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$), необходимые при постановке и решении задач устойчивости пластин и оболочек из рассматриваемых материалов.

При постановке задач устойчивости оболочек наиболее удобно пользоваться секционными модулями упругости E^* , ν^* , которые через эффективные модуль объемного сжатия и модуль сдвига композита K^* , μ^* определяются формулами

$$E^* = \frac{9K^*\mu^*}{3K^* + \mu^*}; \quad \nu^* = \frac{3K^* - 2\mu^*}{6K^* + 2\mu^*}. \quad (1.16)$$

§ 2. Уравнения устойчивости для цилиндрических оболочек из зернистого композита с физически нелинейными включениями при повреждающейся мат-

рице. Рассмотрим цилиндрическую оболочку длиной L и толщиной h . Оболочка отнесена к системе координат $0x_1x_2x_3$, связанной со срединной поверхностью радиуса R . Координаты x_1, x_2, x_3 отсчитываются соответственно в осевом, окружном и нормальном к срединной поверхности направлениях. Перемещения точек срединной поверхности в указанных направлениях обозначаются u, v, w . В рамках гипотез Кирхгоффа – Лява в произвольной точке цилиндрической оболочки макродеформации (здесь и далее угловые скобки в обозначениях макродеформаций и макронапряжений опускаются) будут определяться соотношениями [1]

$$\varepsilon_{ij} = \tilde{e}_{ij} + x_3 \chi_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.1)$$

где выражения для мембранных деформаций \tilde{e}_{ij} , кривизн χ_{ii} и кручения χ_{12} срединной поверхности имеют вид

$$\tilde{e}_{11} = u_{,1}; \tilde{e}_{22} = v_{,2} - \frac{w}{R}; \tilde{e}_{12} = \frac{1}{2} (u_{,2} + v_{,1}); \quad (2.2)$$

$$\chi_{11} = -w_{,11}; \chi_{22} = -w_{,22}; \chi_{12} = -w_{,12}.$$

Поскольку вывод уравнений равновесия в усилиях и моментах, а также кинематических соотношений Коши и уравнений совместности деформаций не связан с использованием каких-либо допущений о свойствах материала, в качестве исходных уравнений равновесия в возмущенном состоянии принимаются уравнения в смешанной форме [1]

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - \left(\sigma_{11}^0 w_{,11} + 2\sigma_{12}^0 w_{,12} + \sigma_{22}^0 w_{,22} - \frac{\bar{\sigma}_{22}}{R} \right) h = 0;$$

$$\bar{e}_{11,22} + \bar{e}_{22,11} - 2\bar{e}_{12,12} = -\frac{1}{R} w_{,11}. \quad (2.3)$$

В (2.3) $M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \bar{\sigma}_{ij} dx_3$; $\bar{\sigma}_{ij}$; \bar{e}_{ij} ; χ_{ij} ; w соответственно обозначают приращения моментов и полных напряжений в оболочке вследствие изгиба, мембранных напряжений и деформаций, а также кривизн и прогибов срединной поверхности в возмущенном состоянии; σ_{ij}^0 – напряжения в основном безмоментном напряженном состоянии. К этим уравнениям необходимо присоединить выражения для возмущений мембранных напряжений через функцию напряжений Φ

$$\bar{\sigma}_{11} = \Phi_{,22}; \bar{\sigma}_{22} = \Phi_{,11}; \bar{\sigma}_{12} = -\Phi_{,12}. \quad (2.4)$$

Основной задачей при записи в кинематических переменных уравнений устойчивости (2.3) для нелинейно деформируемых тел является вывод выражений для приращений внутренних усилий и моментов, появляющихся вследствие смены форм равновесия. Эти выражения зависят от вида нелинейности уравнений состояния для плоского напряженного состояния и определяются с помощью варьирования уравнений состояния для полных напряжений и мембранных деформаций в окрестности основного равновесного состояния. Для зернистого нелинейно деформируемого материала указанные уравнения имеют вид

$$\sigma_{11} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} (\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22}); \quad \sigma_{22} = \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11}); \quad \sigma_{12} = 2\mu^* \varepsilon_{12};$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{E^*}(\tilde{\sigma}_{11} - \nu^* \tilde{\sigma}_{22}) ; & \tilde{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{E^*}(\tilde{\sigma}_{22} - \nu^* \tilde{\sigma}_{11}) ; \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2\mu^*} \tilde{\sigma}_{12}^* .\end{aligned}\quad (2.5)$$

В (2.5) параметры E^* , ν^* , μ^* зависят от интенсивностей макронапряжений и макродеформаций

$$I'_\sigma = \sqrt{2/3} \sqrt{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)} . \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}I'_\varepsilon &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1-\nu^*)} \sqrt{(\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11})^2 - (\varepsilon_{11} + \nu^* \varepsilon_{22}) \times} \\ &\quad \times (\varepsilon_{22} + \nu^* \varepsilon_{11}) + 3(1-\nu^*)^2 \varepsilon_{12}^2} .\end{aligned}\quad (2.7)$$

Связь между интенсивностями и их приращениями определяется соотношениями

$$I'_\sigma = 2\mu^* I'_\varepsilon ; dI'_\sigma = 2\mu_k dI'_\varepsilon , \quad (2.8)$$

где $\mu_k = \mu^* + I'_\varepsilon \frac{\partial \mu^*}{\partial I'_\varepsilon}$ – касательный модуль сдвига.

Приращения полных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ и мембранных деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}$ на основании (2.5) – (2.8) определяются выражениями

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11} &= a_{11}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{12}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{13}\bar{\varepsilon}_{12} ; & \bar{\sigma}_{22} &= a_{21}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{22}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{23}\bar{\varepsilon}_{12} ; \\ \bar{\sigma}_{12} &= a_{31}\bar{\varepsilon}_{11} + a_{32}\bar{\varepsilon}_{22} + a_{33}\bar{\varepsilon}_{12} ;\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11}\bar{\sigma}_{11} + A_{12}\bar{\sigma}_{22} + A_{13}\bar{\sigma}_{12} ; & \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{21}\bar{\sigma}_{11} + A_{22}\bar{\sigma}_{22} + A_{23}\bar{\sigma}_{12} ; \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= A_{31}\bar{\sigma}_{11} + A_{32}\bar{\sigma}_{22} + A_{33}\bar{\sigma}_{12} ,\end{aligned}\quad (2.10)$$

где коэффициенты a_{ij}, A_{ij} , имеют вид

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma_0}^{\prime 2}} ; \\ a_{12} &= \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{11}^0]\sigma_{11}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma_0}^{\prime 2}} ; \\ a_{13} &= 2(E_k - E^*) \frac{\sigma_{11}^0 \sigma_{12}^0}{(1+\nu^*)I_{\sigma_0}^{\prime 2}} ; \\ a_{21} &= \frac{\nu^* E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2})I_{\sigma_0}^{\prime 2}} ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{E^*}{1-\nu^{*2}} + \frac{(E_k - E^*)[(2-\nu^*)\sigma_{22}^0 + (2\nu^*-1)\sigma_{11}^0]\sigma_{22}^0}{3(1-\nu^{*2})I'_{\sigma_0^2}}; \\
a_{23} &= 2(E_k - E^*)\frac{\sigma_{22}^0\sigma_{12}^0}{(1+\nu^*)I'_{\sigma_0^2}}; \\
a_{31} &= \frac{(E_k^* - E^*)[(2-\nu^*_c)\sigma_{11}^0 + (2\nu^*_c-1)\sigma_{22}^0]\sigma_{12}^0}{3(1-\nu^{*c^2})I'_{\sigma_0^2}}; \\
a_{32} &= \frac{(E_k - E^*)[(2\nu^*-1)\sigma_{11}^0 + (2-\nu^*)\sigma_{22}^0]\sigma_{12}^0}{3(1-\nu^{*2})I'_{\sigma_0^2}}; \\
a_{33} &= \frac{E^*}{1+\nu^*} + 2(E_k - E^*)\frac{(\sigma_{12}^0)^2}{(1+\nu^*)I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{11} &= \frac{1}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^*\sigma_{22}^0)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{3I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{12} &= -\frac{\nu^*}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^*\sigma_{22}^0)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{3I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{13} &= 2\left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu^*\sigma_{22}^0)\sigma_{12}^0}{I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{22} &= \frac{1}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^*\sigma_{11}^0)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{3I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{21} &= -\frac{\nu^*}{E^*} + \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^*\sigma_{11}^0)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{3I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{23} &= 2\left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(\sigma_{22}^0 - \nu^*\sigma_{11}^0)\sigma_{12}^0}{I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{31} &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(1+\nu^*)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)\sigma_{12}^0}{3I'_{\sigma_0^2}}; \\
A_{32} &= \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{(1+\nu^*)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)\sigma_{12}^0}{3I'_{\sigma_0^2}};
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$A_{33} = \frac{1+\nu^*}{E^*} + 2 \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{(1+\nu^*)(\sigma_{12}^0)^2}{I_{\sigma_0}^2}. \quad (2.12)$$

Представленные выше соотношения справедливы для однородного и неоднородного случаев основного напряженно-деформированного состояния оболочки.

§ 3. Однородное докритическое напряженное состояние цилиндрической оболочки. С целью упрощения выкладок далее рассматриваются оболочки с однородным основным напряженно-деформированным состоянием.

В этом случае уравнения (2.3) с учетом соотношений (2.11), (2.12) имеют вид

$$D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] + \\ + T_{11}^0 w_{,11} + T_{22}^0 w_{,22} + 2T_{12}^0 w_{,12} - \frac{h\Phi_{,11}}{R} = 0; \quad (3.1)$$

$$A_1 \Phi_{,1111} + A_2 \Phi_{,1122} + A_3 \Phi_{,2222} - A_4 \Phi_{,1112} - A_5 \Phi_{,1222} = -\frac{E_2}{R} w_{,11},$$

где

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} / E_2; \bar{A}_{ij} = E_2 A_{ij}; \quad (3.2)$$

$$a_1 = \bar{a}_{11}; a_2 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} + 2\bar{a}_{33}; a_3 = \bar{a}_{22}; \bar{a}_4 = \bar{a}_{13} + \bar{a}_{31}; \bar{a}_5 = \bar{a}_{23} + \bar{a}_{32};$$

$$A_1 = \bar{A}_{22}; A_2 = \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + 2\bar{A}_{33}; A_3 = \bar{A}_{11}; A_4 = \bar{A}_{32} + \bar{A}_{23}; A_5 = \bar{A}_{13} + \bar{A}_{31}.$$

В (3.2) обозначено $D = E_2 h^3 / 12; T_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 h$ – тангенциальные усилия докритического напряженного состояния; E_2 – модуль упругости связующего зернистого композитного материала. К уравнениям (3.1) необходимо присоединить краевые условия, соответствующие характеру закрепления торцов цилиндрической оболочки.

§ 4. Осевое сжатие цилиндрической оболочки. Рассмотрим устойчивость сжатой продольным усилием T_{11}^0 оболочки с шарнирно - подвижно опертыми краями

$$w = M_{11} = \Phi_{,22} = \Phi_{,12} = 0 \text{ при } x_1 = 0; L. \quad (4.1)$$

При сжатии оболочки в направлении оси $0x_1$ коэффициенты в уравнениях (3.1) имеют вид

$$a_1 = \frac{(2-\nu^*)E_k + \nu^*E^*}{2E_2(1-\nu^{*2})}; a_2 = \frac{(2\nu^*-1)E_k + (5-2\nu^*)E^*}{2E_2(1-\nu^{*2})}; a_3 = \frac{E^*}{E_2(1-\nu^{*2})}; \\ a_4 = a_5 = 0. \quad (4.2)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}E_2 \left(\frac{2-\nu^*}{E^*} + \frac{\nu^*}{E_k} \right); A_2 = \frac{1}{2}E_2 \left[\frac{5+2\nu^*}{E^*} - \frac{1+2\nu^*}{E_k} \right]; A_3 = \frac{E_2}{E_k}; A_4 = A_5 = 0.$$

Решение системы уравнений (3.1), (4.1) представляется в виде [1]

$$w = A \sin \frac{m\pi}{L} x_1 \cos \frac{n\pi}{R} x_2; \Phi = B \sin \frac{m\pi}{L} x_1 \cos \frac{n\pi}{R} x_2. \quad (4.3)$$

Критические напряжения при осевом сжатии определяются формулой

$$\sigma_{11}^0 = E_2 \left\{ \frac{h^2}{12} \left[a_1 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + a_2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 + a_3 \left(\frac{n^2 L}{m\pi R^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{A_1 \left(\frac{m\pi R}{L} \right)^2 + A_2 n^2 + A_3 \left(\frac{n^2 L}{m\pi R} \right)^2} \right\}. \quad (4.4)$$

В случае осесимметричной потери устойчивости ($n=0$) выражение для минимального значения критического напряжения имеет вид

$$\sigma_{11}^0 = \eta \frac{h}{R}, \quad \eta = \sqrt{\frac{E_k E^*}{3(1-\nu^{*2})}}. \quad (4.5)$$

§ 5. Внешнее радиальное давление. При решении задачи о радиальном обжатии цилиндрической оболочки внешним давлением интенсивностью q в уравнениях устойчивости (3.1) следует воспользоваться выражениями (4.2), поменяв местами значения коэффициентов a_1 и a_2 , а также A_1 и A_3 , и положить $T_{22}^0 = qR$, $T_{11}^0 = T_{22}^0 = 0$. При шарнирном опирании торцов оболочки в этом случае решение уравнений (3.1) представляется в виде [1]

$$w = A \sin \frac{m\pi x_1}{L} \sin \frac{nx_2}{R}; \quad \Phi = B \sin \frac{m\pi x_1}{L} \sin \frac{nx_2}{R}, \quad (5.1)$$

где

$$B = A \frac{E_2}{R} \frac{1}{A_3 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + A_2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 + A_1 \left(\frac{n}{R} \right)^4}.$$

В безразмерном виде критические окружные напряжения $\bar{\sigma}_{22}^0 = \sigma_{22}^0 \frac{R}{E_2 h}$ определяются формулой

$$\bar{\sigma}_{22}^0 = \frac{1}{12} \eta (a_3 \theta^4 + a_2 \theta^2 + a_1) + \frac{\theta^4}{\eta (A_3 \theta^4 + A_2 \theta^2 + A_1)}, \quad (5.2)$$

где $\theta = m\pi R/nL$; $\eta = n^2 h/R$.

Если по аналогии с упругой задачей устойчивости для оболочек средней длины [1] принять $m=1$; $\theta \ll 1$, то (5.2) приближенно представляется в виде

$$\bar{\sigma}_{22}^0 = \frac{1}{12} a_1 \eta + \frac{\theta^4}{A_1 \eta}. \quad (5.3)$$

Минимизация (5.3) по n с учетом значений коэффициентов a_1, A_1 дает

$$\bar{\sigma}_{22}^0 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{[\nu^* E^* + (2-\nu^*) E_k]} \sqrt{E^* E_k}}{E_1 (1-\nu^{*2})^{3/4}} \left(\frac{h}{R} \right)^{3/2} \left(\frac{\pi R}{L} \right). \quad (5.4)$$

Критическое значение интенсивности радиального давления определяется соотношением

$$q = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{[v^* E^* + (2 - v^*) E_k] \sqrt{E^* E_k}}}{(1 - v^{*2})^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{\pi R}{L}\right). \quad (5.5)$$

§ 6. Числовые примеры. Выражения (4.5), (5.4) являются трансцендентными уравнениями относительно критических напряжений и не несут явной информации о влиянии повреждаемости матрицы и физической нелинейности включений зернистого композита на устойчивость цилиндрических оболочек. Критические напряжения для оболочек заданных геометрических размеров можно определить с помощью прямого решения этих уравнений итерационными методами с привлечением методики расчета эффективных параметров деформативности зернистого композита с физически нелинейными включениями и прогрессирующей микроповреждаемостью матрицы, подробно изложенной выше.

Исследование влияния микроповреждаемости матрицы и физической нелинейности включений зернистого композита на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии и радиальном давлении можно провести с помощью упрощенной процедуры. Целью этой процедуры является установление явной зависимости безразмерной толщины оболочки h/R от параметров нагружения (в рассматриваемых задачах σ_{11}^0 и σ_{22}^0), которые связаны соотношениями (4.5) и (5.4). Сущность приема покажем на примере осесимметричной потери устойчивости оболочки при осевом сжатии. Указанная процедура состоит в следующем.

В подходящем образом выбранном интервале $[0, (\varepsilon_{11}^0)_k]$ с некоторым шагом задается последовательность значений макродеформаций $(\varepsilon_{11}^0)_i$; с использованием формул §2 итерационным методом определяется последовательность соответствующих значений эффективных модулей, пористости и макронапряжений $(\sigma_{11}^0)_i$, которые отождествляются с критическими напряжениями для оболочки; последовательность значений касательного модуля вычисляется по формуле

$$(E_k)^i = \frac{(\sigma_{11}^0)_{i+1} - (\sigma_{11}^0)_i}{(\varepsilon_{11}^0)_{i+1} - (\varepsilon_{11}^0)_i}.$$

Относительные толщины оболочки, соответствующие последовательности значений $(\sigma_{11}^0)_i$, определяются по формуле

$$\frac{h}{R} = \sigma_{11}^0 \frac{\sqrt{3(1 - v^{*2})}}{\sqrt{E^* E_k}}.$$

Результаты вычислений по указанной схеме для сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки показаны на рис. 1, где сплошными, штриховыми, пунктирными и штрих-пунктирными линиями соответственно обозначены зависимости без-

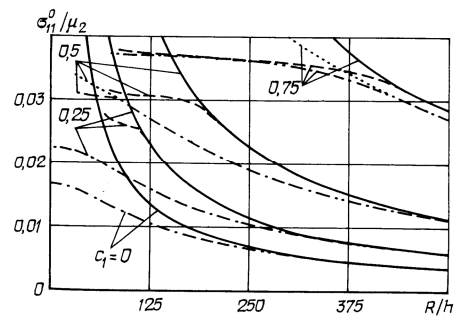


Рис. 1

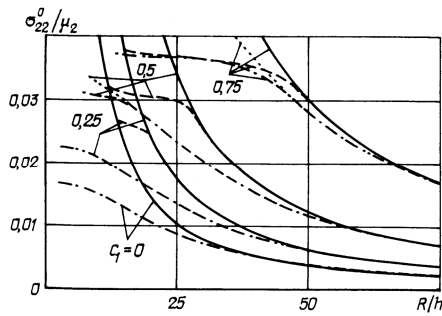


Рис. 2

размерного параметра критических напряжений (σ_{11}^0/μ_2) от обратной величины относительной толщины оболочки (R/h) для зернистого композита со сплошной матрицей и линейно упругими включениями, для композита с физически нелинейными включениями и сплошной матрицей, для композита с линейно упругими включениями при повреждающейся матрице и для композита с физически нелинейными включениями и повреждающейся матрице. Вычисления выполнены для оболочек из зернистого композитного материала с нелинейно деформирующимися включениями, у которых объемные деформации являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме сплошного материала включений имеют место соотношения

$$\sigma_{rr}^1 = K_1 \varepsilon_{rr}^1; \quad \sigma_{ij}^1 = 2\mu_1(S_1) \varepsilon_{ij}^1,$$

где K_1 – модуль объемного сжатия, который не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu_1(S_1)$ описывается функцией

$$\mu_1(S_1) = \begin{cases} \mu_{01}, & T_1 \leq T_{10}; \\ \mu_1' + \left(1 - \frac{\mu_1'}{\mu_{10}}\right) \frac{T_{10}}{2S_1}, & T_1 \geq T_{10}, \end{cases}$$

причем

$$S_1 = (\varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^1)^{1/2}; \quad T_1 = (\sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^1)^{1/2}; \quad T_{10} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{10},$$

где $\varepsilon_{ij}^1, \sigma_{ij}^1$ – компоненты девиаторов соответственно деформаций и напряжений; σ_{10} – предел пропорциональности; μ_1, μ_1' – постоянные материала включений

В качестве компонентов композита приняты линейно упрочняющиеся зерна с характеристиками $K_1 = 38,89$ ГПа; $\mu_1 = 29,17$ ГПа; $\mu_1' = 0,334$ ГПа; и линейно упругая матрица с характеристиками $K_2 = 3,33$ ГПа; $\mu_2 = 1,11$ ГПа.

Предел пропорциональности включений и минимальная микропрочность матрицы полагались равными

$$\sigma_{10} = 0,05 \text{ ГПа}; \quad k_{20} = 0,00245 \text{ ГПа}.$$

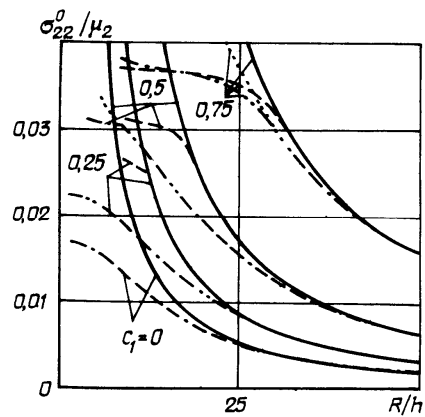


Рис. 3

Характер распределения микропрочности матрицы описывался законом Вейбулла с характеристиками разброса прочности $n_2 = 2$; $m_2 = 10^3$.

На рис. 2, 3 представлены полученные с помощью указанной процедуры результаты для случая нагружения цилиндрической оболочки радиальным давлением интенсивностью q . На рис. 2 изображены зависимости безразмерного критического окружного напряжения σ_{22}^0 от обратной величины безразмерной толщины оболочки с относительной длиной $L/R = 2$, на рис. 3 – с относительной длиной $L/R = 4$.

Представленные результаты показывают, что физическая нелинейность включений и микроповреждаемость матрицы зернистого композитного материала приводят к понижению устойчивости цилиндрических оболочек. Степень влияния указанных факторов на снижение критических нагрузок повышается с увеличением относительной толщины оболочки.

РЕЗЮМЕ. Виконано постановку і дано розв'язок задач про біфуркаційну стійкість циліндричних оболонок із зернистих композитних матеріалів з фізично нелінійними включеннями і пошкоджуваною матрицею.

SUMMARY. The statement of the problem on bifurcation stability of cylindrical shells made of the granular composite materials with physically nonlinear inclusions and damageable matrix is proposed and its solution is given.

Key words: granular composite, physically nonlinear inclusions, damageable matrix, bifurcation stability, cylindrical shell.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 879 с.
2. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Problems of Plate Stability in Short-term Damaging of a Material // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 2. – P. 898 – 905.
3. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Stability of Plates Made of a Granular Composite with Damageable Components // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 7. – P. 803 – 809.
4. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Stability of Cylindrical Shells Made of Fibrous Composite with damageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 6. – P. 675 – 681.
5. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Stability of Shells of Revolution Made of Fibrous Composite with Damageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 10. – P. 1148 – 1154.
6. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Stability of Cylindrical Shells Made of a Laminate Material with Damageable Components // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 6. – P. 677 – 683.
7. *Khoroshun L.P., Babich D.V.* Stability of Laminated Convex Shells of Revolution with Microdamages in Laminate Components // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 7. – P. 810 – 817.
8. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* A Theory of Short-term Micromechanics of Homogeneous Material for the Physically Nonlinear Deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 4. – P. 388 – 395.
9. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-term Microdamageability of Granular Material under Physically Nonlinear Deformation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 6. – P. 656 – 663.

Ин-т механики им. С.П.Тимошенко
НАН Украины, Киев (Украина)

Поступила 12.07.2006